

Matematika spojitého světa

Mirko Navara

Centrum strojového vnímání, katedra kybernetiky FEL ČVUT

Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a

<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS>

21. prosince 2011

Obsah

1	Vzdálenosti v prostoru	3
1.1	Metriky a normy	3
1.2	Konvergence a limity	4
2	Funkce více proměnných a jejich spojitost	6
2.1	Spojitosť	6
2.1.1	Definice limity a spojitosti	7
2.1.2	Příklady	7
2.1.3	Limita a spojitost vektorové funkce	8
3	Derivace funkcí více proměnných	10
3.1	Jak značit derivace aneb co nás učí počítače	10
3.1.1	Leibnizova (a Newtonova) notace	10
3.1.2	Operátorová notace	11
3.2	Parciální derivace	11
3.2.1	Pojem parciální derivace a gradientu	11
3.3	Směrová derivace	12
3.4	Totální diferenciál	14
3.4.1	Aplikace parciálních derivací	16
3.5	Diferenciál a jacobíán vektorové funkce	19
3.6	Parciální derivace vyšších řádů	19
3.6.1	Laplaceův operátor	21
3.7	Lokální extrémý	21
3.8	Pojmy oblouk a křivka	21
3.9	Derivace podél křivky	22
3.10	Numerický výpočet derivace	23
4	Obecné poznámky o lineárních operátorech	24
5	Integrace funkcí více proměnných	24
5.1	Integrace parciálních derivací, aneb co nám o funkci (ne)říkají její parciální derivace	25
5.2	Násobné integrály	25
5.2.1	Dvojný integrál přes obdélník a Fubiniova věta	26
5.2.2	Jak značit násobné integrály	28
5.2.3	Výpočet dvojného integrálu	28
5.2.4	Lineární substituce v dvojném integrálu	30
5.2.5	Obecná substituce v dvojném integrálu	31
5.2.6	Trojný integrál	32
5.2.7	Obecná substituce v trojném integrálu	33
5.3	Křivkové integrály druhého druhu	34
5.3.1	Co musí splňovat gradient	36

5.3.2	Jak najít potenciál	37
5.3.3	Greenova věta	39
5.4	Délka křivky a křivkový integrál prvního druhu	40
5.5	Poznámky o numerické integraci	41
5.6	Témata zde neobsažená	42
6	Diferenciální rovnice	43
6.1	Typy úloh	43
6.2	Řešitelnost	43
6.3	Co se může stát	44
6.4	Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty	45
6.4.1	Jednoduché kořeny	46
6.4.2	Násobné kořeny	47
6.5	Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty	48
6.5.1	Pravá strana je polynom	49
6.5.2	Pravá strana je exponenciální funkce	50
6.5.3	Pravá strana je harmonická funkce	51
6.5.4	Obecnější pravá strana	51
6.5.5	Tlumený oscilátor	52
6.5.6	Buzený oscilátor	53
6.6	Symbolické řešení diferenciálních rovnic	55
6.6.1	Separovatelné diferenciální rovnice	55
6.7	Numerické řešení diferenciálních rovnic	57
6.7.1	Eulerova metoda	57
6.7.2	Odhad chyby	58
6.8	Obecnější úlohy	58
6.8.1	Soustavy diferenciálních rovnic	58
6.8.2	Okrajové úlohy	59
6.8.3	Parciální diferenciální rovnice	59
6.8.4	Variační úlohy	60
7	Fourierovy řady	60
7.1	Parsevalova rovnost	64
7.2	Fourierova řada v komplexním tvaru	65
7.3	Sinová Fourierova řada	66
7.4	Kosinová Fourierova řada	66
7.5	Aplikace: pohyb struny	66
7.6	Užití Fourierových řad	67
8	Fourierova transformace	67
8.1	Motivace	68
8.1.1	Změna základní frekvence Fourierovy řady	68
8.1.2	Fourierův obraz jako analogie Fourierovy řady pro neperiodické funkce	68
8.1.3	Obecnější předpoklady Fourierovy transformace	69
8.2	Zpětná Fourierova transformace	69
8.3	Vlastnosti Fourierovy transformace	70
8.4	Aplikace Fourierovy transformace	71
8.5	Obecnější integrální transformace	71

Předmluva

Tento předmět i studijní materiály vznikly ve snaze neochudit studenty počítačových oborů aspoň o něco, co přináší spojitý, nedigitalizovaný pohled na svět. Cílem není vychovat cvičené borce, hbitě integrující s tužkou a papírem, ale poučené uživatele moderního softwaru, kteří budou aspoň schopni správně formulovat úlohy a snad i interpretovat dosažené výsledky.

Pro odlehčení nás některými místy provedou známé osobnosti, moudrý SH a jeho o něco méně moudrý společník DW. SH není zkratkou autorů znamenité knihy [Schlesinger, Hlaváč], i když ti se o vznik tohoto předmětu, textu, a hlavně jeho pojetí zasloužili mnohem víc a zasloužili by si v něm být zvěčněni. Činím tak aspoň zde.

Praha, 21. prosince 2011

Mirko Navara

1 Vzdálenosti v prostoru

1.1 Metriky a normy

Příklad 1. DW: „Víme, že loupež v klenotnictví na křižovatce 45th Street a 8th Avenue proběhla od 10:30 do 10:35. Zkoumal jsem, zda mohl pachatel odjet lodí v 11:15 z přístavu, který je na rohu 52nd Street a 12th Avenue. Přímá vzdálenost těchto dvou míst by to dovolovala, ale směr ulic nikoli. Mohl se vydat po 45th Street až k 12th Avenue, nebo naopak po 8th Avenue až k 52nd Street. Přepočítal jsem i řadu dalších možností, ale podle žádné z nich to nemohl stihnout.“ SH: „Příteli, nerad to říkám, ale plýtvat jste časem zbytečně.“ DW: „Ale vždyť je tolik možností, ani jsem nevyzkoušel všechny, kterých je $\binom{7+4}{4} = 330$, když samozřejmě vylučuji ty, kdy by se pachatel pohyboval proti směru, kterým již dříve postupoval.“ SH: „Stačil vám první výsledek, ostatní nepřinesly nic nového. Pachatel mohl utíkat pouze na západ, nebo na sever, a je jedno, v jakém pořadí, vzdálenost byla vždy stejná. Ne nadarmo jí podle tohoto místa říkají i matematici **manhattanská metrika**.“

Pro zjednodušení zanedbáme zakřivení i nerovnosti Země a budeme se pohybovat v aritmetickém lineárním prostoru \mathbb{R}^2 . Vzdálenost míst se souřadnicemi $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ byla v předchozím příkladu dána rozdíly souřadnic:

$$m_1((x, y), (u, v)) = |x - u| + |y - v| .$$

Přímá (=vzdušná, též **euklidovská**) vzdálenost by byla

$$m_2((x, y), (u, v)) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2} .$$

To jsou jen dva speciální případy obecnějšího vzorce

$$m_p((x, y), (u, v)) = (|x - u|^p + |y - v|^p)^{1/p} , \quad (1)$$

kde $p \geq 1$. V limitním případě pro $p \rightarrow \infty$ by o výsledku rozhodoval jen největší rozdíl souřadnic a dostali bychom

$$m_\infty((x, y), (u, v)) = \max(|x - u|, |y - v|) .$$

I to má své opodstatnění, někdy se ptáme na maximální chybu v kterékoli souřadnici.

Zobecněním do n -rozměrného prostoru bychom pro vzdálenost bodů (které ztotožňujeme s jejich polohovými vektory) $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ dostali vzorce

$$\begin{aligned} m_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= (|x_1 - u_1|^p + \dots + |x_n - u_n|^p)^{1/p} , \\ m_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= |x_1 - u_1| + \dots + |x_n - u_n| , \\ m_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \sqrt{(x_1 - u_1)^2 + \dots + (x_n - u_n)^2} , \\ m_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \max(|x_1 - u_1|, \dots, |x_n - u_n|) . \end{aligned}$$

V případě $n = 1$ dostáváme ve všech případech $|x_1 - u_1|$.

Všechny tyto vzorce definují tzv. **metriky (vzdálenosti)**, tj. funkce $m: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ s následujícími vlastnostmi:

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &\geq 0, \quad \text{přičemž } m(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \text{ právě když } \mathbf{x} = \mathbf{u}, \\ m(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= m(\mathbf{u}, \mathbf{x}), \\ m(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &\leq m(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + m(\mathbf{w}, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2)$$

Poslední vztah se nazývá **trojúhelníková nerovnost** a říká, že cestu z \mathbf{x} do \mathbf{u} si nezkrátíme, když navíc předepíšeme, že je třeba jít přes \mathbf{w} .

Cvičení 2. *Ověřte, že funkce m_p ze vzorce (1) by pro $p < 1$ nebyla metrika.*

Všechny uvedené metriky jsou odvozeny od **norem** ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n , což jsou funkce $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &\geq 0, & \text{přičemž } \|\mathbf{x}\| = 0, & \text{ právě když } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \\ \|a\mathbf{x}\| &= |a| \cdot \|\mathbf{x}\| & \text{ pro všechna } a \in \mathbb{R}, \\ \|\mathbf{x} + \mathbf{u}\| &\leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{u}\|. \end{aligned} \tag{3}$$

Poslední vztah je opět trojúhelníková nerovnost. Přibyl druhý vztah, který uvádí normu do souvislosti s násobením vektoru skalárem. Lineární prostor s normou se nazývá **normovaný lineární prostor**.

Každá norma $\|\cdot\|$ definuje (**indukuje**) metriku m vztahem

$$m(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|. \tag{4}$$

Zde uvedené metriky jsou odvozeny od následujících norem:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_p &= (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \\ \|\mathbf{x}\|_1 &= |x_1| + \dots + |x_n|, \\ \|\mathbf{x}\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \\ \|\mathbf{x}\|_\infty &= \max(|x_1|, \dots, |x_n|). \end{aligned}$$

Obrácené tvrzení neplatí; některé metriky nejsou indukované normami. (Kromě toho metriky lze zavést na obecnějších prostorech než lineárních.) Metrika m indukovaná normou $\|\cdot\|$ musí splňovat vztah, který dostaneme z (4) dosazením $\mathbf{u} := \mathbf{0}$:

$$\|\mathbf{x}\| = m(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Problém může nastat pouze u druhé z podmínek pro normu (3), která požaduje

$$m(a\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \|a\mathbf{x}\| = |a| \cdot \|\mathbf{x}\| = a m(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \quad \text{pro všechna } a \in \mathbb{R},$$

což některé metriky nesplňují.

Příklad 3 (metrika neindukovaná normou). *Na \mathbb{R}^2 lze zavést metriku*

$$m((x, y), (u, v)) = \left| \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{u} \right| + \left| \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{v} \right|,$$

která není indukována žádnou normou.

Nadále se budeme zabývat pouze **normovanými** lineárními prostory a metrikami indukovanými příslušnými normami.

1.2 Konvergence a limity

Pomocí normy můžeme definovat konvergenci posloupnosti bodů:

Definice 4. *Posloupnost bodů $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ v \mathbb{R}^n má limitu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, jestliže*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{b}\| = 0.$$

Poznámka 5. *Obecněji bychom mohli konvergenci zavést pomocí metriky podmínkou*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m(\mathbf{x}_i, \mathbf{b}) = 0.$$

Pokud je metrika indukovaná normou, dostaneme předchozí definici.

V definici 4 jsme nspecifikovali normu, takže jsme vlastně definovali mnoho typů konvergence. Nicméně v prostoru **konečné** dimenze se všechny tyto typy konvergence shodují. Pro zde uvedené normy za to vděčíme následujícím nerovnostem (pro $p \geq 1$):

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq n \|\mathbf{x}\|_\infty .$$

Tím je omezen poměr norem shora i zdola (při dané dimenzi konstantou). I když pro různé normy dostáváme různé vzdálenosti, na tom, jestli konvergují k nule, to nic nemění. To platí obecně i pro jiné normy, přesněji pro libovolný **normovaný** lineární prostor **konečné** dimenze (a jinými se zde zabývat nebudeme).

Nadále budeme obvykle uvažovat **euklidovskou normu** (nebude-li stanoveno jinak) a index 2 budeme vynechávat:

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} .$$

Bohužel při studiu konvergence nevystačíme s posloupnostmi, proto budeme muset zavést obecněji použitelné pojmy.

Definice 6. Pro $\varepsilon > 0$ definujeme ε -**okolí** bodu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ jako množinu

$$U_\varepsilon(\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| < \varepsilon\} .$$

(Pro $n = 1$ je to interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.) Pokud z ε -okolí $U_\varepsilon(\mathbf{b})$ vynecháme bod \mathbf{b} , hovoříme o **prstencovém ε -okolí** bodu \mathbf{b} ,

$$P_\varepsilon(\mathbf{b}) = U_\varepsilon(\mathbf{b}) \setminus \{\mathbf{b}\} .$$

Pokud nepotřebujeme specifikovat poloměr, hovoříme pouze o **okolí** a značíme $U(\mathbf{b})$, $P(\mathbf{b})$.

Definice 7. Necht $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **hromadný bod** množiny D , jestliže každé prstencové okolí $P(\mathbf{b})$ má neprázdný průnik s D ,
- **hraniční bod** množiny D , jestliže každé okolí $U(\mathbf{b})$ má neprázdný průnik s D i s $\mathbb{R}^n \setminus D$.

Nezáleží na tom, zda $\mathbf{b} \in D$ nebo ne.

Je-li \mathbf{b} hromadný bod množiny D , pak je množina $P(\mathbf{b}) \cap D$ nejen neprázdná, ale dokonce nekonečná. Ke každým konečně mnoha bodům z ní lze totiž najít menší okolí $P^*(\mathbf{b})$, které žádný z těchto bodů neobsahuje, ale i to má neprázdný průnik s D .

Pomocí pojmu okolí lze přeformulovat pojem konvergence: Posloupnost bodů $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ v \mathbb{R}^n má limitu $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, jestliže pro každé okolí $U(\mathbf{b})$ existuje $i_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathbf{x}_i \in U(\mathbf{b})$ pro všechna $i \geq i_0$. V tom případě množina bodů $X = \{\mathbf{x}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ nemá jiný hromadný bod než \mathbf{b} . Bod \mathbf{b} může být (jediným) hromadným bodem množiny X (a to právě tehdy, je-li nekonečná), ale nemusí (jestliže existuje $i_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\mathbf{x}_i = \mathbf{b}$ pro všechna $i \geq i_0$). (Je nutno rozlišovat množinu od posloupnosti, v množině se body neopakují.)

Posloupnost bodů, která nemá limitu, (přesněji množina všech bodů této posloupnosti) může mít i více hromadných bodů:

Příklad 8. Množina $D = \left\{ (-1)^i (1 - 1/i) \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ obsahuje např. prvky

$$0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{5}{6} \quad -\frac{6}{7} \quad \frac{7}{8} \quad -\frac{8}{9} \quad \frac{9}{10} \quad \dots$$

Má dva hromadné body $-1, 1$; žádný do ní nepatří. Její hraniční body jsou všechny její body a $-1, 1$.

Příklad 9. Hromadné body intervalu $I = (0, 1)$ tvoří uzavřený interval $\langle 0, 1 \rangle$; hromadné body jeho doplňku $\mathbb{R} \setminus I = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ jsou právě všechny body množiny $(-\infty, 0) \cup \langle 1, \infty \rangle$. Hraniční body (jak I , tak $\mathbb{R} \setminus I$) jsou $0, 1$.

Definice 10. Množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá

- **uzavřená**, jestliže obsahuje všechny své hromadné body,
- **otevřená**, jestliže její doplněk je uzavřený, tj. jestliže M neobsahuje žádný hromadný bod množiny $\mathbb{R}^n \setminus M$.

Cvičení 11. Může být množina současně otevřená i uzavřená?

Řešení. Ano, např. prázdná množina a její doplněk.

2 Funkce více proměnných a jejich spojitost

Doporučená literatura: [Hamhalter, Tišer: Dif. p., kap. 1].

Definice 12. (Reálná) **funkce** n **proměnných** je zobrazení $F: D \rightarrow \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je **definiční obor**.

Není-li stanoveno jinak, uvažujeme u funkcí jejich maximální definiční obor, tj. největší množinu, na níž jsou všechny potřebné výrazy v její definici definovány. Nechceme-li o definičním oboru hovořit a není to celá množina \mathbb{R}^n , hovoříme o funkci z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} .

Pokud zafixujeme všechny proměnné až na jednu, dostaneme funkci jedné proměnné. Takto můžeme funkci více proměnných chápat jako zobrazení, které $n - 1$ argumentům přiřazuje funkce jedné proměnné; tento pohled však nepostihuje specifika funkcí více proměnných.

Příklad 13. Funkci $F(x, y) = 2xy$ lze chápat jako funkci $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ale i jako lineární funkci $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2xy$, závislou na parametru y . Rovněž ji můžeme považovat za lineární funkci $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto 2xy$, závislou na parametru x .

Budeme potřebovat i vícerozměrný případ, vektorovou funkci vektorového argumentu, tedy zobrazení $F: D \rightarrow \mathbb{R}^k$, kde $k \in \mathbb{N}$ a $D \subseteq \mathbb{R}^n$ je definiční obor. To lze vyjádřit jako k funkcí $F_m: D \rightarrow \mathbb{R}$, $m = 1, \dots, k$,

$$\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_k), \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^k.$$

Příklad 14. Vektor intenzity gravitačního (nebo elektrického) pole, jehož zdroj se nachází v počátku souřadnic, je v bodě (x, y, z)

$$-c \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \left(\frac{-cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right),$$

kde c je konstanta.

2.1 Spojitost

Příklad 15. DW: „Chtěl jsem vám ukázat vilu San Michele. Měli jsme k ní dojít po této silnici od východu, ale nikde ji nevidím. Jak je to možné?“ SH: „Jak jste se tam včera dostal?“ DW: „Ulicí od západu.“ SH: „A kudy jste odešel?“ DW: „Do parku na kopci, myslím, že na jih.“ SH: „Jistě, na sever by to nešlo.“ DW: „To tedy opravdu ne. Ale jak to víte, když jste tam nikdy nebyl?“ SH: „Myslel jsem si to, ale nebyl jsem si jist. S jistotou to mohu tvrdit teprve teď, když vidím, že silnice zde nekončí.“

Příklad 16. Součin dvou „malých“ čísel je „malý“, neboli $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \implies xy \rightarrow 0$.

Příklad 17. Podíl dvou „malých“ čísel může být libovolný.

Příklad 18. Jakých hodnot nabývá funkce

$$F(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

pro „malé“ hodnoty argumentů? Zkusme se blížit k počátku po různých přímkách (zadaných parametrem $t \in \mathbb{R}$ tak, že počátku odpovídá $t = 0$):

- $x = t, y = 0$: $\lim_{t \rightarrow 0} F(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$,
- $x = 0, y = t > 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 1 = 1$,
- $x = 0, y = -t < 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(0, -t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} -1 = -1$,
- $x = t, y = t > 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $x = at, y = bt, t > 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} F(at, bt) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$
(předpokládáme $a \neq 0 \vee b \neq 0$).

Limity podél každé z těchto polopřímek existují (dokonce jsou to limity konstantních funkcí), ale jsou různé, proto nemůžeme definovat limitu funkce F v počátku. (Jak je u limit obvyklé, není podstatné, zda a jak je funkce definována v bodě, v němž zkoumáme limitu.)

Příklad 19. Jakých hodnot nabývá pro „malé“ hodnoty argumentů funkce

$$g(x, y) = \frac{y^2}{x},$$

definovaná pro $x > 0$? Zkusme se blížit k počátku po různých polopřímkách (zadaných parametrem $t \in \mathbb{R}$ tak, že počátku odpovídá $t = 0$, s ohledem na definiční obor potřebujeme limity zprava):

- $x = t > 0, y = 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} 0 = 0$,
- $x = t > 0, y = t$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t = 0$,
- $x = t > 0, y = bt$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t, bt) = \lim_{t \rightarrow 0^+} b^2 t = 0$.

Vše se zdá v pořádku a chtěli bychom definovat limitu funkce g v počátku jako 0. Ale blížíme-li se k němu např. po parabole,

- $x = t^2, y = t$: $\lim_{t \rightarrow 0} g(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} 1 = 1$,

což je v rozporu s předchozími, takže ani zde není limita v počátku definována.

2.1.1 Definice limity a spojitosti

Záměrem je definovat limitu pouze v případě, že dostaneme stejný výsledek, ať se blížíme k bodu „libovolným způsobem“. Předchozí příklad ukazuje, že možných cest je mnoho.

Definice 20. Funkce $F: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$, má v **hromadném** bodě \mathbf{b} definičního oboru D **limitu** u , jestliže ke každému okolí $U(u)$ existuje prstencové okolí $P(\mathbf{b})$, které se celé zobrazuje do $U(u)$; přesněji $\forall \mathbf{x} \in P(\mathbf{b}) \cap D: F(\mathbf{x}) \in U(u)$. Značíme $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}} F(\mathbf{x}) = u$.

Funkce F se nazývá **spojitá v bodě** \mathbf{b} , jestliže v něm má limitu rovnou své funkční hodnotě. Funkce F se nazývá **spojitá** na množině $A \subseteq D$, jestliže je spojitá v každém bodě množiny A .

Hovořit o limitě a spojitosti v bodě, který není hromadným bodem definičního oboru, by nemělo význam.

Hledání limity funkce více proměnných nelze rozložit na hledání limit podle jednotlivých proměnných. Pokud existuje limita

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,c)} F(x, y),$$

pak se rovná limitám

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow c} F(x, y), \quad \lim_{y \rightarrow c} \lim_{x \rightarrow a} F(x, y),$$

ale obrácená implikace neplatí, viz příklad 18.

2.1.2 Příklady

Příklad 21. Spojitost součinu z příkladu 16 v bodě $(0, 0)$ lze prokázat následovně: Pro libovolné $\varepsilon > 0$ máme najít takové okolí, v němž funkční hodnoty patří do $U_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Stačí zvolit $\delta \leq \varepsilon, \delta < 1$; pak pro $(x, y) \in P_\delta(0, 0)$ hodnota součinu splňuje požadované nerovnosti

$$\begin{aligned} xy &< \delta^2 < \delta \leq \varepsilon, \\ xy &> -\delta^2 > -\delta \geq -\varepsilon. \end{aligned}$$

(Stačilo $\delta^2/2 \leq \varepsilon$, tj. $\delta \leq \sqrt{2\varepsilon}$, ale podstatné je, že existuje $\delta > 0$ takové, abychom byli schopni garantovat, že pro $(x, y) \in P_\delta(0, 0)$ platí $xy \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.)

Příklad 22. Nespojitosť funkce

$$g(x, y) = \frac{y^2}{x}$$

z příkladu 19 lze prokázat následovně: Pro libovolné $\delta > 0$, lze najít $\eta > 0$ tak malé, že $(\eta, 0), (\eta^2, \eta) \in P_\delta(0, 0)$. Funkční hodnoty v těchto bodech jsou

$$g(\eta, 0) = 0, \quad g(\eta^2, \eta) = 1.$$

Tyto hodnoty nemohou být společně v okolí o poloměru menším než $1/2$. Navíc např. v bodě (η^3, η) (který také patří do $P_\delta(0, 0)$, zvolíme-li η dostatečně malé) je $g(\eta^3, \eta) = 1/\eta$, což může být libovolně velké číslo.

Příklad 23. Máme vyšetřit limitu funkce

$$F(x, y) = \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

v bodě $(0, 0)$. Je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru, $\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$. Po úpravě

$$F(x, y) = 1 + 2x \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Pro $y = 0, x \neq 0$ je $F(x, 0) = 1$.

Pro $y \neq 0$ lze upravit

$$F(x, y) = 1 + 2x \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + 1}.$$

Jelikož

$$0 < \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + 1} \leq 1,$$

po vynásobení $2x$ je

$$\begin{aligned} -2|x| &\leq 2x \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + 1} \leq 2|x|, \\ 1 - 2|x| &\leq F(x, y) = 1 + 2x \frac{1}{\frac{x^2}{y^2} + 1} \leq 1 + 2|x|, \end{aligned}$$

všechna $(x, y) \in P_\delta(0, 0)$ splňují

$$1 - 2\delta \leq F(x, y) \leq 1 + 2\delta$$

a stačí zvolit $\delta < \varepsilon/2$, abychom zajistili $F(x, y) \in U_\varepsilon(1)$; proto

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} F(x, y) = 1.$$

2.1.3 Limita a spojitost vektorové funkce

Definice limity a spojitosti zůstávají beze změny i pro vícerozměrný případ, tedy pro zobrazení $F: D \rightarrow \mathbb{R}^k$, neboť vycházejí pouze z pojmu okolí, použitelného nezávisle na dimenzi.

Tvrzení 24. Zobrazení $F = (F_1, \dots, F_k): D \rightarrow \mathbb{R}^k, D \subseteq \mathbb{R}^n$, má v **hromadném** bodě \mathbf{b} definičního oboru D limitu $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{R}^k$, právě když $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}} F_m(\mathbf{x}) = u_m$ pro všechna $m = 1, \dots, k$.

Zobrazení F je **spojité** v bodě \mathbf{u} , právě když jsou spojitě všechny jeho složky.

Limity a spojitost mají obvyklé vlastnosti známé pro funkce jedné proměnné, zejména:

Tvrzení 25. Složením spojitých zobrazení dostaneme spojitě zobrazení.

Zejména při hledání extrémů bude výhodou, pokud se zajímáme jen o **omezené uzavřené** množiny. (V obecnějších prostorech se potřebná vlastnost nazývá **kompaktnost**.)

Tvrzení 26. Obor hodnot spojitě zobrazení na **omezené uzavřené** množině je omezená uzavřená množina. Pokud je takové zobrazení prosté, je i inverzní zobrazení spojitě.

Důsledek 27. Spojitá funkce nabývá na **omezené uzavřené** množině maxima a minima.

Důležitý je následující příklad:

Příklad 28. Pro každý bod $(x, y) \neq (0, 0)$ jsou jednoznačně definovány jeho **polární souřadnice** $(r(x, y), \varphi(x, y))$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ a $\varphi(x, y)$ je jediný úhel z $(0, 2\pi)$ takový, že $x = r(x, y) \cdot \cos \varphi(x, y)$, $y = r(x, y) \cdot \sin \varphi(x, y)$. (Pro výpočet tohoto úhlu nestačí vzorec $\varphi(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, je nutno ošetřit znaménka a nulové hodnoty.) Převod z kartézských do polárních souřadnic popisuje vektorová funkce $\mathbf{F} = (r, \varphi) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, \infty) \times (0, 2\pi)$. (Máme-li ji dodefinovat i v bodě $(0, 0)$, první složka bude nulová a na druhé nezáleží.) Funkce \mathbf{F} , stejně jako funkce $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, 2\pi)$, je spojitá všude kromě bodů na polopřímce $(0, \infty) \times \{0\}$.

To je špatná zpráva pro robotiku, neboť z mechanického hlediska se snáze realizuje otočný pohyb než posuvný, takže pro pohyb ramene robotu se běžně užívají souřadnice polární nebo ještě složitější, založené více na úhlech než délkách. Jelikož se tím nutně zavede nespojitost v oboru, který nás zajímá, programování pohybu robotu naráží na problémy. Navíc inverzní zobrazení (ze souřadnic robotu do kartézských souřadnic scény) je nespojité, což vyžaduje velké akční zásahy i v některých případech, kdy pohyb ramene je minimální.

Řešení. Nyní zbývá rozřešit úvahu z příkladu 15. Silnice, na níž byli naši hrdinové, je připevněna ke svisté severní skalní stěně. Ta tvoří nespojitost, takže lze ze západu dojít do jiného místa než z východu – liší se výškou. Protože DW odešel z vily směrem do kopce, nemůže být vila pod nimi (tam by navíc nejspíš byla vidět), je tedy nad nimi na skále. Návštěvník, který by ji opustil směrem na sever, by dopadl do místa, kde naši průvodci stojí, neboť silnice pokračuje na západ. Kdyby zde končila svahem, bylo by možné po něm sestoupit (alespoň z blízkého bodu), nicméně nespojitost zůstává jediným vysvětlením, proč naši hrdinové nedošli k vile.¹

Příklad 29. Najděte nějakou funkci, jejíž průběh odpovídá poslední zmíněné variantě z předchozího řešení.

Řešení. Jednou z možností je funkce $\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow (0, 2\pi)$ z příkladu 28. Pokud bychom chtěli přesnější analogii, dodefinovali bychom chybějící hodnotu $\varphi(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x, 0) = \pi$ a umístili tam vilu. Aby na jih (ve směru záporné osy y) byl kopec, můžeme přičíst lineární funkci,

$$F(x, y) = \varphi(x, y) - cy,$$

kde $c > 0$, nebo předefinovat funkci v celé polorovině, např.

$$g(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & \text{pro } y \geq 0, \\ \pi - cy & \text{pro } y < 0. \end{cases}$$

¹Tento příklad je inspirován autorovou osobní zkušeností na známém místě. Protože však osoba SH bývá vždy obestřena tajemstvím, ani o tomto místě další podrobnosti neuvádíme.

3 Derivace funkcí více proměnných

3.1 Jak značit derivace aneb co nás učí počítače

Než se pustíme do zobecnování derivací na funkce více proměnných, je třeba vyjasnit častý problém se značením.

Výsledkem sporů Newtona s Leibnizem je, že nemáme vyhovující značení derivace. Teprve počítačová algebra nás nutí k přesnému vyjadřování. Musíme např. rozlišovat mezi **výrazem** $\ln(x^2 + 4)$, **funkcí** $F: x \mapsto \ln(x^2 + 4)$ a **funkční hodnotou** $F(x) = \ln(x^2 + 4)$ (což je opět výraz). Zatímco $\ln(y^2 + 4)$ označuje **jiný výraz** (formuli s jinou proměnnou y), $G: y \mapsto \ln(y^2 + 4)$ je stále **stejná funkce** (proměnná y je v její definici lokální a slouží jen k vyjádření funkčního předpisu). Historicky se vžil zápis funkce $F(x) = \ln(x^2 + 4)$ místo $F: x \mapsto \ln(x^2 + 4)$. Není korektní, hovoříme-li o funkci $\ln(x^2 + 4)$. Nápadnější to je, pokud zavedeme další, **globální** proměnnou, např. místo 4 bude konstanta a . Můžeme psát $F(x) = \ln(x^2 + a)$ nebo $F: x \mapsto \ln(x^2 + a)$; je zřejmé, že se jedná o funkci jedné proměnné, označené x . Kdybychom chtěli hovořit o funkci $\ln(x^2 + a)$, nebylo by tím řečeno, zda proměnnou je x , a nebo obě.

Na obhajobu Leibnize je nutno říci, že např. ve fyzice často nevíme, na jakých proměnných fyzikální veličina závisí, takže je těžké předem stanovit i odpovídající počet proměnných.

3.1.1 Leibnizova (a Newtonova) notace

Definice 30. Mějme funkci $F: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Její **derivace** v bodě $x \in D$ je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

(pokud existuje).

Jmenovatel h lze chápat jako přírůstek dx nezávisle proměnné x , čitatel jako odpovídající přírůstek dF závisle proměnné F (nebo $F(x)$). Tyto přírůstky mají být „nekonečně malé“, zajímá nás jejich poměr.

V **Leibnizově notaci** se derivace značí

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{dF}{dx}(x) = \frac{d}{dx}F(x).$$

Lze ji chápat také jako předpis pro výpočet derivace v mnoha bodech definičního oboru, tedy funkci

$$\frac{dF}{dx}: D_d \rightarrow \mathbb{R},$$

kde $D_d \subseteq D$ je definiční obor derivace. V **Newtonově notaci** se tato funkce značí F' .

Leibnizova notace nemá problém, dokud nechceme vyhodnotit derivaci v konkrétním bodě. Nechť např. $F = \ln$. Pak

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Chceme-li tuto derivaci vyhodnotit v bodě 2, nelze použít zápisy

$$\frac{d}{dx}\ln 2 = (\ln 2)',$$

které znamenají derivaci konstanty $\ln 2$, výsledek je 0. Nepomůže ani zápis

$$\frac{d \ln}{dx}(2),$$

protože derivujeme podle proměnné x , která se nikde dále nevyskytuje. V Leibnizově notaci by korektní zápis byl neohrabaný:

$$\left. \frac{d}{dx} \ln x \right|_{x=2} = \frac{1}{2}.$$

Newtonova notace dovoluje zavést funkci $\ln': x \mapsto \frac{1}{x}$ a psát $\ln'(2) = \frac{1}{2}$. Bohužel nedovoluje vhodné zobecnění na funkci více proměnných, kdy nemáme jak rozlišit, podle které proměnné derivujeme.

3.1.2 Operátorová notace

Možným řešením tohoto dilematu je **operátor derivování** D . Operátor zobrazuje funkci na funkci (zde na derivaci argumentu). Tedy derivací funkce F je funkce $D(F) = F'$ a její hodnoty značíme standardně:

$$D(F)(x) = F'(x) .$$

Pro jednodušší zápis zde vynecháváme závorky a předpokládáme, že operátor D má přednost před vyhodnocením funkce, tj.

$$DF(x) = D(F)(x) = (D(F))(x) .$$

Můžeme např. psát

$$D \ln(2) = \frac{1}{2} .$$

Zde používáme operátorovou notaci, a dle možnosti i ostatní tam, kde je to korektní. Je to možná nezvyk, ale ušetří nás nesnází, které jsou v učebnicích těžko vysvětlovány slovy. Umožní nám správné použití počítačových algebraických systémů.

Maple[®] má implementovanou jak Leibnizovu notaci pro derivování **výrazů** ve tvaru `diff(vyraz,x)`, tak operátor derivování ve tvaru `D(funkce)(x)`. *Mathematica*[®] podporuje Newtonovu notaci ve tvaru `funkce'`, nikoli však operátorovou.

3.2 Parciální derivace

Příklad 31. Máme vypočítat $v = \sqrt{999 \cdot 4002}$. *SH*: „Řeknu-li, že výsledek je přibližně 1999.5, nemýlím se víc než o jednu tisícinu.“ *DW* po chvíli potvrzuje, že $v \doteq 1999.499437$, *SH* se mýlil jen o 0.000563.

3.2.1 Pojem parciální derivace a gradientu

Z n proměnných funkce F z \mathbb{R}^n do \mathbb{R} zafixujeme („zmrazíme“) všechny proměnné až na jednu. Dostaneme funkci jedné proměnné, kterou můžeme zkusit derivovat (podle jediné zbylé proměnné; s ostatními proměnnými nakládáme jako s konstantami).

Definice 32. *Parciální derivace* funkce $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ podle k -té proměnné je

$$D_k F(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1, \dots, x_k + h, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{h}$$

(pokud existuje).

Pro jednodušší zápis předpokládáme, že operátor D_k má přednost před vyhodnocením funkce, tj.

$$D_k F(x_1, \dots, x_n) = (D_k F)(x_1, \dots, x_n) .$$

Alternativní značení:

$$\begin{aligned} D_k F &= \frac{\partial F}{\partial x_k} , \\ D_k F(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial F}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) , \\ D_1 F(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = F_x(x, y) , \\ D_2 F(x, y) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = F_y(x, y) . \end{aligned}$$

Příklad 33. V r. 2006 se na FEL ČVUT pedagogické výkony násobily koeficientem

$$k(z, u) = 1 + u \frac{5 - z}{2} ,$$

kde

$z \in \langle 1, 5 \rangle$ je známka z předmětu ve studentské anketě,

$u \in \langle 0, 1 \rangle$ je (celofakultní) účast studentů v anketě.

[Metodika KOMETA, <https://www.feld.cvut.cz/glance/zapisy/FImetodika.pdf>]

Cílem vzorce bylo zohlednit kvalitu výuky a přihlédnout přitom k účasti studentů, neboť při nulové účasti studentů se žádná korekce neprovádí. Jelikož funkce k je lineární v obou proměnných (říkáme, že je **bilineární**), snadno vypočítáme parciální derivace, které vyjadřují její citlivost na malé změny proměnných. Dosazením skutečných hodnot z ankety za zimní semestr 2006/07, $z_s = 1.61$, $u_s = 0.31$, dostaneme

$$D_1 k(z_s, u_s) = \left. \frac{\partial k(z, u)}{\partial z} \right|_{z=z_s, u=u_s} = -\frac{u_s}{2} = -0.155,$$

$$D_2 k(z_s, u_s) = \left. \frac{\partial k(z, u)}{\partial u} \right|_{z=z_s, u=u_s} = \frac{5 - z_s}{2} = 1.695.$$

Z toho je vidět, že výsledek je více než $10\times$ citlivější na změnu účasti v anketě než na změnu známky, takže nevyjadřuje to, co bylo jeho cílem. Např. změna známky o 0.1 ovlivní výsledek méně, než změna účasti studentů v anketě o 1%.

Často chceme pracovat se všemi parciálními derivacemi, proto zavádíme následující pojem:

Definice 34. Vektor všech parciálních derivací se nazývá **gradient**, $\text{grad } F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= (D_1 F, \dots, D_n F), \\ \text{grad } F(x_1, \dots, x_n) &= (D_1 F(x_1, \dots, x_n), \dots, D_n F(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right). \end{aligned}$$

Alternativní značení: ∇F (čteme „nabla“).

Gradient je tedy funkce, jejíž hodnotou je vektor (stejně dimenze jako definiční obor). Z fyzikální analogie se takovému zobrazení říká též **vektorové pole** a reálná funkce více proměnných se nazývá **skalární pole**.

3.3 Směrová derivace

Příklad 35. DW: Milý příteli, ze svého venkovského sídla máte jistě krásný výhled na východy slunce, když stojí na svahu, že? SH: Ano, směrem na východ svah strmě klesá se sklonem 10%. DW: Já myslel, že je to jižní stráň. SH: Nikoli, ale i na jih mírně klesá, se sklonem 5%. DW: Takže když se vydáte na bicyklu do Yorku, směrem na jihovýchod, sjíždíte z nebezpečného kopce se sklonem 7.5%. SH: Je to ještě horší, milý příteli! DW: Pardon, to bylo ode mě hloupé opomenutí. Svah ovšem není skloněn ani přesně k jihovýchodu. Určit sklon silnice do Yorku z uvedených dat není triviální, ale je to možné. SH: Opravdu?

Co zpochybnul SH poslední otázkou?

Známe sklon (parciální derivace) ve dvou směrech, cílem je určit sklon (derivaci) v jiném směru. Stejnou otázku můžeme klást v libovolné dimenzi a dospíváme k následujícímu pojmu:

Definice 36. **Směrová derivace** funkce $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve směru $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ je funkce $D_{\mathbf{v}} F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$D_{\mathbf{v}} F(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - F(\mathbf{x})}{t}$$

(pokud existuje).

Opět předpokládáme, že operátor $D_{\mathbf{v}}$ má přednost před vyhodnocením funkce, tj.

$$D_{\mathbf{v}} F(\mathbf{x}) = (D_{\mathbf{v}} F)(\mathbf{x}).$$

Alternativní značení:

$$\partial_{\mathbf{v}} F, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}.$$

Směrová derivace má následující názorný význam: Pokud $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vyjadřuje výšku terénu, $t \in \mathbb{R}$ čas, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ polohu pro $t = 0$ a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ rychlost pohybu (vektorovou, v projekci do vodorovných souřadnic), pak $D_{\mathbf{v}} F(\mathbf{x})$ určuje vertikální rychlost. Ta je úměrná velikosti rychlosti, $\|\mathbf{v}\|$, takže pro $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ je nulová. Obecně

$$D_{a\mathbf{v}} F(\mathbf{x}) = a D_{\mathbf{v}} F(\mathbf{x})$$

pro všechna $a \in \mathbb{R}$. Proto nás často zajímá směrová derivace ve směru určeném **jednotkovým** vektorem. Ta v našem příkladu udává sklon svahu (přesněji tangens vertikálního úhlu tečny ve směru \mathbf{v}).

Parciální derivace jsou vlastně derivace ve směru (kladných) souřadných os, tedy speciální případ směrových derivací. To nás opravňuje k tomu, že jsme pro směrovou derivaci zavedli téměř stejné značení, $D_{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, jako pro parciální derivaci, D_k , $k \in \mathbb{N}$. Rozdíl je jen v tom, zda indexujeme vektorem nebo přirozeným číslem (určujícím odpovídající vektor báze).

K nejasnosti by došlo jen tehdy, kdybychom chtěli používat směrové derivace v jednorozměrném prostoru, ale ty nepotřebujeme, neboť tam existuje jediný směr (až na znaménko) a jedná se o normální derivace funkce jedné proměnné. Přesněji (po substituci $u = th$)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{F(x + u) - F(x)}{\frac{u}{h}} = h DF(x) = h F'(x).$$

Pro výpočet směrové derivace potřebujeme jen hodnoty na přímkce s parametrizací $p(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, a ty lze vyjádřit jako funkci f jediné proměnné, kterou je parametr t :

$$f(t) = F(\mathbf{x} + t\mathbf{v}), \\ D_{\mathbf{v}} F(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - F(\mathbf{x})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = Df(0) = f'(0).$$

Tím jsme výpočet směrové derivace převedli na derivaci funkce jedné proměnné.

Důsledkem je, že směrová derivace má všechny vlastnosti derivace funkce jedné proměnné, zejména:

$$D_{\mathbf{v}}(aF + bG) = aD_{\mathbf{v}}F + bD_{\mathbf{v}}G, \\ D_{\mathbf{v}}(FG) = GD_{\mathbf{v}}F + FD_{\mathbf{v}}G, \\ D_{\mathbf{v}}\left(\frac{F}{G}\right) = \frac{GD_{\mathbf{v}}F - FD_{\mathbf{v}}G}{G^2},$$

kde $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ a poslední vztah lze použít jen tam, kde je funkce G nenulová. Stejně vztahy platí i pro parciální derivace.

Později se naučíme počítat směrové derivace i bez převodu na funkci jedné proměnné, který sice není obtížný, ale bývá zdrojem chyb.

Příklad 37. *Vyjasníme příklad 35 o sklonu svahu. Nechť kladná osa x směřuje na východ a y na sever, počátek zvolíme pro jednoduchost ve výchozím bodě (venkovském sídle SH). Jednotkový vektor v jihovýchodním směru je $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$. Známé sklony ve směru souřadných os jsou parciální derivace výšky terénu F ,*

$$D_1 F(0, 0) = \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} = -0.1, \\ D_2 F(0, 0) = \left. \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right|_{x=0, y=0} = 0.05.$$

Derivace ve směru \mathbf{v} je

$$D_{\mathbf{v}} F(0, 0) = \frac{-0.1}{\sqrt{2}} - \frac{0.05}{\sqrt{2}} \doteq -0.106.$$

Může být překvapivé, že je to jen o málo strmější než ve směru na východ.

V rovině je směr určen jediným úhlem $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ (měřeným od kladné poloosy x směrem ke kladné poloose y atd.). Směrová derivace odpovídající jednotkovému vektoru $\mathbf{e}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ve směru φ je

$$D_{\mathbf{e}(\varphi)} F = (D_1 F) \cdot \cos \varphi + (D_2 F) \cdot \sin \varphi.$$

Podobně v třírozměrném prostoru lze libovolný směr určit třemi úhly $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi \rangle$ (které daný směr svírá po řadě s kladnými poloosami x, y, z). Směrová derivace odpovídající jednotkovému vektoru $\mathbf{e}(\alpha, \beta, \gamma) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ je

$$D_{\mathbf{e}(\alpha, \beta, \gamma)} F = (D_1 F) \cdot \cos \alpha + (D_2 F) \cdot \cos \beta + (D_3 F) \cdot \cos \gamma.$$

Z funkce jedné proměnné jsme zvyklí, že spojitá funkce nemusí mít derivaci, ale má-li funkce v bodě derivaci, musí v něm být spojitá. Stačí nám k tomu u funkcí více proměnných existence parciálních derivací, nebo potřebujeme všechny směrové derivace? Kupodivu to je vše málo:

Příklad 38. [Hamhalter, Tišer: Dif. p.] Mějme funkci

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y = x^2, x \neq 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Ta nabývá nenulových hodnot (vesměs 1) podél paraboly s rovnicí $y = x^2$. Podél této paraboly, stejně jako v počátku $(0, 0)$, je nespojitá. Nicméně všechny její směrové derivace v počátku jsou nulové, neboť podél každé přímky procházející počátkem je nulová s výjimkou nejvýše jednoho bodu, který je v nenulové vzdálenosti od počátku.

Vidíme, že ani všechny směrové derivace nedávají dostatečnou informaci o chování funkce v okolí bodu, budeme potřebovat silnější pojem.

3.4 Totální diferenciál

Doporučená literatura: [Hamhalter, Tišer: Dif. p., kap. 1],
nedoporučená: [Ayres, Mendelson].

Příklad 39. DW: „Teď už chápu, v jaké krajině máte své venkovské sídlo. Předpokládám, že na bicyklu jezdíte směrem přibližně jihojihozápadním, po vrstevnici.“ SH: „Ano, přesně tak.“ DW: „Nebo naopak severoseverovýchodním.“ SH: „Co vás nemá, příteli! To nejde!“ DW: „Ale vždyť podle mapy je tam cesta, tedy žádná houština nebo močál.“ SH: „V této mapě nejsou vyznačeny vrstevnice, takže nevidíte, jak strmá je to cesta.“ DW: „Myslel jsem, že je také téměř vodorovná! Kde jsem udělal chybu?“

Motivací pro další pojmy je **linearizace** funkce, tj. její přibližná náhrada lineární funkcí v okolí nějakého bodu.

Poznámka 40. Bohužel, pojem **lineární** má odlišný význam v matematické analýze a v lineární algebře. V matematické analýze je to funkce, jejíž graf je přímka (v jedné proměnné), rovina (ve dvou proměnných) atd. V lineární algebře se navíc požaduje, aby nulový vektor byl zobrazen na nulový, tj. aby graf procházel počátkem, po přičtení nenulové konstanty se již funkce nepovažuje za lineární. To má dobrý motiv: Lineární funkce jsou ty, které **zachovávají lineární kombinace**, tj.

$$F(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aF(\mathbf{x}) + bF(\mathbf{y})$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pojem používaný v matematické analýze se přesněji označuje **afinní** funkce [Hamhalter, Tišer: Int. p.], neboť **zachovávají afinní kombinace**, tj.

$$F(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aF(\mathbf{x}) + bF(\mathbf{y})$$

pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a + b = 1$.

Stejně jako v jedné dimenzi umožňuje derivace vyjádřit rovnici tečny ke grafu funkce, lze ve dvou dimenzích vyjádřit tečnou rovinu, v obecné dimenzi tečnou nadrovinu. Důležitý rozdíl je v tom, že tato aproximace nemusí být dobrá ani v případě existence parciálních derivací, jak jsme viděli v příkladech 49 a 3.4. Je tedy důležité vědět, kdy je linearizace v okolí bodu použitelná.

Řešení (příkladu 31). Funkce

$$F(x, y) = \sqrt{xy}$$

se má vyhodnotit v bodě $(999, 4002)$. Snadno se počítá v blízkém bodě $F(1000, 4000) = 2000$. V jeho okolí lze použít linearizaci pomocí parciálních derivací

$$D_1F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}},$$
$$D_2F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}},$$

pro $x \neq 0, y \neq 0$; jinak jsou nulové.

$$D_1F(1000, 4000) = 1,$$
$$D_2F(1000, 4000) = \frac{1}{4}.$$

$$F(999, 4002) \doteq 2000 - 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1999.5.$$

Ve skutečnosti SH uvažoval relativní chyby, první činitel se relativně zmenšil o tisícinu, druhý zvětšil o dvoutisícinu, součin se zvětšil zhruba o dvoutisícinu, odmocnina sníží relativní vliv na polovinu, tj. jednu čtyřtisícinu výsledku. Chyby druhého řádu se budou od chyb prvního řádu lišit podobně, jako chyby prvního řádu od výsledku, tj. budou zhruba tisíckrát menší.

SH by tento postup nepoužil v okolí bodu $(0, 0)$, kde

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0, \\ D_1 F(0, 0) &= D_2 F(0, 0) = 0, \end{aligned}$$

takže linearizace by vycházela nulová, zatímco např.

$$F(1, 2) = \sqrt{2} \doteq 1.414.$$

Zdůvodnění, proč zde linearizace selhává, vyžaduje následující pojem. Budeme požadovat, aby odchylka od náhrady afinní funkcí klesala se vzdáleností „rychleji, než vzdálenost“, a to ve smyslu konvergence v \mathbb{R}^n .

Definice 41. Nechť $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Pokud existuje lineární funkce $d_{\mathbf{b}}F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|F(\mathbf{b} + \mathbf{v}) - F(\mathbf{b}) - d_{\mathbf{b}}F(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|} = 0, \quad (5)$$

pak je jediná a nazývá se **totální** (neboli **úplný**) **diferenciál** funkce F v bodě \mathbf{b} . V tom případě říkáme, že funkce F **má diferenciál** (neboli je **diferencovatelná**) v bodě \mathbf{b} .

Opět předpokládáme, že operátor $d_{\mathbf{b}}$ má přednost před vyhodnocením funkce, tj.

$$d_{\mathbf{b}}F(\mathbf{x}) = (d_{\mathbf{b}}F)(\mathbf{x}).$$

Alternativní značení [Hamhalter, Tišer: Dif. p.]:

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{b}}F &= DF(\mathbf{b}), \\ d_{\mathbf{b}}F(\mathbf{x}) &= DF(\mathbf{b})[\mathbf{x}]. \end{aligned}$$

(Zde vidíte opět problémy s rozlišením funkce od funkční hodnoty; ty jsou ještě vážnější u často používaného značení dF [Ayres, Mendelson].)

Norma v čitateli v (5) se v jednorozměrném případě redukuje na absolutní hodnotu. Stejnou definici (s normou) lze použít i pro diferenciál vektorové funkce $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (v čitateli je pak norma místo absolutní hodnoty). Má-li funkce F v bodě \mathbf{b} diferenciál, pak ten je tak dobrou lineární aproximací, že

$$F(\mathbf{b} + \mathbf{v}) - F(\mathbf{b}) = d_{\mathbf{b}}F(\mathbf{v}) + \varepsilon(\mathbf{v}),$$

kde funkce $\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ klesá v počátku $\mathbf{0}$ k nule „rychleji než lineárně“ v následujícím smyslu:

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|\varepsilon(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|} = 0.$$

Kromě toho $d_{\mathbf{b}}F(\mathbf{0}) = 0$.

Nyní už můžeme předejít situaci z příkladu 38:

Věta 42. Nechť $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže je funkce F v bodě \mathbf{b} diferencovatelná, pak je v něm spojitá a má všechny směrové derivace, a to

$$D_{\mathbf{v}}F(\mathbf{b}) = d_{\mathbf{b}}F(\mathbf{v}) = v_1 D_1 F + \dots + v_n D_n F = \mathbf{v} \bullet \text{grad } F(\mathbf{b}).$$

Důkaz. Pro $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{F(\mathbf{b} + t\mathbf{v}) - F(\mathbf{b})}{t} - d_{\mathbf{b}}F(\mathbf{v}) \right| = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|F(\mathbf{b} + t\mathbf{v}) - F(\mathbf{b}) - d_{\mathbf{b}}F(t\mathbf{v})|}{\|t\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 0. \end{aligned}$$

□

To znamená, že směrové derivace lze určit z diferenciálu, a ten je dán parciálními derivacemi. Jejich znalost stačí, ale pouze pro **diferencovatelné** funkce.

Důsledek 43. Pro diferencovatelné funkce gradient udává velikost a směr nejrychlejšího růstu funkce v daném bodě.

Důkaz. Hodnota $\mathbf{v} \bullet \text{grad } F(\mathbf{b})$ je maximální, pokud jsou vektory \mathbf{v} , $\text{grad } F(\mathbf{b})$ rovnoběžné. □

Příklad 44. Pokračujme v příkladu 35. Ptáme se, kterým směrem je svah skloněn a jaký je jeho sklon. Obojí poznáme z gradientu

$$\text{grad } v(0, 0) = (D_1 v(0, 0), D_2 v(0, 0)) = (-0.1, 0.05).$$

Jeho velikost je

$$\|\text{grad } v(0, 0)\| = \sqrt{(-0.1)^2 + 0.05^2} \doteq 0.112 = 11.2\%,$$

jednotkový vektor ve směru gradientu je

$$\frac{\text{grad } v(0, 0)}{\|\text{grad } v(0, 0)\|} \doteq \frac{(-0.1, 0.05)}{0.112} \doteq (-0.893, 0.446).$$

Gradient je orientován ve směru nejrychlejšího **růstu** a zde je to něco mezi severozápadem a západem, v úhlu přibližně $2.678 \text{ rad} \doteq 153.4^\circ$ od východu, což je azimut 296.6° .

Tvrzení 45. Má-li funkce v bodě spojité všechny parciální derivace, má v něm diferenciál.

Řešení. (příkladu z počátku kapitoly) Na severovýchod od sídla se zvedá strmý skalnatý svah. Parciální derivace toto nepostihují. Jejich použití směrem na jih vycházelo, neboť tam lze terén popsat nakloněnou rovinou, ale z toho nic nevyplývá o směrových derivacích v jiných směrech, ani o jejich existenci. Ve zkoumaném bodě **neexistuje diferenciál** výšky v .

3.4.1 Aplikace parciálních derivací

Parciální derivace nám dovolují např. odhadnout, jak chyba v jedné proměnné ovlivní výsledek výpočtu. Je-li chyba malá, můžeme v jejím Taylorově rozvoji zanedbat chyby členy vyšších řádů a chyba výsledku bude úměrná chybě vstupní proměnné, přičemž koeficient úměrnosti je právě parciální derivace podle této proměnné.

Příklad 46. Obsah trojúhelníka lze stanovit z délek jeho stran a, b, c podle **Heronova vzorce**

$$S(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

kde

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

je polovina obvodu, po dosazení

$$S(a, b, c) = \frac{1}{4} \sqrt{(b-a+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}.$$

Citlivost na změnu Δa v proměnné a charakterizuje parciální derivace

$$D_1 S(a, b, c) = \frac{\partial}{\partial a} S(a, b, c) = \frac{(b^2 - a^2 + c^2) a}{8 S(a, b, c)},$$

$$S(a + \Delta a, b, c) \doteq S(a, b, c) + \Delta a \cdot D_1 S(a, b, c),$$

obdobně pro ostatní proměnné,

$$D_2 S(a, b, c) = \frac{\partial}{\partial b} S(a, b, c) = \frac{(a^2 - b^2 + c^2) b}{8 S(a, b, c)},$$

$$D_3 S(a, b, c) = \frac{\partial}{\partial c} S(a, b, c) = \frac{(a^2 + b^2 - c^2) c}{8 S(a, b, c)}.$$

Konkrétně pro $a = 13 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$, $c = 15 \text{ cm}$ dostaneme

$$S(13, 14, 15) = 84 \text{ cm}^2,$$
$$D_1 S(13, 14, 15) = \frac{39}{8} = 4.875 \text{ cm},$$

což znamená, že chyba $\Delta a = 0.13 \text{ cm}$, tj. o 1%, způsobí chybu výsledku přibližně o

$$\Delta a \cdot D_1 S(13, 14, 15) = 0.13 \cdot 4.875 = 0.63375 \text{ cm}^2,$$

relativní chybu $\frac{0.634}{84} \doteq 0.75\%$. Skutečná hodnota

$$S(13.13, 14, 15) \doteq 84.63 \text{ cm}^2$$

je v dobrém souladu s odhadem.

Pro $a = 28 \text{ cm}$ bychom však dostali

$$S(28, 14, 15) = \frac{9}{4}\sqrt{551} \doteq 52.815 \text{ cm}^2,$$
$$D_1 S(28, 14, 15) = -\frac{1694}{1653}\sqrt{551} \doteq -24.056 \text{ cm},$$

takže chyba $\Delta a = 0.13 \text{ cm}$, tj. o méně než 0.5%, způsobí chybu výsledku přibližně o

$$\Delta a D_1 S(28, 14, 15) \doteq 0.13 \cdot (-24.056) \doteq -3.1273 \text{ cm}^2,$$

Skutečná hodnota

$$S(28.13, 14, 15) \doteq 49.548 \text{ cm}^2$$

je v dobrém souladu s odhadem

$$S(28, 14, 15) + \Delta a \cdot D_1 S(28, 14, 15) \doteq 52.815 - 3.1273 \doteq 49.688 \text{ cm}^2.$$

V tomto případě je však relativní chyba $\frac{-3.1273}{52.815} \doteq -5.9\%$, narostla více než 10×. Pro tupouhlé trojúhelníky je Heronův vzorec velmi nepřesný, což je škoda, protože se jako jediný obejde bez měření úhlů i bez dalších konstrukcí, např. stanovení výšky trojúhelníka. (Povšimněte si též fyzikálních rozměrů jednotlivých veličin.)

V předchozím příkladu bychom mohli klást přirozenou otázku, jak se změní výsledek při malých změnách všech vstupních veličin. Bude to součet vlivů jednotlivých veličin?

Příklad 47. Pokračujme v příkladu 46 (původní zadání s $a = 13 \text{ cm}$). Jak se změní obsah trojúhelníka, jestliže délky stran a, b, c změníme o $\Delta a = \Delta b = 0.1 \text{ cm}$, $\Delta c = -0.1 \text{ cm}$? Pomocí parciálních derivací dostaneme obecný odhad

$$S(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c) \doteq$$
$$\doteq S(a, b, c) + \Delta a \cdot D_1 S(a, b, c) + \Delta b \cdot D_2 S(a, b, c) + \Delta c \cdot D_3 S(a, b, c),$$

po dosazení

$$D_1 S(13, 14, 15) = \frac{39}{8} = 4.875 \text{ cm},$$
$$D_2 S(13, 14, 15) = \frac{33}{8} = 4.125 \text{ cm},$$
$$D_3 S(13, 14, 15) = \frac{25}{8} = 3.125 \text{ cm}$$

dostaneme odhad

$$S(13.1, 14.1, 14.9) \doteq S(13, 14, 15) + 0.1 \cdot \frac{39}{8} + 0.1 \cdot \frac{33}{8} - 0.1 \cdot \frac{25}{8} \doteq 84.588 \text{ cm}^2,$$

v poměrně dobré shodě se skutečnou hodnotou

$$S(13.1, 14.1, 14.9) \doteq 84.575 \text{ cm}^2.$$

Příklad 48. Odezvu tlumeného oscilátoru s amplitudou A a úhlovou frekvencí ω lze chápat jako funkci dvou proměnných, času t a časové konstanty τ :

$$F(t, \tau) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t,$$

pro konkrétní hodnoty $A = 3 \text{ V}$, $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$, $t = 0.5 \text{ s}$, $\tau = 0.1 \text{ s}$,

$$\begin{aligned} F(0.5, 0.1) &\doteq 5.7339 \times 10^{-3}, \\ D_1 F(0.5, 0.1) &\doteq 0.13650, \\ D_2 F(0.5, 0.1) &\doteq 0.28670. \end{aligned}$$

Pro změnu vstupních veličin $\Delta t = 0.001 \text{ s}$, $\Delta \tau = 0.002 \text{ s}$ dostaneme odhad

$$\begin{aligned} F(t + \Delta t, \tau + \Delta \tau) &\doteq F(t, \tau) + \Delta t \cdot D_1 F(t, \tau) + \Delta \tau \cdot D_2 F(t, \tau) \\ &\doteq 5.7339 \times 10^{-3} + 0.001 \cdot 0.13650 + 0.002 \cdot 0.28670 \doteq 6.4438 \times 10^{-3} \text{ V}, \end{aligned}$$

skutečná hodnota je

$$F(0.501, 0.102) \doteq 6.4742 \times 10^{-3} \text{ V}.$$

Pro $10\times$ větší změny $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, $\Delta \tau = 0.02 \text{ s}$ dostaneme odhad

$$\begin{aligned} F(t + \Delta t, \tau + \Delta \tau) &\doteq 5.7339 \times 10^{-3} + 0.01 \cdot 0.13650 + 0.02 \cdot 0.28670 \doteq \\ &\doteq 1.2833 \times 10^{-2} \text{ V}, \end{aligned}$$

zatímco skutečná hodnota je

$$F(0.51, 0.12) \doteq 1.6175 \times 10^{-2} \text{ V}.$$

Zde už je odhad nepřesný.

Příklad 49. Funkce

$$F(x, y) = x^2 + 2y + \sqrt{xy}$$

má pro $x \neq 0$, $y \neq 0$ parciální derivace

$$\begin{aligned} D_1 F(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = 2x + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}}, \\ D_2 F(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}}. \end{aligned}$$

Pro $x = 0$, resp. $y = 0$ je

$$\begin{aligned} D_2 F(0, y) &= \frac{\partial}{\partial y} F(0, y) = 2, \\ D_1 F(x, 0) &= \frac{\partial}{\partial x} F(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Zkusme aproximovat F v okolí bodu $(1, 2)$, kde

$$\begin{aligned} F(1, 2) &= \sqrt{2} + 5 \doteq 6.4142, \\ D_1 F(1, 2) &= 2 + \frac{1}{2} \sqrt{2} \doteq 2.7071, \\ D_2 F(1, 2) &= 2 + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \doteq 2.3536. \end{aligned}$$

Pro $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.2$:

$$F(1.1, 2.2) \doteq 6.4142 + 0.1 \cdot 2.7071 + 0.2 \cdot 2.3536 \doteq 7.1556,$$

ve skutečnosti

$$F(1.1, 2.2) \doteq 7.1656.$$

Zkusme aproximovat F v okolí bodu $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} F(0, 0) &= 0, \\ D_1 F(0, 0) &= 0, \\ D_2 F(0, 0) &= 2. \end{aligned}$$

Pro $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.2$:

$$F(0.1, 0.2) \doteq 0.1 \cdot 0 + 0.2 \cdot 2 = 0.4,$$

ve skutečnosti

$$F(0.1, 0.2) \doteq 0.55142,$$

což není příliš uspokojivý výsledek. Ani pro $100\times$ menší změny $\Delta x = 0.001$, $\Delta y = 0.002$ není relativní chyba podstatně menší:

$$\begin{aligned} F(0.001, 0.002) &\doteq 0.001 \cdot 0 + 0.002 \cdot 2 = 0.004, \\ F(0.001, 0.002) &\doteq 0.005415. \end{aligned}$$

3.5 Diferenciál a jacobíán vektorové funkce

Nechť $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_k)$ je funkce $D \rightarrow \mathbb{R}^k$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ je vnitřní bod jejího definičního oboru $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Pokud existuje lineární zobrazení $d_{\mathbf{b}}\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ takové, že

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{F}(\mathbf{b} + \mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{b}) - d_{\mathbf{b}}\mathbf{F}(\mathbf{v})\|}{\|\mathbf{v}\|} = 0,$$

pak je jediné a nazývá se **totální** (neboli **úplný**) **diferenciál** zobrazení \mathbf{F} v bodě \mathbf{b} . V tom případě říkáme, že zobrazení \mathbf{F} **má diferenciál** (neboli je **diferencovatelná**) v bodě \mathbf{b} , a platí

$$d_{\mathbf{b}}\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \underbrace{\begin{bmatrix} D_1 F_1(\mathbf{b}) & D_2 F_1(\mathbf{b}) & \cdots & D_n F_1(\mathbf{b}) \\ D_1 F_2(\mathbf{b}) & D_2 F_2(\mathbf{b}) & \cdots & D_n F_2(\mathbf{b}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 F_k(\mathbf{b}) & D_2 F_k(\mathbf{b}) & \cdots & D_n F_k(\mathbf{b}) \end{bmatrix}}_{J_{\mathbf{F}}(\mathbf{b})} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

kde matice $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{b})$ se nazývá **Jacobiho matice** zobrazení \mathbf{F} v bodě \mathbf{b} . Pomocí ní lze linearizaci v okolí bodu \mathbf{b} psát

$$\mathbf{F}(\mathbf{b} + \mathbf{v}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{b}) + d_{\mathbf{b}}\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{b}) + J_{\mathbf{F}}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{v}.$$

Je-li Jacobiho matice čtvercová, její determinant se nazývá **jacobián**.

Připomeňme, že jak Jacobiho matice, tak jacobián jsou funkcemi bodu v \mathbb{R}^n .

3.6 Parciální derivace vyšších řádů

Zavádíme je obdobně, např. 2. parciální derivace podle i -té proměnné je

$$\begin{aligned} D_{i,i}F(x_1, \dots, x_n) &= D_i D_i F(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_i F(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - D_i F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}. \end{aligned}$$

Můžeme také postupně parciálně derivovat podle různých proměnných, např.

$$\begin{aligned} D_{i,j}F(x_1, \dots, x_n) &= D_i D_j F(x_1, \dots, x_n) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_j F(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - D_j F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}. \end{aligned}$$

(Pozor na pořadí!)

Alternativní značení:

$$D_{i,i}F(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}F(x_1, \dots, x_n),$$

$$D_{i,j}F(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}F(x_1, \dots, x_n).$$

Pořadí tzv. **smíšených** parciálních derivací (podle různých proměnných) se může plést, naštěstí to mnohdy nevádí:

Příklad 50. Vypočtěte parciální derivace operace dělení, $F(x, y) = \frac{x}{y}$:

$$D_1F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{y} = \frac{1}{y},$$

$$D_2F(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{y} = -\frac{x}{y^2},$$

$$D_{1,1}F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{x}{y} = 0,$$

$$D_{2,2}F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{x}{y} = 2\frac{x}{y^3},$$

$$D_{2,1}F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{x}{y} = -\frac{1}{y^2},$$

$$D_{1,2}F(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{x}{y} = -\frac{1}{y^2}.$$

Příklad 51. Pokračujme v příkladu 48,

$$F(t, \tau) = A e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega t.$$

Parciální derivace vyšších řádů jsou např.

$$D_{1,1}F(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}F(t, \tau) =$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \left(A (\cos t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} + 2A\tau\omega (\sin t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} - A\tau^2\omega^2 (\cos t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$D_{2,2}F(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}F(t, \tau) =$$

$$= \frac{1}{\tau^4} \left(At^2 (\cos t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} - 2At\tau (\cos t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$D_{2,1}F(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau}F(t, \tau) =$$

$$= \frac{1}{\tau^3} \left(A\tau (\cos t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} - At (\cos t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} - At\tau\omega (\sin t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

$$D_{1,2}F(t, \tau) = \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t}F(t, \tau) =$$

$$= \frac{1}{\tau^3} \left(A\tau (\cos t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} - At (\cos t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} - At\tau\omega (\sin t\omega) e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \dots$$

Rovnost posledních dvou výrazů (smíšených derivací v různém pořadí) není náhodná:

Věta 52. Jestliže v okolí nějakého bodu je funkce $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá a má spojitě parciální derivace $D_{1,2}F, D_{2,1}F$, pak jsou si rovny.

Důkaz. Podle definice je

$$\begin{aligned} D_{2,1}F(x, y) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{D_1F(x, y+k) - D_1F(x, y)}{k} = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+k) - F(x, y+k) - F(x+h, y) + F(x, y)}{hk}, \\ D_{1,2}F(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2F(x+h, y) - D_2F(x, y)}{k} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y+k) - F(x, y+k) - F(x+h, y) + F(x, y)}{hk}. \end{aligned}$$

Oba výrazy se liší jen pořadím limit. Podle předpokladů jsou zlomky na pravé straně spojité a libovolnou cestou dojdeme ke stejné limitě. \square

Obdobná věta platí i pro smíšené derivace funkcí více proměnných.

Věta 53. *Je-li funkce $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ v okolí bodu \mathbf{x} spojitá a má spojitě parciální derivace $D_{j,i}F, D_{i,j}F$, pak jsou si rovny.*

Lze zavést též diferenciály vyšších řádů, založené na aproximaci polynomem stupně vyššího než 1.

3.6.1 Laplaceův operátor

je součet druhých parciálních derivací, např. v trojrozměrném prostoru

$$\begin{aligned} \Delta &= D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3}, \\ \Delta F &= D_{1,1}F + D_{2,2}F + D_{3,3}F. \end{aligned}$$

Vyjadřuje

- z hustoty rychlost difuze,
- z potenciálu pole (elektrického, gravitačního) objemovou hustotu jeho zdrojů (nábojů, hmotnosti). (*Matematický pojem potenciálu zavedeme později.*)

3.7 Lokální extrémy

Věta 54. *Je-li funkce v bodě \mathbf{b} diferencovatelná a má v něm lokální extrém, pak v něm má nulové všechny parciální derivace.*

Předchozí věta nepřekvapí, protože znamená, že tečná nadrovina v lokálním extrému je konstantní funkce. Nulovost parciálních derivací není postačující podmínkou. Stejně jako v jednodimenzionálním případě záleží výskyt lokálního extrému na derivacích vyšších řádů. Ve vícerozměrném případě se situace dále komplikuje.

Kromě toho nesmíme zapomínat, že lokální extrém může být v bodě, kde funkce není diferencovatelná.

3.8 Pojmy oblouk a křivka

I když intuitivně chápeme, co chceme říci, není snadné to matematicky definovat.

Oblouk je taková množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$, k níž existuje interval $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$ a vzájemně jednoznačné zobrazení (=parametrizace) $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$, které má spojitou nenulovou derivaci. V krajních bodech uvažujeme jednostranné derivace $\varphi'(a+)$, $\varphi'(b-)$ a navíc povolíme, aby byly nulové. Tím je mj. vyjádřeno, že oblouk je „hladký“ a sám sebe neprotíná. Připomeňme, že hodnoty funkce φ jsou vektory, stejně tak její derivace (podle jediné proměnné). Jejich nenulovost znamená, že nejsou všechny složky současně nulové. Kdybychom to totiž připustili, oblouk by nemusel být hladký. Při pohybu bychom se mohli „zastavit“ a pokračovat libovolným směrem. To dovolíme, ale jen v konečně mnoha bodech v následujícím pojmu: **Křivka** je taková množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$, k níž existuje interval $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$, spojitě zobrazení (=parametrizace) $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ a rozklad intervalu $\langle a, b \rangle$ na konečně mnoho intervalů I_1, \dots, I_k takových, že pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$ je $\varphi(I_j) = \{\varphi(t) \mid t \in I_j\}$ oblouk. Křivka tedy vznikne tím, že spojíme za sebe konečně mnoho oblouků. Bude **uzavřená**, jestliže $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Křivka se může protínat (v libovolně mnoha bodech) a může nespojitě měnit směr v **konečně** mnoha bodech. Ve všech ostatních bodech $\varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, představuje derivace $\varphi'(t)$ tečný vektor a

$$\frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$

jednotkový tečný vektor ke křivce ve směru její orientace (ve směru růstu parametru).

Uvedené pojmy se nepoužívají jednotně, zde přebíráme terminologii

[Hamhalter, Tišer: Int. p.] s jediným rozdílem, že nepřipouštíme uzavřený oblouk (ten lze však vždy složit ze dvou oblouků). Často se pro zde zavedený typ křivky používá termín **po částech hladká křivka**.

Křivka může mít více parametrizací. Ty však nemohou být libovolné, lze je navzájem převádět; ukážeme to pro oblouk:

Tvrzení 55 (transformace parametru). *Nechť oblouk $C \subseteq \mathbb{R}^n$ má parametrizace $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$, $\psi: \langle c, d \rangle \rightarrow C$. Pak zobrazení $h = \psi^{-1} \circ \varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$ je vzájemně jednoznačné a má na (a, b) spojitou nenulovou derivaci. Splňuje $\varphi = \psi \circ h$, neboli*

$$\forall t \in \langle a, b \rangle : \varphi(t) = \psi(h(t)) .$$

V předchozím tvrzení může transformace $h: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$ být jednoho z následujících dvou typů:

- rostoucí, $h(a) = c$, $h(b) = d$,
- klesající, $h(a) = d$, $h(b) = c$.

V prvním případě nazýváme parametrizace φ, ψ **souhlasné**, ve druhém **nesouhlasné**. Záleží na tom, zda při rostoucím parametru procházíme křivku stejným nebo opačným směrem.

V případě uzavřené křivky se mohou parametrizace navíc lišit volbou počátečního bodu (rovného koncovému bodu).

3.9 Derivace podél křivky

Předpokládejme, že se pohybujeme podél křivky. Ptáme se, jak se mění hodnota funkce více proměnných. Odpověď nám dávají směrové derivace ve směru postupu. Ty lze obecně získat z gradientu.

Derivace funkce $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ podél křivky $C \subseteq \mathbb{R}^n$ s parametrizací $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$ v bodě $\varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, je

$$\varphi'(t) \bullet \text{grad } F(\varphi(t)) ,$$

tj. skalární součin gradientu a tečného vektoru ve směru křivky. Tento výraz je definován pro všechny body oblouku; pro křivku mimo konečně mnoha bodů. Rozepsáním po složkách dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \bullet \text{grad } F(\varphi(t)) &= (\varphi'_1(t), \dots, \varphi'_n(t)) \bullet (D_1 F(\varphi(t)), \dots, D_n F(\varphi(t))) = \\ &= (\varphi'_1(t) D_1 F(\varphi(t)) + \dots + \varphi'_n(t) D_n F(\varphi(t))) . \end{aligned}$$

Stejný výsledek dává derivace funkce $F \circ \varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ podle věty o substituci. Můžeme substituci provést a derivovat funkci jedné proměnné. Vhodnou volbou parametrizace lze docílit tečný vektor $\varphi'(t)$ jednotkový. (Existuje právě jedna taková parametrizace souhlasná s φ a právě jedna nesouhlasná s φ . Při nesouhlasné parametrizaci by se změnilo znaménko.)

Názorný význam: Pokud F je výška terénu, v němž se pohybujeme po křivce s parametrizací φ , jejíž proměnnou je čas, pak

$$\varphi'(t) \bullet \text{grad } F(\varphi(t))$$

je rychlost ve svislém směru v závislosti na čase. Je zřejmé, že pokud přejdeme k nesouhlasné orientaci křivky, změní se znaménko, protože ze stoupání se stane klesání a naopak.

Speciálním případem derivace podél křivky je směrová derivace (podél přímky) a parciální derivace (podél přímky rovnoběžné s osou souřadnic).

3.10 Numerický výpočet derivace

Proč derivovat numericky, když cokoli umíme zderivovat symbolicky?

- Může to být pracné.
- Hledáme snadnou alternativu.
- Ne vše je dáno vzorci.

Proč nederivovat numericky?

- Není to příliš korektní – i „dobrá“ aproximace funkce (např. dle Weierstrassovy věty) může vést na špatnou aproximaci derivace.
- Musíme „vhodně“ zvolit nenulový konečný krok.

Princip i problémy předvedeme na jednodimenzionálním případě.

Limitu

$$DF(x) = F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

můžeme odhadnout tak, že za h dosadíme malé nenulové číslo.

Závislost na něm vyjádříme funkcí dvou proměnných

$$T(x, h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Ta vyjadřuje směrnici **sečny** vedené body $(x, F(x))$, $(x+h, F(x+h))$, zatímco derivace je směrnice **tečny** v bodě $(x, F(x))$.

Osvědčuje se i symetrický vzorec

$$S(x, h) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h},$$

což je směrnice **sečny** vedené body $(x-h, F(x-h))$, $(x+h, F(x+h))$. Ač jsou tyto body vzdálené v první souřadnici o $2h$, chyba tohoto vzorce bývá menší.

- Příliš velký krok způsobuje velké chyby metody.
- Příliš malý krok způsobuje velké zaokrouhlovací chyby (v čitateli odčítáme dvě skoro stejné hodnoty, výsledek dělíme malým jmenovatelem).

4 Obecné poznámky o lineárních operátorech

O linearitě zobrazení hovoříme, pokud platí princip superpozice:

Účinek (=obraz) součtu vstupů je součet účinků (=obrazů) jednotlivých vstupů. Takových případů je mnoho. Ještě víc je těch, kde linearita není zcela splněna, ale slouží k dobré náhradě nelineárního systému. Příkladem je v teorii elektrických obvodů velmi oblíbená linearizace v okolí pracovního bodu.

Vzhledem k fyzikálním omezením málokdy bývá závislost lineární v celém rozsahu. Např. neočekáváme, že když na vstup akustického zesilovače připojíme 1 kV místo 1 mV, že výstupem budeme moci napájet osvětlení města. I přesto je linearizace užitečným nástrojem.

Nás budou zajímat lineární operátory na prostoru funkcí, zejména lineární zobrazení, která funkcím na (podmnožinách) \mathbb{R}^n přiřazují reálná čísla. Takových operátorů máme mnoho. Nejjednodušším případem je operátor $H_{\mathbf{b}}$, který funkci přiřazuje její hodnotu v bodě $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$,

$$H_{\mathbf{b}}(F) = F(\mathbf{b}) .$$

Ten je samozřejmě lineární, neboť

$$H_{\mathbf{b}}(rF + sG) = (rF + sG)(\mathbf{b}) = rF(\mathbf{b}) + sG(\mathbf{b}) = rH_{\mathbf{b}}(F) + sH_{\mathbf{b}}(G) .$$

Jakákoli lineární kombinace lineárních operátorů je opět lineární operátor. Např. můžeme zvolit body $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k \in \mathbb{R}^n$ a čísla $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ a definovat lineární operátor

$$H(F) = a_1 F(\mathbf{b}_1) + \dots + a_k F(\mathbf{b}_k) .$$

Váha a_j určuje, nakolik hodnota $F(\mathbf{b}_j)$ ovlivňuje celkový výsledek. Podílí se na něm jen hodnoty v konečně mnoha bodech. Můžeme si však představit přechod k systému s rozprostřenými parametry, kdy výsledek určují hodnoty podél úsečky, oblouku křivky, plochy atd. Tomu odpovídá přechod od sumy k integrálu. Stejně jako suma, i integrál bude lineárně záviset na příslušných funkcích.

I derivace je v tomto smyslu lineární.

U integrálu máme ještě druhou důležitou vlastnost. Předvedeme si ji na operátoru H . Rozdělme indexovou množinu $\{1, \dots, k\}$ na dvě disjunktní podmnožiny I, J a definujme operátory

$$H_I(F) = \sum_{j \in I} a_j F(\mathbf{b}_j) ,$$
$$H_J(F) = \sum_{j \in J} a_j F(\mathbf{b}_j) .$$

Pak

$$H(F) = H_I(F) + H_J(F) ,$$

tj. $H = H_I + H_J$. Obdobný princip nás bude provázet i u integrálů. Pokud integrujeme **stejný integrand** přes dva disjunktní obory I, J , pak integrál přes $I \cup J$ bude součet dílčích integrálů. Analogický vztah platí pro libovolný spočetný počet disjunktních oborů. Této vlastnosti integrálů říkáme **(spočetná) aditivita**. Pro nekonečně mnoho oborů dostáváme výsledek jako součet řady a pro její korektní definici je nutné, aby byla **absolutně konvergentní**.

5 Integrace funkcí více proměnných

Jestliže v jedné dimenzi byla integrace inverzní operací k derivování, lze očekávat, že tomu tak bude i ve více dimenzích. Klademe si tedy otázku, jak najít funkci, známe-li její derivace. Protože ovšem máme více pojmů derivace, máme i více otázek.

Integrovat budeme pouze funkce **spojité** nebo **po částech spojité**, tj. takové, jejichž definiční obor lze rozdělit na konečně mnoho částí, na nichž je funkce spojitá. Zabývat se budeme téměř výhradně **určitými integrály**, k pojmu neurčitého integrálu najdeme analogii jen někdy.

5.1 Integrace parciálních derivací, aneb co nám o funkci (ne)říkají její parciální derivace

Hledáme funkci $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, přičemž známe její parciální derivaci podle (BÚNO²) první proměnné, $D_1 F = f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dostaneme ji integrací podle této proměnné:

$$F(x, y) = F(x_0, y) + \int_{x_0}^x f_1(\xi, y) \, d\xi.$$

(To je integrál podle jedné proměnné.) K tomu jsme potřebovali hodnotu funkce F ve výchozím bodě, který má **stejnou druhou souřadnici**. Hodnoty funkce F jsou tímto určeny na přímce $\mathbb{R} \times \{y\}$. Abychom určili funkci F i v dalších bodech, potřebujeme ji znát v aspoň jednom bodu pro každou hodnotu y . Bez počátečních hodnot bychom dospěli k neurčitému integrálu

$$F(x, y) = \int f_1(x, y) \, dx + c(y),$$

kde „integrační konstanta“ $c(y)$ sice nezávisí na integrační proměnné x , ale může být libovolnou funkcí y .

Výsledek závisí na nekonečně mnoha parametrech $c(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Obdobně můžeme vyjít z parciální derivace podle druhé proměnné, $D_2 F = f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$F(x, y) = F(x, y_0) + \int_{y_0}^y f_2(x, \eta) \, d\eta.$$

Potřebovali jsme hodnotu funkce F ve výchozím bodě, který má **stejnou první souřadnici**. Hodnoty funkce F jsou tímto určeny na přímce $\{x\} \times \mathbb{R}$. Abychom určili funkci F i v dalších bodech, potřebujeme ji znát v aspoň jednom bodě pro každou hodnotu x . Bez počátečních hodnot bychom dospěli k neurčitému integrálu

$$F(x, y) = \int f_2(x, y) \, dy + b(x),$$

kde „integrační konstanta“ $b(x)$ nezávisí na integrační proměnné y , ale může být libovolnou funkcí x .

Obdobně lze integraci hledat původní funkci (více než 2 proměnných) z parciálních derivací (podle libovolné proměnné). Pro určitý integrál potřebujeme znát hodnotu v aspoň jednom bodě pro všechny možné kombinace ostatních proměnných. V neurčitém integrálu místo integrační konstanty je libovolná funkce všech ostatních proměnných (kromě té, podle které integrujeme).“

Závěr: Nepotřebovali jsme nic nového, ale také jsme nic moc nedostali.

5.2 Násobné integrály

Výsledek integrace lze znovu zintegrovat. (Nebo integrandem může být další integrál.) S tím jsme se setkali už u funkcí jedné proměnné, dostáváme operaci inverzní k druhé derivaci.

Příklad 56. *Dvojí integrací zrychlení a podle času t dostaneme polohu s , až na dvě integrační konstanty, kterými mohou být počáteční rychlost $v_0 = v(t_0)$ a počáteční poloha $s_0 = s(t_0)$,*

$$\begin{aligned} a(t) &= Dv(t) = \frac{d}{dt} v(t) = D(Ds(t)) = \frac{d^2}{dt^2} s(t), \\ s(t) &= s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) \, d\tau = s_0 + \int_{t_0}^t \left(v_0 + \int_{t_0}^{\tau} a(u) \, du \right) \, d\tau = \\ &= s_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} a(u) \, du \, d\tau. \end{aligned}$$

Vzhledem k lokálnosti proměnných v zápisu integrálu lze psát i

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(t) \, dt = s_0 + v_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t a(t) \, dt^2,$$

ale interpretace jednotlivých výskytů t může vést k chybám.

Podobně můžeme pokračovat k vícenásobným integrálům.

U funkcí více proměnných máme další možnost, integrovat postupně podle různých proměnných, čímž dostaneme operaci inverzní ke smíšené derivaci.

²Bez újmy na obecnosti.

5.2.1 Dvojný integrál přes obdélník a Fubiniova věta

Příklad 57. *Hřiště má být vodorovné. V jaké výšce má být jeho povrch, aby materiál nechyběl ani nepřebýval?*

Funkci $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ můžeme považovat za funkci první proměnné a druhou považovat za parametr,

$$G(x, y) = \varphi_y(x),$$

její integrál podle první proměnné jako funkce horní meze je

$$\int_{x_0}^x G(\xi, y) d\xi = \int_{x_0}^x \varphi_y(\xi) d\xi = \Phi_y(x),$$

kde $\Phi_y(x_0) = 0$. Další integrací $\Phi_y(x)$ podle x bychom dostali předchozí případ, známý z funkce jedné proměnné (y zůstává parametrem).

Integrací $\Phi_y(x)$ podle y bychom dostali funkci horní meze $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = \int_{y_0}^y \Phi_\eta(x) d\eta = \int_{y_0}^y \left(\int_{x_0}^x G(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta,$$

splňující

$$\begin{aligned} D_{1,2}F(x, y) &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = G(x, y), \\ F(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Mohli bychom G také považovat za funkci druhé proměnné (s parametrem x) a integrovat napřed podle druhé proměnné, pak podle první:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \psi_x(y), \\ \int_{y_0}^y G(x, \eta) d\eta &= \int_{y_0}^y \psi_x(\eta) d\eta = \Psi_x(y), \\ F^*(x, y) &= \int_{x_0}^x \Psi_\xi(y) d\xi = \int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y G(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi, \end{aligned}$$

kde funkce F^* splňuje

$$\begin{aligned} D_{2,1}F^*(x, y) &= \frac{\partial^2 F^*(x, y)}{\partial y \partial x} = G(x, y), \\ F^*(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned}$$

INT2-1

Příklad 58. *Funkci $G(x, y) = x y^2$ zintegrujeme napřed podle první proměnné v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$,*

$$\int_0^\pi G(x, y) dx = \int_0^\pi x y^2 dx = \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{x=0}^\pi = \frac{\pi^2}{2} y^2,$$

pak podle druhé proměnné v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$,

$$\int_0^1 \frac{\pi^2}{2} y^2 dy = \left[\frac{\pi^2}{6} y^3 \right]_{y=0}^1 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tutíž funkci zintegrujeme napřed podle druhé proměnné v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$,

$$\int_0^1 G(x, y) dy = \int_0^1 x y^2 dy = \left[\frac{1}{3} x y^3 \right]_{y=0}^1 = \frac{1}{3} x,$$

pak podle první proměnné v intervalu $\langle 0, \pi \rangle$,

$$\int_0^\pi \frac{1}{3} x dx = \left[\frac{1}{6} x^2 \right]_{x=0}^\pi = \frac{\pi^2}{6}.$$

Později ukážeme, že rovnost výsledků

$$\int_0^1 \left(\int_0^\pi G(x, y) dx \right) dy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 G(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi^2}{6}$$

není náhodná.

Našli jsme operátory inverzní k $D_{1,2}, D_{2,1}$ (až na integrační konstanty, které byly určeny použitím určitých integrálů, tj. volbou počátečního bodu). Víme ovšem, že $D_{1,2} = D_{2,1}$, pokud jejich argument i výsledky jsou spojité. To je v našem případě splněno, protože jsme se omezili na integraci spojitých funkcí (a integraci přes uzavřený omezený obor zůstane spojitost zachována). Tedy

$$D_{2,1}F^*(x, y) = G(x, y) = D_{1,2}F(x, y) = D_{2,1}F(x, y).$$

Pro $x = x_0$ nebo $y = y_0$ je jeden z integrálů nulový, výsledek rovněž, tj.

$$F^*(x, y_0) = F(x, y_0) = 0, \quad F^*(x_0, y) = F(x_0, y) = 0$$

pro všechna x, y . Touto dodatečnou podmínkou jsou funkce F, F^* jednoznačně určeny (za předpokladu spojitosti G) a musí si tedy být rovny, $F^* = F$,

$$\int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y G(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi = \int_{y_0}^y \left(\int_{x_0}^x G(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta.$$

Toto pravidlo o možnosti záměny pořadí integrace platí i za obecnějších předpokladů a nazývá se **Fubiniova věta**. Zde jsme předpokládali spojitost funkce G na obdélníku obsahujícím všechny zúčastněné body; je určen vrcholy $(x_0, y_0), (x, y)$.

Poznámka 59. Dvě funkce F, F^* , které mají stejné smíšené derivace, tj. $D_{2,1}F^* = D_{2,1}F$, se mohou lišit o libovolnou funkci x (ale nezávislou na y) a o libovolnou funkci y (nezávislou na x). Jejich rozdíl je tedy tvaru

$$F^*(x, y) - F(x, y) = b(x) + c(y).$$

Funkce b, c zde hrají stejnou roli, jakou v jednodimenzionálním případě plnila integrační konstanta u neurčitého integrálu.

Závěr: Integrály

$$\int_a^c \left(\int_b^d G(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi = \int_b^d \left(\int_a^c G(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta$$

se oba vztahují k obdélníku $U = \langle a, c \rangle \times \langle b, d \rangle$ a jsou si rovny. To nás opravňuje zavést nový pojem, **dvojný integrál funkce** G přes obdélník U , přičemž není důležité, který ze dvou uvedených postupů použijeme. Mohli bychom obdélník dokonce rozdělit na obdélníky, v nichž bychom použili různé postupy.

Spočetná aditivita integrálu dovoluje rozšířit jej na spočetná sjednocení dvojrozměrných intervalů (obdélníků), tedy např. na kruhy a na všechny rovinné útvary s definovaným obsahem. Dále pak dostáváme dvojný integrál přes neomezené množiny jako limitu integrálu přes jejich omezené podmnožiny, ovšem je potřeba hlídat existenci příslušné limity. Pokud integrand mění znaménko, potřebujeme **absolutní konvergenci**, tj. aby existovaly integrály z jeho kladné i záporné části a nebyly oba nekonečné.

Pokud má obdélník jednu stranu nulovou (obdélník degeneruje na úsečku), jeden z integrálů je přes jediný bod a tudíž (celý výsledek) nulový. Z toho vyplývá, že dvojný integrál přes útvar s nulovým obsahem (např. křivku) je nulový. Pokud tedy nějaký útvar pro účel integrace vyjadřujeme jako sjednocení obdélníků, nevadí, pokud se překrývají jejich hranice.

Poznámka 60. Značení:

$$\iint_U G(x, y) dx dy = \iint_U G dS = \iint_U G = \int_U G dS = \int_U G,$$

kde $dS = dx dy$ symbolicky vyjadřuje element plochy příslušného útvaru.

Poznámka 61 (geometrický význam dvojného integrálu). Dvojný integrál nezáporné funkce G přes útvar U je objem tělesa pod grafem funkce G na oboru U . Lze jej také interpretovat jako hmotnost útvaru U , je-li plošná hustota dána funkcí G .

Speciálně pro $G = 1$ dostáváme obsah útvaru U .

Zvolíme-li souřadnice tak, že půdorys hřiště je $\langle x_0, x_1 \rangle \times \langle y_0, y_1 \rangle$, a funkce G popisuje výšky terénu před úpravami, pak obsah hřiště je $(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)$, objem tělesa pod grafem funkce G je $\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} G(x, y) dx \right) dy$ a hledaná výška v je průměrná výška terénu, tj.

$$v = \frac{F(x_1, y_1)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} = \frac{\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} G(\xi, \eta) d\xi \right) d\eta}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)}.$$

Postup z odvození by vedl i na výraz

$$v^* = \frac{F^*(x_1, y_1)}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} G(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi}{(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)},$$

který musí být stejný (z povahy úlohy i z Fubiniovy věty), $v^* = v$.

5.2.2 Jak značit násobné integrály

Narážíme na další nejednotnost ve značení. Máme-li dva do sebe vnořené integrály, např.

$$\int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(u, v) dv \right) du,$$

obvykle bychom chtěli vynechávat závorku. Ještě víc taková potřeba vynikne u vícenásobných integrálů, např.

$$\int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_2} \dots \left(\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_n \right) \dots du_2 \right) du_1.$$

Pak je otázka, v jakém pořadí máme psát diferenciály na konci zápisu. V literatuře se setkáme s oběma možnostmi. Např. [Apl. mat., Rektorys: Co je, Navara: PMS] používají značení

$$\int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(u, v) dv \right) du = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv,$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_2} \dots \left(\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_n \right) \dots du_2 \right) du_1 = \\ & = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n, \end{aligned}$$

motivované zřejmě tím, že celý zápis chápeme jako symbol pro jeden vícenásobný integrál (přes oblast, která by mohla být i obecnější než zde použitý součin intervalů) následovaný integrandem a výčtem všech diferenciálů opět ve stejném (logickém) pořadí. Ovšem počítačové algebraické systémy (např. *MuPAD*) nám takový zápis obvykle nedovolí a požadují, abychom napřed dokončili zápis vnitřního integrálu. Proto zde, stejně jako v [Hamhalter, Tišer: Int. p.], budeme používat konvenci:

$$\int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(u, v) dv \right) du = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du,$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_2} \dots \left(\int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_n \right) \dots du_2 \right) du_1 = \\ & = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_n \dots du_2 du_1. \end{aligned}$$

Např.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^7 u dv du &= \int_0^1 \left(\int_0^7 u dv \right) du = \int_0^1 7u du = \frac{7}{2}, \\ \int_0^1 \int_0^7 v dv du &= \int_0^1 \left(\int_0^7 v dv \right) du = \int_0^1 \frac{49}{2} du = \frac{49}{2}. \end{aligned}$$

5.2.3 Výpočet dvojného integrálu

Zápis

$$\iint_U G dS$$

vyjadřuje, že dvojný integrál závisí pouze na integrandu G a útvaru U , přes který integrujeme, nikoli na konkrétním postupu, jak to uděláme (dvojitou integrací podle jednotlivých proměnných). Pro počítačové zpracování však musíme popsat útvar U , typicky pomocí funkcí, jejichž grafy jej vymezují. Časté jsou následující 2 případy:

1. Najdeme funkce $u_1, u_2, u_1 \leq u_2$, takové, že

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \langle u_1(x), u_2(x) \rangle, x \in \langle a, c \rangle\}.$$

Můžeme integrovat napřed podle y , pak podle x (na němž závisí meze vnitřního integrálu):

$$\int_a^c \int_{u_1(x)}^{u_2(x)} G(x, y) \, dy \, dx.$$

2. Najdeme funkce $u_1, u_2, u_1 \leq u_2$, takové, že

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle u_1(y), u_2(y) \rangle, y \in \langle b, d \rangle\}.$$

Můžeme integrovat napřed podle x , pak podle y (na němž závisí meze vnitřního integrálu):

$$\int_b^d \int_{u_1(y)}^{u_2(y)} G(x, y) \, dx \, dy.$$

Pořadí integrace zde nelze měnit proto, že meze vnitřního integrálu mohou záviset na integrační proměnné vnějšího integrálu.

Cvičení 62. Některé útvary (nejen obdélníky) lze popsat oběma uvedenými způsoby. Najděte příklad.

INT2-2

Příklad 63. Necht

$$G(x, y) = x^2 y$$

a U je horní polovina jednotkového kruhu se středem v počátku. Matematické vyjádření

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$$

nám sotva nějaký počítačový systém přijme jako integrační obor. Musíme sami předepsat, jak mají souřadnice probíhat všechny body tohoto útvaru.

Pro dané $x \in \langle -1, 1 \rangle$ patří do U úsečka, pro niž $y \in \langle 0, \sqrt{1-x^2} \rangle$,

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \langle 0, \sqrt{1-x^2} \rangle, x \in \langle -1, 1 \rangle\}$$

a můžeme integrovat napřed podle y , pak podle x :

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} G(x, y) \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \frac{2}{15}.$$

Pro dané $y \in \langle 0, 1 \rangle$ patří do U úsečka, pro niž $x \in \langle -\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2} \rangle$,

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \langle -\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2} \rangle, y \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

a můžeme integrovat napřed podle x , pak podle y (na němž závisí meze vnitřního integrálu):

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} G(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{2}{3} y (1-y^2) \sqrt{1-y^2} \, dy = \frac{2}{15}.$$

Daleko jednodušší popis množiny U bychom dostali v polárních souřadnicích r, φ , kde $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$:

$$\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi \in \langle 0, \pi \rangle, r \in \langle 0, 1 \rangle\}.$$

V polárních souřadnicích dostáváme obdélník, což je pro integraci ten nejjednodušší případ. Nicméně je problém v tom, že „obsah plošného elementu“ $dr \, d\varphi$ je úměrný r . To musíme napřed zohlednit substitucí a teprve pak vypočítáme integrál, který bude tvaru

$$\int_0^\pi \int_0^1 H(r, \varphi) \, dr \, d\varphi,$$

kde integrand $H(r, \varphi)$ dostaneme substitucí, při níž v $G(x, y)$ nahradíme x, y novými proměnnými r, φ .

5.2.4 Lineární substituce v dvojném integrálu

Souřadnice x, y vyjádříme pomocí jiných souřadnic u, v , zobrazených (prozatím lineární) transformací souřadnic $\mathbf{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{T}(u, v) = \begin{bmatrix} T_1(u, v) \\ T_2(u, v) \end{bmatrix}.$$

(Někde značíme dva argumenty v závorce, někde jako sloupcový vektor.) Protože $(u, v) = u(1, 0) + v(0, 1)$, pak je-li \mathbf{T} **lineární**, můžeme psát

$$\begin{aligned} T_1(u, v) &= uT_1(1, 0) + vT_1(0, 1), \\ T_2(u, v) &= uT_2(1, 0) + vT_2(0, 1), \end{aligned}$$

v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1(u, v) \\ T_2(u, v) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1(1, 0) & T_1(0, 1) \\ T_2(1, 0) & T_2(0, 1) \end{bmatrix}}_{J_{\mathbf{T}}} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

$$J_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T_1(1, 0) & T_1(0, 1) \\ T_2(1, 0) & T_2(0, 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1T_1 & D_2T_1 \\ D_1T_2 & D_2T_2 \end{bmatrix}$$

je **Jacobiho matice** zobrazení \mathbf{T} . (Argument u $J_{\mathbf{T}}(u, v)$ zde vynecháváme, neboť na něm nezáleží, $J_{\mathbf{T}}$ je konstantní.)

Obdélník V , který má jeden vrchol (u, v) a strany délek h, k rovnoběžné se souřadnými osami,

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} u + sh \\ v + tk \end{bmatrix} \mid s, t \in \langle 0, 1 \rangle \right\},$$

má obsah $h \cdot k$. Zobrazí se na

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(V) &= \{ \mathbf{T}(u + sh, v + tk) \mid s, t \in \langle 0, 1 \rangle \} = \\ &= \left\{ \mathbf{T}(u, v) + J_{\mathbf{T}} \cdot \begin{bmatrix} sh \\ tk \end{bmatrix} \mid s, t \in \langle 0, 1 \rangle \right\}, \end{aligned}$$

což je rovnoběžník, jehož strany popisují vektory

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{T}} \cdot \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} &= h \begin{bmatrix} T_1(1, 0) \\ T_2(1, 0) \end{bmatrix}, \\ J_{\mathbf{T}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} &= k \begin{bmatrix} T_1(0, 1) \\ T_2(0, 1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Obsah rovnoběžníka $\mathbf{T}(V)$ je

$$hk |\det J_{\mathbf{T}}|,$$

kde $\det J_{\mathbf{T}}$ je **jacobián**. To vyplývá z následujícího lemmatu:

Lemma 64 (geometrický význam determinantu). *Obsah rovnoběžníka, jehož strany jsou vektory $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$,*

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, je

$$\left| \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right|.$$

Důkaz. V trojrozměrném prostoru je to jediná nenulová složka vektorového součinu $(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0)$ a ta má příslušný význam.

Kdo to neví, může si to odvodit:

Podle sinové věty je obsah rovnoběžníka (=dvojnásobek obsahu trojúhelníka se stranami \mathbf{a}, \mathbf{b})

$$\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \gamma,$$

kde $\gamma = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Převedeme sinus na kosinus, který souvisí se skalárním součinem:

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right)^2}.$$

Dostáváme obsah ve tvaru

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \gamma &= \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \right)^2} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b})^2} = \\ &= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2} = \\ &= \sqrt{a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2 a_1 a_2 b_1 b_2} = \\ &= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|. \end{aligned}$$

□

Poznámka 65. *I znaménko příslušného determinantu má význam, určuje orientaci báze z vektorů \mathbf{a}, \mathbf{b} . Pokud je determinant nulový, jsou vektory \mathbf{a}, \mathbf{b} závislé a obsah degenerovaného rovnoběžníka nulový.*

Transformací \mathbf{T} se obdélník o obsahu hk zobrazil na rovnoběžník s obsahem $hk |\det J_{\mathbf{T}}|$, tj. $|\det J_{\mathbf{T}}| \times$ větším. Přitom obsah útvaru je integrál z konstanty 1 přes tento útvar.

V tomto poměru se změnil i dvojný integrál, protože spojitou funkci lze (z hlediska integrálu) libovolně přesně aproximovat po částech konstantní funkcí.

5.2.5 Obecná substituce v dvojném integrálu

Omezíme se na případ, kdy transformace \mathbf{T} je **diferencovatelná**. Pak v okolí bodu (u, v) nahradíme \mathbf{T} pomocí diferenciálu, resp. Jacobiho matice:

$$\mathbf{T}(u + sh, v + tk) \approx \mathbf{T}(u, v) + J_{\mathbf{T}}(u, v) \cdot \begin{bmatrix} sh \\ tk \end{bmatrix}.$$

Obdélník V se zobrazí přibližně na rovnoběžník

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(V) &= \{\mathbf{T}(u + sh, v + tk) \mid s, t \in \langle 0, 1 \rangle\} = \\ &\approx \left\{ \mathbf{T}(u, v) + J_{\mathbf{T}}(u, v) \cdot \begin{bmatrix} sh \\ tk \end{bmatrix} \mid s, t \in \langle 0, 1 \rangle \right\}, \end{aligned}$$

jehož obsah je $|\det J_{\mathbf{T}}(u, v)| \times$ větší. Pro $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ bude tato aproximace dostatečně přesná pro odhad obsahu.

Věta 66 (o substituci v dvojném integrálu). *Je-li \mathbf{T} prostě diferencovatelné zobrazení na útvaru V a G je funkce, která má na $\mathbf{T}(V)$ spojitě obě první parciální derivace, pak*

$$\iint_{\mathbf{T}(V)} G(x, y) dx dy = \iint_V G(\mathbf{T}(u, v)) |\det J_{\mathbf{T}}(u, v)| du dv.$$

Substituce polárními souřadnicemi

Transformace z polárních souřadnic r, φ do kartézských souřadnic x, y je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{T}(r, \varphi).$$

Souřadnice $r \in \langle 0, \infty \rangle$ je euklidovská vzdálenost od počátku, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je úhel („azimut“). Jacobiho matice je

$$J_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

a jacobíán

$$\det J_{\mathbf{T}} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r,$$

v souladu s očekáváním, že „plocha elementu“ $dr d\varphi$ je úměrná r .

Je-li V útvar v polárních souřadnicích r, φ , pak integrál funkce G přes jeho obraz v kartézských souřadnicích je

$$\iint_{\mathbf{T}(V)} G(x, y) dx dy = \iint_V G(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

INT2-3

Příklad 67. Pomocí polárních souřadnic vyřešíme příklad 63:

$$G(x, y) = x^2 y = (r \cos \varphi)^2 r \sin \varphi = r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi = G(\mathbf{T}(r, \varphi))$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{T}(V)} G(x, y) dx dy &= \int_0^\pi \int_0^1 r G(\mathbf{T}(r, \varphi)) dr d\varphi = \int_0^\pi \int_0^1 r^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi dr d\varphi = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 r^4 dr \right) \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{5} \int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{5} \int_{-1}^1 u^2 du = \frac{1}{5} \frac{2}{3} = \frac{2}{15}, \end{aligned}$$

kde jsme v jednoduchém integrálu použili substituci $u = -\cos \varphi$.

5.2.6 Trojný integrál

Podobně jako u dvojného integrálu lze pokračovat v libovolné konečné dimenzi, dostaneme operaci inverzní ke smíšené parciální derivaci podle všech proměnných.

Spojitou funkci $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ můžeme integrovat přes kvádr postupně podle jednotlivých souřadnic,

$$\int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y \left(\int_{z_0}^z G(\xi, \eta, \zeta) d\zeta \right) d\eta \right) d\xi.$$

Na pořadí integrace nezáleží, a to podle Fubiniovy věty i podle toho, že hledáme spojitou funkci $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že

$$G = D_{1,2,3} F,$$

kde $D_{1,2,3} = D_{1,3,2} = \dots$. Opět pomocí aditivity zobecníme tento pojem na libovolné spočetné sjednocení trojrozměrných intervalů (kvádrů), tedy např. na koule a na všechna prostorová tělesa s definovaným objemem, i na neomezená tělesa, pokud příslušná limita je absolutně konvergentní.

Poznámka 68 (interpretace trojného integrálu). *Trojný integrál z nezáporné funkce G lze opět chápat jako (čtyřrozměrný) objem tělesa pod grafem funkce G na trojrozměrném integračním oboru U , to však není příliš názorné. Lze jej také interpretovat jako hmotnost tělesa U , jehož hustota je dána funkcí G .*

Speciálně pro $G = 1$ dostáváme objem tělesa U .

Trojný integrál přes těleso s nulovým objemem (např. plochu nebo křivku) je nulový.

Poznámka 69. Značení:

$$\iiint_U G(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U G dV = \iiint_U G = \int_U G dV = \int_U G,$$

kde $dV = dx dy dz$ symbolicky vyjadřuje element objemu příslušného útvaru. (Někdy se používá jen jednoduchý znak integrálu s tím, že z kontextu je zřejmé, že se integruje přes objem.)

Pro výpočet potřebujeme obvykle obor integrace rozdělit na části, které lze popsat pomocí funkcí menšího počtu proměnných, takže dostaneme integrál např. ve tvaru

$$\int_a^b \left(\int_{u_1(z)}^{u_2(z)} \left(\int_{v_1(y,z)}^{v_2(y,z)} G(x, y, z) dx \right) dy \right) dz,$$

kde funkce jedné proměnné u_1, u_2 a funkce dvou proměnných v_1, v_2 vymezují mezi svými grafy integrační obor. Pak již nelze měnit pořadí integrace, neboť na integračních proměnných závisí meze vnitřních integrálů.

5.2.7 Obecná substituce v trojném integrálu

Lineární transformací $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se trojrozměrný interval (kvádr) zobrazí na rovnoběžnostěn, jehož strany jsou dány sloupci příslušné Jacobiho matice $J_{\mathbf{T}}$ a jehož objem je $|\det J_{\mathbf{T}}| \times$ větší. (Znaménko jacobianu udává kladnou, resp. zápornou orientaci báze vytvořené ze sloupců Jacobiho matice.)

Pro **obecnou diferencovatelnou** transformaci $\mathbf{T}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dostaneme analogický výsledek jako ve dvojrozměrném případě:

Věta 70 (o substituci v trojném integrálu). *Je-li \mathbf{T} prosté diferencovatelné zobrazení na tělese V a G je funkce, která má na $\mathbf{T}(V)$ spojitě všechny parciální derivace, pak*

$$\iiint_{\mathbf{T}(V)} G(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V G(\mathbf{T}(u, v, w)) |\det J_{\mathbf{T}}(u, v, w)| \, du \, dv \, dw.$$

Substituce cylindrickými souřadnicemi

Transformace z cylindrických souřadnic r, φ, z do kartézských souřadnic x, y, z je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{T}(r, \varphi, z).$$

Souřadnice $r \in \langle 0, \infty \rangle$ je vodorovná vzdálenost (euklidovská vzdálenost průmětu do roviny xy) od počátku, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je úhel průmětu do roviny xy („azimut“), souřadnice z má původní význam („výška“). Jacobiho matice je

$$J_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a jacobian

$$\det J_{\mathbf{T}} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r,$$

v souladu s očekáváním, že „objem elementu“ $dr \, d\varphi \, dz$ je úměrný r .

Je-li V útvar v cylindrických souřadnicích r, φ, z , pak integrál funkce G přes jeho obraz v kartézských souřadnicích je

$$\iiint_{\mathbf{T}(V)} G(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V G(\mathbf{T}(r, \varphi, z)) r \, dr \, d\varphi \, dz.$$

Substituce sférickými souřadnicemi

Transformace ze sférických souřadnic ϱ, φ, θ do kartézských souřadnic x, y, z je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varrho \sin \theta \cos \varphi \\ \varrho \sin \theta \sin \varphi \\ \varrho \cos \theta \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\varrho, \varphi, \theta).$$

Souřadnice $\varrho \in \langle 0, \infty \rangle$ je (šikmá) euklidovská vzdálenost od počátku, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je úhel průmětu do roviny xy („azimut“), $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel od osy z („svislice“). Jacobiho matice je

$$J_{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -\varrho \sin \theta \sin \varphi & \varrho \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \varrho \sin \theta \cos \varphi & \varrho \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & 0 & -\varrho \sin \theta \end{bmatrix}$$

a jacobian

$$\det J_{\mathbf{T}} = \varrho^2 \sin \theta.$$

Jelikož $\theta \in \langle 0, \pi \rangle$, je i tento determinant vždy nezáporný.

Je-li V těleso ve sférických souřadnicích ϱ, φ, θ , pak integrál funkce G přes jeho obraz v kartézských souřadnicích je

$$\iiint_{\mathbf{T}(V)} G(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V G(\mathbf{T}(\varrho, \varphi, \theta)) \varrho^2 \sin \theta \, d\varrho \, d\varphi \, d\theta.$$

Příklad 71. Zintegrujeme funkci $G(x, y, z) = z^2$ přes jednotkovou kouli se středem v počátku.

1. Přímou v kartézských souřadnicích:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} 2z^2 \sqrt{1-z^2-y^2} \, dy \, dz = \\ &= \int_{-1}^1 \pi z^2 (1-z^2) \, dz = \frac{4}{15} \pi. \end{aligned}$$

V integrálu podle y byla využita goniometrická substituce obdobná použití jiných souřadnic, které ukážeme dále.

2. V cylindrických souřadnicích:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{2\pi} z^2 r \, d\varphi \, dr \, dz &= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} 2\pi z^2 r \, dr \, dz = \\ &= \int_{-1}^1 \pi z^2 (1-z^2) \, dz = \frac{4}{15} \pi. \end{aligned}$$

3. Ve sférických souřadnicích: $z = \varrho \cos \theta$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\varrho \cos \theta)^2 \varrho^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\varrho &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varrho^4 (\cos \theta)^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \, d\varrho = \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi 2\pi \varrho^4 (\cos \theta)^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varrho = \\ &= \int_0^1 \frac{4}{3} \pi \varrho^4 \, d\varrho = \frac{4}{15} \pi. \end{aligned}$$

Integrál podle θ byl řešen substitucí $-\cos \theta = u$.

Závěr: Násobné integrály převádíme na více jednoduchých. Přitom musíme **sami najít** popis potřebných mezí, případně rozklad integračního oboru na více disjunktních podmnožin. Mnohé případy usnadní vhodná substituce, tj. volba souřadnic.

Poznámka 72. Našli jsme (v mezích možnosti) operátory inverzní k $D_1, D_2, D_{1,1}, D_{2,2}, D_{1,2}, D_{2,1}, D_{1,2,3}, \dots$, čímž jsme zjevně nevyčerpali všechny možnosti, např. operátor inverzní k $D_{1,2,2}$ atd.

5.3 Křivkové integrály druhého druhu

Hledejme operaci inverzní ke směrové derivaci, resp. derivaci podél křivky. Směrové derivace (a parciální derivace jako jejich speciální případ) dávají možnost stanovit derivaci funkční hodnoty, pohybuje-li se podél nějaké křivky. Nyní klademe opačnou otázku: Jak ze znalosti směrové derivace podél křivky stanovit původní funkční hodnoty? Samozřejmě předpokládáme, že známe funkční hodnotu v počátečním bodě, neboť derivace nám vypovídá jen o jejích změnách.

Jestliže derivace podél křivky se nakonec redukovala na derivaci podle jediné proměnné (parametru křivky), máme tím i odpověď, jak bude vypadat opačná operace, totiž integrál podle jediné proměnné. Je tedy zřejmé, co máme udělat. Výsledkem budou hodnoty původní funkce podél příslušné křivky. Problém je, že ve více dimenzích se do stejného koncového bodu lze dostat více cestami, a kdybychom dostali různé výsledky, neměli bychom jak vybrat jediný správný. Postup bude možno uplatnit jen tehdy, jestliže výsledek **nezávisí na integrační cestě**. Vektorové pole s touto vlastností se nazývá **potenciální**. To je ekvivalentní s požadavkem, že **integrál přes uzavřenou křivku je nulový**.

Poznámka 73. Důvod je následující: Jestliže integrujeme podle křivek p, q a chceme porovnat výsledky, pak můžeme projít po křivce p , vrátit se po ní a projít po křivce q . Výsledek lze interpretovat buď tak, že jsme prošli po křivce q (a předtím si zašli po p tam a zpátky, bez vlivu na výsledek), nebo že jsme prošli po křivce p a přidali uzavřenou křivku.

Poznámka 74. Kromě pojmu **potenciální** se pole s podobnými vlastnostmi nazývá též **konzervativní** nebo **nevírové**. Tyto pojmy se v podrobnostech liší, ale shodují se např. pro pole, která jsou spojitá na otevřeném kruhu nebo obdélníku.

Integrujeme vektorovou funkci (vektorové pole) $\mathbf{f} = (f_1, f_2) = \text{grad } F$ podle jediné proměnné, kterou je parametr křivky C s parametrizací $\varphi(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. Výsledkem je

$$\int_a^b \varphi'(t) \bullet \mathbf{f}(\varphi(t)) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

neboť integrand vznikl derivací funkce $F \circ \varphi$ (jedné proměnné) podle věty o substituci.

Skalární pole F takové, že $\mathbf{f} = \text{grad } F$, se nazývá **potenciál** vektorového pole \mathbf{f} . Je určen jednoznačně až na přičtení konstanty. Je zobecněním **neurčitého integrálu** funkce jedné proměnné.

Pokud by obecněji (po částech spojitě) vektorové pole \mathbf{f} nebylo gradientem nějakého skalárního pole, integrál podle křivky lze vypočítat stejným způsobem, ale není nezávislý na integrační cestě a nemá uvedený význam; nazývá se **křivkový integrál druhého druhu**

$$\int_a^b \varphi'(t) \bullet \mathbf{f}(\varphi(t)) dt.$$

Alternativní značení: $\int_C \mathbf{f} \bullet ds$, kde $ds = \varphi'(t) dt$.

$\int_C f_1 dx + f_2 dy$ vyjadřuje, že f_1 integrujeme ve směru x , f_2 ve směru y ; integrand vznikne symbolickým skalárním součinem $(f_1, f_2) \bullet (dx, dy)$.

Poznámka 75. Interpretace: Je-li \mathbf{f} síla, pak křivkový integrál druhého druhu udává práci při pohybu podél příslušné křivky. Je-li síla způsobena potenciálním polem, dostaneme rozdíl potenciálů.

Věta 76. Křivkový integrál druhého druhu nezávisí na volbě **shodné** parametrizace křivky. Při přechodu k **neshodné** parametrizaci křivky se znaménko křivkového integrálu druhého druhu změní v opačné.

Důkaz. Důkaz stačí provést pro oblouk $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť má **shodné** parametrizace $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$, $\psi: \langle c, d \rangle \rightarrow C$. Pak **rostoucí** zobrazení $h = \psi^{-1} \circ \varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow \langle c, d \rangle$ je vzájemně jednoznačné a má na $\langle a, b \rangle$ spojitou nenulovou derivaci. Spňuje $\varphi(t) = \psi(h(t))$, $\varphi'(t) = h'(t) \psi'(h(t))$, $h(a) = c$, $h(b) = d$. Pomocí substituce $h(t) = u$ dostáváme

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'(t) \bullet \mathbf{f}(\varphi(t)) dt &= \int_a^b h'(t) \psi'(h(t)) \bullet \mathbf{f}(\psi(h(t))) dt = \\ &= \int_c^d \psi'(u) \bullet \mathbf{f}(\psi(u)) du. \end{aligned}$$

Při neshodné parametrizaci křivky se změní znaménko skalárního součinu. □

KRIV2-1

Příklad 77. Závaží je na obvodu kola, které se odvaluje po ose x . Gravitační pole působí ve směru záporné poloosy y . Vypočtěme práci, kterou je třeba vykonat, aby se závaží dostalo z nejnižší do nejvyšší polohy. (Ostatní síly, způsobené valením kola a třením, zanedbáváme.) Poloměr kola r zvolíme (BÚNO) jednotkový.

Řešení. Zřejmě nezáleží na (úhlové) rychlosti valení kola, zvolíme ji (BÚNO) rovnoměrnou a jednotkovou, začneme (BÚNO) v počátku; dostaneme rovnici cykloidy

$$\begin{aligned} x = \varphi_1(t) &= t - \sin t, & D\varphi_1(t) &= \frac{dx}{dt} = \varphi_1'(t) = 1 - \cos t, \\ y = \varphi_2(t) &= 1 - \cos t, & D\varphi_2(t) &= \frac{dy}{dt} = \varphi_2'(t) = \sin t, \end{aligned}$$

kde $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Působíme proti síle úměrné $(0, -1)$, tj. ve směru vektoru $(0, 1)$; práce je úměrná výrazu

$$\int_0^\pi (0, 1) \bullet (1 - \cos t, \sin t) dt = \int_0^\pi \sin t dt = 2,$$

což je rozdíl y -ových souřadnic počátečního a koncového bodu, neboť pole s gradientem $(0, 1)$ je $F(x, y) = y + c$, kde c je konstanta.

Konstanta úměrnosti je tíha závaží (zahrnuje i intenzitu gravitačního pole).

Příklad 78. Integrujte pole $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, y - x)$ od bodu $(1, 1)$ do bodu $(4, 2)$ podél (a) úsečky spojující koncové body, (b) paraboly s rovnicí $x = y^2$, (c) lomené čáry s vrcholy $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$.

Řešení. (a) Úsečka má parametrizaci např. $\varphi(t) = (1 + 3t, 1 + t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, $\varphi'(t) = (3, 1)$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi'(t) \bullet \mathbf{f}(\varphi(t)) dt &= \int_0^1 (3, 1) \bullet ((1 + 3t) + (1 + t), (1 + t) - (1 + 3t)) dt = \\ &= \int_0^1 (3(2 + 4t) - 2t) dt = \int_0^1 (6 + 10t) dt = 11. \end{aligned}$$

(b) Zde se nabízí parametrizace $\varphi(y) = (y^2, y)$, $y \in \langle 1, 2 \rangle$, $\varphi'(y) = (2y, 1)$,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \varphi'(y) \bullet \mathbf{f}(\varphi(y)) dy &= \int_1^2 (2y, 1) \bullet (y^2 + y, y - y^2) dy = \\ &= \int_1^2 (2y(y^2 + y) + (y - y^2)) dy = \\ &= \int_1^2 (y + y^2 + 2y^3) dy = \frac{34}{3}. \end{aligned}$$

(c) Nejprve integrujeme druhou složku podle druhé proměnné, pak první složku podle první proměnné,

$$\int_1^2 f_2(1, y) dy + \int_1^4 f_1(x, 2) dx = \int_1^2 (y - 1) dy + \int_1^4 (x + 2) dx = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 14.$$

5.3.1 Co musí splňovat gradient

Hledáme ke gradientu příslušný potenciál. Jelikož potenciál je v každém bodě určen skalárem a gradient vektorem, máme důvod se domnívat, že ne každé vektorové pole je gradientem nějakého skalárního pole, tj. nemusí mít potenciál. I když tato argumentace v nekonečněrozměrném prostoru funkcí není dostatečná, závěr je správný. Jen některá vektorová pole mají potenciál. (Zatímco všechny diferencovatelné skalární funkce mají gradient.) Pokud potenciál existuje, je jednoznačný a dostaneme jej integrací po libovolné cestě vnitřkem oboru, v němž je příslušné vektorové pole spojitě. Pokud to obor dovoluje, mohli bychom postupovat i ve směru kartézských souřadnic. V dvojrozměrném případě se lze z bodu (a, b) do bodu (c, d) dostat ve směru souřadných os dvěma základními způsoby, buď napřed ve směru první osy do (c, b) , nebo napřed ve směru druhé osy do (a, d) . Tomu odpovídají následující výrazy (triviální parametrizaci vynecháváme):

$$\int_a^c f_1(t, b) dt + \int_b^d f_2(c, u) du = \int_b^d f_2(a, u) du + \int_a^c f_1(t, d) dt. \quad (6)$$

Můžeme si představit, že funkce f_1, f_2 vznikly integrací svých derivací $D_2 f_1, D_1 f_2$ podle příslušných proměnných:

$$\begin{aligned} f_1(t, d) - f_1(t, b) &= \int_b^d D_2 f_1(t, u) du, \\ f_2(c, u) - f_2(a, u) &= \int_a^c D_1 f_2(t, u) dt. \end{aligned}$$

Pak lze rovnici (6) upravit následovně:

$$\begin{aligned} \int_a^c f_1(t, d) dt - \int_a^c f_1(t, b) dt &= \int_b^d f_2(c, u) du - \int_b^d f_2(a, u) du, \\ \int_a^c (f_1(t, d) - f_1(t, b)) dt &= \int_b^d (f_2(c, u) - f_2(a, u)) du, \\ \int_a^c \int_b^d D_2 f_1(t, u) du dt &= \int_b^d \int_a^c D_1 f_2(t, u) dt du. \end{aligned}$$

V obou případech integrujeme přes stejný obdélník, jen pořadí integrace se liší, ale podle Fubiniovy věty na něm nezáleží, pokud jsou funkce D_2f_1, D_1f_2 spojité.

$$\int_a^c \int_b^d D_2f_1(t, u) \, du \, dt = \int_a^c \int_b^d D_1f_2(t, u) \, du \, dt,$$

$$\int_a^c \int_b^d (D_2f_1(t, u) - D_1f_2(t, u)) \, du \, dt = 0.$$

Funkce $D_2f_1(t, u) - D_1f_2(t, u)$, jejíž integrál přes libovolný obdélník je nulový, musí být nulová skoro všude (tj. až na množinu nulové míry, např. spočetně mnoho bodů). Tedy je-li vektorové pole \mathbf{f} gradientem nějakého skalárního pole F (potenciálu pole \mathbf{f}), pak

$$D_2f_1(t, u) - D_1f_2(t, u) = D_2D_1F(t, u) - D_1D_2F(t, u) = 0,$$

což je známý vztah pro rovnost smíšených derivací. Tím se také dovídáme, co zvláštního splňuje vektorové pole, které je potenciální.

Důsledek 79. *Je-li dvojrozměrné vektorové pole $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ potenciální, pak splňuje*

$$D_2f_1(t, u) - D_1f_2(t, u) = 0.$$

U potenciálního pole můžeme z jedné složky určit druhou. Řešení není jednoznačné, obsahuje libovolnou funkci jedné proměnné v roli integrační konstanty.

Známe-li f_1 , dostaneme f_2 integrací D_2f_1 podle první proměnné; k výsledku lze přičíst libovolnou funkci druhé proměnné.

Známe-li f_2 , dostaneme f_1 integrací D_1f_2 podle druhé proměnné; k výsledku lze přičíst libovolnou funkci první proměnné.

Příklad 80. *Dvojrozměrné vektorové pole $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ je potenciální a známe $f_2(x, y) = x^2 - 4xy^3$. Určete složku f_1 .*

Řešení. $D_1f_2(x, y) = 2x - 4y^3 = D_2f_1(x, y)$. Tuto funkci zintegrujeme podle y , přičemž v roli integrační konstanty je libovolná funkce g proměnné x ,

$$f_1(x, y) = 2xy - y^4 + g(x).$$

Potenciál je

$$F(x, y) = x^2y - xy^4 + G(x),$$

kde G je primitivní funkce ke g , $DG = G' = g$.

5.3.2 Jak najít potenciál

K danému dvojrozměrnému potenciálnímu vektorovému poli $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ můžeme najít potenciál F v libovolném bodě (x, y) (je-li tam definován) např. následujícím postupem:

1. Zvolíme výchozí bod (x_0, y_0) v oblasti, v níž je pole \mathbf{f} diferencovatelné, a libovolnou hodnotu $c = F(x_0, y_0)$.
2. Po cestě z bodu (x_0, y_0) do bodu (x, y_0) integrujeme f_1 podle první proměnné, dostaneme přírůstek potenciálu

$$F(x, y_0) - F(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x f_1(\xi, y_0) \, d\xi.$$

3. Po cestě z bodu (x, y_0) do bodu (x, y) integrujeme f_2 podle druhé proměnné, dostaneme přírůstek potenciálu

$$F(x, y) - F(x, y_0) = \int_{y_0}^y f_2(x, \eta) \, d\eta.$$

4. Sečteme přírůstky

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + (F(x, y_0) - F(x_0, y_0)) + (F(x, y) - F(x, y_0)) = \\ &= c + \int_{x_0}^x f_1(\xi, y_0) \, d\xi + \int_{y_0}^y f_2(x, \eta) \, d\eta. \end{aligned}$$

Potenciál (pokud existuje) je určen jednoznačně až na integrační konstantu c .
 Samozřejmě jsme mohli postupovat napřed ve směru osy y do bodu (x_0, y) :

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + (F(x_0, y) - F(x_0, y_0)) + (F(x, y) - F(x_0, y)) = \\ &= c + \int_{y_0}^y f_2(x_0, \eta) \, d\eta + \int_{x_0}^x f_1(\xi, y) \, d\xi. \end{aligned}$$

Mohli jsme zvolit i jinou cestu.

KRIV2-3

Příklad 81. Integrujte vektorové pole $\mathbf{f}(x, y) = (6xy^2 - y^3, 6x^2y - 3xy^2)$ po kružnici s rovnicí $(x - 5)^2 + y^2 = 20$ v kladném směru od bodu $(1, 2)$ do bodu $(3, 4)$.

Řešení. Kdo si chce procvičit integrály goniometrických funkcí pomocí parametrizace $\varphi(t) = (5 + \sqrt{20} \cos t, \sqrt{20} \sin t)$, $t \in (\arctan(-1/2) - \pi, \arctan(-2) + \pi)$, má příležitost. (Příště ho možná potká mnohem těžší podobná úloha.)

Nicméně neztratíme mnoho času pokusem, zda dané vektorové pole není náhodou potenciální:

$$\begin{aligned} D_2 f_1(x, y) &= \frac{d}{dy} (6xy^2 - y^3) = 12xy - 3y^2, \\ D_1 f_2(x, y) &= \frac{d}{dx} (6x^2y - 3xy^2) = 12xy - 3y^2. \end{aligned}$$

Z rovnosti těchto výrazů (všude) vyplývá, že výsledek nezáleží na integrační cestě. Můžeme si zvolit libovolnou křivku se stejnými koncovými body, např. jednu nebo dvě úsečky. Jednou z možností je lomená čára z bodu $(1, 2)$ přes $(3, 2)$ do $(3, 4)$:

$$\begin{aligned} \int_1^3 f_1(x, 2) \, dx + \int_2^4 f_2(3, y) \, dy &= \int_1^3 (24x - 8) \, dx + \int_2^4 (54y - 9y^2) \, dy = \\ &= 80 + 156 = 236. \end{aligned}$$

Potenciál F jsme pro výpočet integrálu nepotřebovali, ale také jej odvodíme, např. následovně:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= c + \int_{x_0}^x f_1(\xi, y_0) \, d\xi + \int_{y_0}^y f_2(x, \eta) \, d\eta = \\ &= c + \int_{x_0}^x (6\xi y_0^2 - y_0^3) \, d\xi + \int_{y_0}^y (6x^2 \eta - 3x \eta^2) \, d\eta = \\ &= c - xy^3 + 3x^2 y^2 + x_0 y_0^3 - 3x_0^2 y_0^2. \end{aligned}$$

Můžeme zvolit např.

$$F^*(x, y) = -xy^3 + 3x^2 y^2$$

a konstantní výraz

$$-F^*(x_0, y_0) = x_0 y_0^3 - 3x_0^2 y_0^2$$

zahrnout do integrační konstanty. Všechny potenciály jsou tvaru

$$F^*(x, y) + c_1 = -xy^3 + 3x^2 y^2 + c_1,$$

kde c_1 je konstanta.

Pomocí potenciálu by původní integrál byl

$$F^*(3, 4) - F^*(1, 2) = 240 - 4 = 236.$$

Pokud bychom počítali řadu úloh se stejným polem a jinými koncovými body, stálo by nám za to si vypočítat potenciál (pokud existuje).

Příklad 82. Uvažujme vektorové pole

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

které je definované a diferencovatelné na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Platí pro něj

$$\begin{aligned} D_1 f_2(x, y) - D_2 f_1(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2} = \\ &= \left(\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) - \left(\frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Integrál po uzavřené křivce bude nulový, pokud bod $(0, 0)$ leží v jejím vnějšku. Přesto toto pole nemá potenciál na celém svém definičním oboru. Stačí vypočítat integrál přes uzavřenou křivku takovou, že bod $(0, 0)$ leží v jejím vnitřku, např. jednotkovou kružnici s tímto středem. Její parametrizace může být $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Pak $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)$ a integrál přes křivku je

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \varphi'(t) \bullet \mathbf{f}(\varphi(t)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \bullet \left(\frac{-\sin t}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}, \frac{\cos t}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{(\sin t)^2}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} + \frac{(\cos t)^2}{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} \right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

Obecněji pro funkce více proměnných:

Věta 83. Vektorové pole $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je potenciální (=je gradientem nějakého skalárního pole F), právě když

$$D_k f_j(t_1, \dots, t_n) - D_j f_k(t_1, \dots, t_n) = 0$$

pro všechna $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Poznámka 84. To je $n(n-1)/2$ rovnic (neboť pro $j = k$ jsou triviálně splněny).

Závěr: Křivkový integrál (druhého druhu) z vektorového pole nezávisí na parametrizaci, pouze jeho znaménko závisí na orientaci parametrizace. Pokud je příslušné vektorové pole potenciální, vede křivkový integrál druhého druhu na potenciál tohoto pole. Ten je určen jednoznačně až na konstantu.

Poznámka 85. Pokud by potenciální pole bylo definováno na nespojitelné množině (např. na několika uzavřených kruzích, které mají prázdný průnik), pak by mezi potenciály v jednotlivých oblastech (kruzích) nebyla žádná souvislost, tj. pro každý by mohla být jiná integrační konstanta. Je to tím, že neexistuje křivka, podél níž bychom mohli vektorové pole integrovat a po níž bychom mohli tyto oblasti spojit.

5.3.3 Greenova věta

Uvažujme integrál dvojrozměrného vektorového pole $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ po uzavřené křivce C .

Pokud by pole bylo potenciální, integrál by byl nulový.

Pokud pole potenciální není, můžeme dostat nenulový výsledek, který je dvojným integrálem skalárního pole $D_2 f_1 - D_1 f_2$.

Tento výraz má tedy význam lokální „koncentrace zdroje vírů“, který způsobuje, že integrály přes uzavřené křivky jsou nenulové. Dostali bychom se k němu i odvozením, jak se vyvíjí integrál přes uzavřenou kružnici, jejíž poloměr se blíží k nule.

Budeme se zabývat křivkami, které mají **vnitřek**. Taková křivka nikde sama sebe neprotíná (tj. má parametrizaci $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$, která je spojitá a prostá). Řekneme, že křivka je **kladně orientovaná** vzhledem k svému vnitřku, jestliže při oběhu ve směru její parametrizace máme její vnitřek po levé ruce.

Věta 86 (Greenova). *Nechť $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená křivka se spojitou prostou parametrizací $\varphi: \langle a, b \rangle \rightarrow C$, která je kladně orientovaná vzhledem k svému vnitřku $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Nechť $\mathbf{f} = (f_1, f_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je vektorové pole, které je spojitě i se svými parciálními derivacemi na množině $C \cup U$. Pak*

$$\int_C \mathbf{f} \bullet d\mathbf{s} = \int_a^b \varphi'(t) \bullet \mathbf{f}(\varphi(t)) dt = \iint_U (D_1 f_2(x, y) - D_2 f_1(x, y)) dx dy.$$

Důkaz. Byl již obsažen v odvození vlastností gradientu, kdy jsme integrovali po dvou cestách. Z nich lze vytvořit uzavřenou křivku tvořící obvod obdélníka a dostali jsme výraz na pravé straně. Zobecnění na jiné tvary je založeno na tom, že vztah zůstává zachován pro několik sousedících oblastí. Obtížnější je limitní přechod k hranicím, které nejsou rovnoběžné s osami. \square

K označení integrálu přes uzavřenou křivku se někdy používá značení $\oint_C \mathbf{f} \bullet d\mathbf{s}$, kde kroužek znamená, že křivka je uzavřená.

Příklad 87. *Integrujme vektorové pole $\mathbf{f}(x, y) = (3x - xy - y^3, x^2 - 2xy)$ po kladně orientované hranici čtverce $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$.*

Řešení. *Místo čtyř jednoduchých křivkových integrálů po úsečkách můžeme podle Greenovy věty počítat jeden plošný integrál, a to ze skalárního pole*

$$D_1 f_2(x, y) - D_2 f_1(x, y) = 2(x - y) - (-x - 3y^2) = 3x - 2y + 3y^2,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (3x - 2y + 3y^2) dx dy = \frac{3}{2}.$$

Příklad 88. *Integrujme vektorové pole $\mathbf{f}(x, y) = (e^x(1 + \cos y), -e^x(y - \sin y))$ po kladně orientované hranici oblasti $U = \{(x, y) \mid x \in \langle 0, \pi \rangle, y \in \langle 0, \sin x \rangle\}$.*

Řešení. *Křivkový integrál vede k problémům, ale plošný podle Greenovy věty je schůdný:*

$$D_1 f_2(x, y) - D_2 f_1(x, y) = -e^x(y - \sin y) - e^x \sin y = -ye^x,$$

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} -ye^x dy dx = \frac{-1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi e^x (\cos 2x - 1) dx =$$

$$= \frac{1}{5} (1 - e^\pi).$$

5.4 Délka křivky a křivkový integrál prvního druhu

Dosud jsme se vyhnuli jinému důležitému pojmu, a to **délka křivky**. Bude určena integrálem, ale jiného typu než dosud probíraného. Je zřejmé, že tentokrát bude záviset na integrační cestě. Také nebudeme integrovat vektorové pole, ale skalární funkci jedné proměnné (parametru křivky).

Délka křivky C s parametrizací $\varphi(t): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, t \in \langle a, b \rangle$ je dána integrálem (funkce jedné proměnné)

$$\int_a^b \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2} dt.$$

Závisí na integrační cestě (jejíž délku měříme), ale nezávisí na její parametrizaci, ani na její orientaci. (Pro $a \leq b$ dostaneme nezáporné číslo, bez ohledu na to, kterým směrem křivku projdeme.)

Alternativní značení: $\int_C ds$, kde $ds = \|d\mathbf{s}\| = \|\varphi'(t)\| dt$.

Pokud by křivka byla z homogenního drátu zanedbatelné tloušťky, byl by výsledek úměrný jeho hmotnosti. Pokud by však drát nebyl homogenní a jeho hmotnost na jednotku délky byla dána funkcí $g: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ (v závislosti na parametru křivky) nebo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (v závislosti na poloze v prostoru), pak bychom dostali obecnější výraz

$$\int_a^b g(t) \|\varphi'(t)\| dt = \int_a^b h(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| dt =$$

$$= \int_a^b h(\varphi(t)) \sqrt{(\varphi'_1(t))^2 + \dots + (\varphi'_n(t))^2} dt,$$

tzv. **křivkový integrál prvního druhu**.

Opět jsme úlohu převedli na integraci podle jedné proměnné.

Příklad 89. Vypočtěme délku oblouku cykloidy, tj. dráhu bodu na obvodu kola, které se odvaluje o jednu otáčku po ose x . Poloměr zvolíme (BÚNO) jednotkový.

Řešení. Zřejmě nezáleží na (úhlové) rychlosti valení kola, zvolíme ji (BÚNO) rovnoměrnou a jednotkovou. Začneme (BÚNO) v počátku,

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) = t - \sin t, & \frac{dx}{dt} &= \varphi_1'(t) = 1 - \cos t, \\ y &= \varphi_2(t) = 1 - \cos t, & \frac{dy}{dt} &= \varphi_2'(t) = \sin t, \end{aligned}$$

kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = 8.$$

Cvičení 90 (kulová cívka neboli světoběžník). Na kouli namotejte cívku z drátu a stanovte jeho délku. Neboli: Projděte od severního k jižnímu pólu tak, že směr vašeho pohybu bude vždy přibližně jihozápadní (mezi jihem a západem; nesmíte jít přímo na jih a vůbec ne na východ nebo na sever). Stanovte délku cesty. Trasu si můžete zvolit, ale zobrazte ji. *Obtížnější varianta:* Projděte přes vybraná místa (bez omezení směru).

Závěr: Křivkový integrál (prvního druhu) ze skalárního pole ani jeho znaménko nezávisí na parametrizaci křivky. Závisí ovšem na integrační cestě.

Mohli bychom zavést parametrizaci Φ křivky pomocí jedné souřadnice, která by vyjadřovala orientovanou vzdálenost od pevně zvoleného bodu $\Phi(t_0)$,

$$\Phi(t) = \int_{t_0}^t \|\varphi'(\tau)\| d\tau.$$

Tato parametrizace by byla obdobou neurčitého integrálu, orientovaná délka křivky mezi body $\Phi(a)$, $\Phi(b)$ by byla

$$\Phi(b) - \Phi(a).$$

5.5 Poznámky o numerické integraci

Numerickou integraci potřebujeme, protože

1. některé integrály nelze přesně vypočítat,
2. ne vše je zadáno vzorci,
3. někdy je numerická integrace rychlejší nebo přesnější než dosazení do exaktního vzorce (nemluvě o jeho nalezení).

Numerický odhad integrálu zásadně vychází z konečně mnoha funkčních hodnot. Z nich se najde aproximace integrandu v podobě, kterou lze integrovat (např. polynom nebo častěji funkce, která je po částech polynomem).

Vzhledem k předchozím úvahám o linearitě vede drtivá většina metod na lineární kombinaci funkčních hodnot

$$\sum_{i=1}^M w_i f(\mathbf{x}_i)$$

(bez ohledu na to, jaká úvaha vedla k použitému vzorci),

V jednodimenzionálním případě je integračním oborem interval, který lze snadno rozdělit na zvolený počet podintervalů a kontrolovat i jejich délku.

Ve více dimenzích to může být obtížné, protože integrační obor může mít složitý tvar.

Proto se často volí body náhodně (**metoda Monte Carlo**). To si může vyžádat větší počet bodů pro dosažení stejné přesnosti, ale pro svoji jednoduchost se tato metoda často používá.

5.6 Témata zde neobsažená

Podobně jako křivkový integrál lze počítat i integrál přes plochu v trojrozměrném prostoru. Tu je ovšem potřeba parametrizovat dvěma reálnými parametry a je poněkud obtížnější zajistit, aby parametrizace byla prosté zobrazení.

Opět rozlišujeme **plošný integrál**

1. **prvního druhu**, ze skalárního pole; je-li toto pole konstanta 1, dostaneme obsah plochy, obecně pak např. hmotnost plochy s danou plošnou hustotou;
2. **druhého druhu**, z vektorového pole; je-li toto pole rychlost proudění (tekutiny, nosičů náboje apod.), dostaneme údaj o celkovém průtoku plochou.

Plošný integrál druhého druhu přes uzavřenou plochu pak udává, kolik zkoumané substance přibylo uvnitř plochy, což vede na integrální věty zobecňující Greenovu větu (Gaussova a Stokesova věta). Uplatňují se zejména v teorii elektromagnetického pole (v Maxwellových rovnicích).

6 Diferenciální rovnice

Doporučená literatura:

pro začátečníky [Rektorys: Co je], pro pokročilé [Tkadlec: Dif. rce].

DR-2

Příklad 91. Jaká je závislost hustoty atmosféry na výšce?

Hustota je úměrná tlaku.

Tlak je úměrný hmotnosti atmosféry nad daným místem, tj. integrálu z hustoty.

V homogenním gravitačním poli bychom dostali ve výšce x nad povrchem Země hustotu

$$\varrho(x) = c \int_x^\infty \varrho(h) dh,$$

kde $c > 0$ je konstanta. Tu lze určit z hustoty ϱ_0 a tlaku p_0 v nulové (nebo jiné známé) výšce a tíhového zrychlení g , neboť z fyzikálního odvození vyplývá $c = g \frac{\varrho(x)}{p(x)}$, kde $p(x)$ je tlak ve výšce x ; poměr hustoty a tlaku $\frac{\varrho(x)}{p(x)} = \frac{\varrho_0}{p_0}$ je konstanta, daná chemickým složením a teplotou plynu, takže $c = g \frac{\varrho_0}{p_0}$.

Dostali jsme tzv. **integrální rovnici** pro neznámou **funkci** $\varrho: \langle 0, \infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Obvykle ji zderivováním obou stran převádíme na **diferenciální rovnici**:

$$\varrho'(x) = -c \varrho(x), \quad (7)$$

s počáteční podmínkou $\varrho(0) = \varrho_0$. (Záporné znaménko vzniklo tím, že původní integrál byl funkcí **dolní** meze x .)

Skutečný vztah je složitější. Gravitační pole je radiální, poměr hustoty a tlaku vzduchu se mění s teplotou a složením, které je také závislé na výšce.

6.1 Typy úloh

Řešením podobných úloh je funkce, nikoli jen jedna hodnota, a to na intervalu. (Mohli bychom brát největší možný interval, na kterém řešení existuje.)

Řešení na více disjunktních intervalech jsou na sobě nezávislá.

Řešení je obvykle závislé na parametrech (integračních konstantách). Hovoříme o **obecném řešení** diferenciální rovnice. Jedno konkrétní, **partikulární řešení** je určeno dalšími podmínkami, např. počátečními podmínkami v některém bodě.

Příklad 92. Neurčitý integrál funkce f je řešením diferenciální rovnice

$$y'(x) = f(x).$$

Přidáním podmínky $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ dostaneme partikulární řešení, určitý integrál jako funkci horní meze x ,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

Jsou-li zadány hodnoty funkce **v jednom krajním bodě** intervalu (počátečním bodě), hovoříme o **Cauchyho³ počáteční úloze**. Jsou-li zadány hodnoty funkce **v obou krajních bodech** intervalu (okrajové podmínky), hovoříme o **okrajové úloze**. Mohou však být zadány hodnoty funkce **v libovolných bodech** intervalu, takže i okrajová úloha je speciální případ.

Řád diferenciální rovnice je dán nejvyšší derivací hledané funkce, která se v rovnici vyskytuje.

6.2 Řešitelnost

Předpoklad: Cauchyho počáteční úloha, pouze jedna diferenciální rovnice 1. řádu.

Úloha: Na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ máme řešit diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad (8)$$

kde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

³Cauchy, čti [kóši].

Poznámka 93. Řešení splňuje

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) \, d\xi,$$

Lze je chápat jako integrál (neznámé) funkce $g(\xi) = f(\xi, y(\xi))$ jedné proměnné nebo křivkový integrál známé funkce f přes (neznámou) křivku s parametrizací $(\xi, y(\xi))$, $\xi \in \langle x_0, x_n \rangle$.

Existence a jednoznačnost řešení není obecně zaručena:

Příklad 94. Uvažujme diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}, \quad y(0) = 0,$$

kde třetí odmocninu považujeme za reálnou funkci definovanou i pro záporný argument. Má řešení např. $y(x) = 0$ a $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$.

Věta 95. Nechť funkce f je definovaná a spojitá na $\langle x_0, x_n \rangle \times \mathbb{R}$ (tj. pro všechna $x \in \langle x_0, x_n \rangle$, $y \in \mathbb{R}$). Nechť je splněna **Lipschitzova podmínka**

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \langle x_0, x_n \rangle \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|.$$

Pak řešení úlohy (8) na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ existuje a je jednoznačné.

Postačující podmínka: $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitá a omezená na $\langle x_0, x_n \rangle \times \mathbb{R}$.

6.3 Co se může stát

DR-1

Příklad 96. Máme najít obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0. \tag{9}$$

Později se to naučíme a nebudeme jen hádat. Ted' však zkusíme exponenciální funkci $y(x) = e^x$, pro kterou

$$\begin{aligned} y''(x) &= y'(x) = y(x) = e^x, \\ y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) &= e^x - 3e^x + 2e^x = 0. \end{aligned}$$

To platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Máme jedno řešení. Zkusíme jinou exponenciální funkci, $y(x) = e^{2x}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2e^{2x}, \\ y''(x) &= 4e^{2x}, \\ y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) &= 4e^{2x} - 6e^{2x} + 2e^{2x} = 0. \end{aligned}$$

Máme druhé řešení. Zkusíme i další exponenciální funkci, $y(x) = e^{3x}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= 3e^{3x}, \\ y''(x) &= 9e^{3x}, \\ y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) &= 9e^{3x} - 9e^{3x} + 2e^{3x} = 2e^{3x} \neq 0. \end{aligned}$$

Zkusíme obecnou exponenciální funkci $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda e^{\lambda x}, \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x}, \\ y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} - 3\lambda e^{\lambda x} + 2e^{\lambda x} = \\ &= (\lambda^2 - 3\lambda + 2) e^{\lambda x} = 0. \end{aligned}$$

Jelikož $e^{\lambda x} \neq 0$, bude tato rovnice splněna (pro všechna $x \in \mathbb{R}$), právě když $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. To je **algebraická** rovnice pro λ , která má řešení 1, 2 (která jsme již našli) a žádná jiná. Jakákoli lineární kombinace již nalezených

řešení, $y(x) = a e^x + b e^{2x}$, $a, b \in \mathbb{R}$, je rovněž řešením,

$$\begin{aligned} y'(x) &= a e^x + 2 b e^{2x}, \\ y''(x) &= a e^x + 4 b e^{2x}, \\ y''(x) - 3 y'(x) + 2 y(x) &= a e^x + 4 b e^{2x} - 3 (a e^x + 2 b e^{2x}) + 2 (a e^x + b e^{2x}) = \\ &= (a e^x - 3 a e^x + 2 a e^x) + (4 b e^{2x} - 6 b e^{2x} + 2 b e^{2x}) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Až se to naučíme, uvidíme, že jiná řešení nejsou; všechna řešení jsou tvaru $y(x) = a e^x + b e^{2x}$, $a, b \in \mathbb{R}$. To, že lineární kombinace řešení je rovněž řešením, je důsledek toho, že rovnice (9) je tvaru

$$L(y''(x), y'(x), y(x)) = 0,$$

kde funkce $L(u, v, w) = u - 3v + 2w$ je **lineární**.

To byl důležitý speciální případ a jeho obecné řešení vždy vypadá podobně. Hovoříme o **lineární diferenciální rovnici**, a to **homogenní**, neboť každý násobek řešení je rovněž řešením.

Řešení příkladu 91: Řešíme homogenní lineární diferenciální rovnici

$$y'(x) + c y(x) = 0.$$

Zkusíme najít její řešení ve tvaru exponenciální funkce $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) + c y(x) = \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = (\lambda + c) e^{\lambda x} = 0,$$

což je splněno (pro všechna $x \in \mathbb{R}$), právě když $\lambda + c = 0$, tj. $\lambda = -c$, $y(x) = e^{-cx}$. Každý násobek je rovněž řešením, dostáváme **obecné řešení** $y(x) = a e^{-cx}$, kde $c > 0$ je dáno zadáním, $a \in \mathbb{R}$ je libovolné. Později se dovíme, že jiná řešení neexistují.

Z podmínky $y(0) = a = \varrho_0$ dostáváme jediné **partikulární řešení** odpovídající zadání, $y(x) = \varrho_0 e^{-cx}$.

6.4 Homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Jsou tvaru

$$L(y^{(k)}(x), \dots, y'(x), y(x)) = 0,$$

kde $L: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární funkce, takže rovnice je tvaru

$$l_k y^{(k)}(x) + \dots + l_1 y'(x) + l_0 y(x) = 0, \quad (10)$$

kde $l_0, \dots, l_k \in \mathbb{R}$. (BÚNO $l_k = 1$.)

V tomto případě řešení existuje na celém \mathbb{R} . Skalární násobek i součet řešení je opět řešením, takže všechna řešení tvoří lineární podprostor prostoru všech funkcí na \mathbb{R} . Zbývá najít bázi tohoto podprostoru.

Hledejme nejprve řešení ve tvaru exponenciální funkce $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, neboť zde derivování odpovídá násobení konstantou,

$$y^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x} = \lambda^k y(x).$$

Rovnice (10) má pak tvar

$$l_k \lambda^k e^{\lambda x} + \dots + l_1 \lambda e^{\lambda x} + l_0 e^{\lambda x} = (l_k \lambda^k + \dots + l_1 \lambda + l_0) e^{\lambda x} = 0$$

a je splněna (pro všechna $x \in \mathbb{R}$), právě když

$$l_k \lambda^k + \dots + l_1 \lambda + l_0 = 0. \quad (11)$$

Tato rovnice se nazývá **charakteristická rovnice** lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (10). Její levá strana se nazývá **charakteristický polynom**. Další postup závisí na jeho kořenech.

6.4.1 Jednoduché kořeny

Má-li charakteristický polynom pouze **jednoduché reálné** kořeny, odpovídá každému z nich řešení $x \mapsto e^{\lambda x}$; všechna řešení dostaneme jako lineární kombinace předchozích. (Viz příklady 91, 96.)

Má-li charakteristický polynom **jednoduchý komplexní** kořen $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, odpovídá mu rovněž řešení $x \mapsto e^{\lambda x}$, kde exponenciální funkce komplexního argumentu je zavedena následovně:

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta.$$

Tato **Eulerova formule** byla objevena právě v souvislosti se studiem diferenciálních rovnic; L. Euler si všiml, že obě strany splňují stejnou diferenciální rovnici

$$y'(x) = i y(x)$$

se stejnou počáteční podmínkou $y(0) = 1$, jedná se tedy o stejnou funkci. Hodnoty $e^{i\beta}$, $\beta \in \mathbb{R}$, se nalézají na jednotkové kružnici. Pro $n \in \mathbb{Z}$ je

$$e^{2\pi i n} = \cos 2\pi n + i \sin 2\pi n = 1$$

a obecněji

$$e^{i(\beta + 2\pi n)} = \cos(\beta + 2\pi n) + i \sin(\beta + 2\pi n) = \cos \beta + i \sin \beta = e^{i\beta},$$

proto v komplexním oboru je exponenciální funkce **periodická** s periodou $2\pi i$. Další hodnoty dostaneme z vlastností exponenciální funkce:

$$e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha} e^{i\beta} = e^{\alpha} \cos \beta + i e^{\alpha} \sin \beta.$$

Složku řešení diferenciální rovnice odpovídající kořeni $\lambda = \alpha + i\beta$ charakteristického polynomu pak lze psát

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

My ovšem předpokládáme diferenciální rovnici s reálnými koeficienty a reálnou počáteční podmínkou; řešení musí být také reálné. V takovém případě je kořenem charakteristického polynomu i komplexně sdružené číslo $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, kterému odpovídá složka řešení

$$e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Zajímají nás jen takové lineární kombinace obou složek (s **komplexními** koeficienty $a_1 + i b_1$, $a_2 + i b_2$), které jsou reálné, tj. pro které má nulovou imaginární část výraz

$$\begin{aligned} & (a_1 + i b_1) e^{(\alpha + i\beta)x} + (a_2 + i b_2) e^{(\alpha - i\beta)x} = \\ & = e^{\alpha x} ((a_1 + i b_1) (\cos \beta x + i \sin \beta x) + (a_2 + i b_2) (\cos \beta x - i \sin \beta x)) = \\ & = e^{\alpha x} [(a_1 + a_2) \cos \beta x + (b_2 - b_1) \sin \beta x + \\ & + i \underbrace{((b_1 + b_2) \cos \beta x + (a_1 - a_2) \sin \beta x)}_0] \end{aligned}$$

(pro všechna x). To je splněno, právě když $a_2 = a_1$, $b_2 = -b_1$, takže reálná řešení jsou tvaru

$$(a_1 + i b_1) e^{(\alpha + i\beta)x} + (a_1 - i b_1) e^{(\alpha - i\beta)x} = 2 e^{\alpha x} (a_1 \cos \beta x - b_1 \sin \beta x),$$

tj. libovolné lineární kombinace složek

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Příklad 97. *Matematické kyvadlo má rovnici*

$$y''(x) = -\omega^2 \sin y(x).$$

Pro malé hodnoty přibližně nahrazujeme sinus jeho argumentem a dostaneme linearizovaný model s diferenciální rovnicí

$$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

má řešení $\lambda = \pm i\omega$. Původní diferenciální rovnice má obecné řešení

$$y(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x,$$

$a, b \in \mathbb{R}$. Přidáme-li počáteční podmínky $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, zbyde jediné partikulární řešení dané rovnicemi

$$\begin{aligned} y(0) &= a \cos 0 + b \sin 0 = a = 0, \\ y'(0) &= -a\omega \sin 0 + b\omega \cos 0 = b\omega = 1, \end{aligned}$$

s řešením $a = 0$, $b = 1/\omega$,

$$y(x) = \frac{1}{\omega} \sin \omega x.$$

DR-4

Příklad 98. Homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0$$

má příslušnou charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0,$$

která má řešení $-2 \pm i$. Obecné řešení je

$$y(x) = e^{-2x} (a \cos x + b \sin x),$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$. Přidáme-li **okrajové** podmínky $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} y(0) &= a = 1, \\ y(\pi/2) &= b e^{-\pi} = 0. \end{aligned}$$

Odtud $a = 1$, $b = 0$, partikulární řešení je

$$y(x) = e^{-2x} \cos x.$$

6.4.2 Násobné kořeny

Pokud charakteristický polynom má násobné kořeny, dostáváme řešení jiného tvaru. Složka odpovídající příslušnému jednoduchému kořeni zůstává, ale přibude nová složka.

DR-5

Příklad 99. Hledáme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

Charakteristický polynom

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9$$

má dvojnásobný kořen -3 . Řešením je nejen exponenciální funkce

$$y(x) = e^{-3x},$$

ale i

$$y(x) = x e^{-3x},$$

neboť pak

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{-3x} - 3x e^{-3x}, \\ y''(x) &= 9x e^{-3x} - 6e^{-3x}. \end{aligned}$$

Vyhovuje i jakákoli lineární kombinace předchozích řešení.

Je poněkud překvapivé, že pro násobný kořen dostáváme zcela jiný tvar řešení. Při libovolně malé změně koeficientů bychom dostali jednoduché kořeny a řešení jiného tvaru.

Věta 100. Všechna reálná řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s reálnými konstantními koeficienty

$$l_k y^{(k)}(x) + \dots + l_1 y'(x) + l_0 y(x) = 0$$

jsou (všechny) lineární kombinace složek odpovídajících kořenům charakteristického polynomu

$$l_k \lambda^k + \dots + l_1 \lambda + l_0.$$

Reálnému kořeni λ násobnosti m odpovídají složky řešení

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x}.$$

Komplexnímu kořeni $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, násobnosti m odpovídají složky řešení

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Příklad 101. Homogenní lineární diferenciální rovnice

$$y''''(x) + 10y'''(x) + 38y''(x) + 66y'(x) + 45y(x) = 0$$

má příslušný charakteristický polynom

$$\lambda^4 + 10\lambda^3 + 38\lambda^2 + 66\lambda + 45,$$

který má jednoduché kořeny $-2 \pm i$ a dvojnásobný kořen -3 . Obecné řešení je

$$y(x) = a e^{-2x} \cos x + b e^{-2x} \sin x + c e^{-3x} + d x e^{-3x},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Přidáme-li počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$, dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} y(0) &= a + c = 1, \\ y'(0) &= -2a + b - 3c + d = 0, \\ y''(0) &= 3a - 4b + 9c - 6d = 0, \\ y'''(0) &= -2a + 11b - 27c + 27d = 0. \end{aligned}$$

Odtud $a = -9$, $b = 9/2$, $c = 10$, $d = 15/2$, partikulární řešení je

$$y(x) = -9e^{-2x} \cos x + \frac{9}{2}e^{-2x} \sin x + 10e^{-3x} + \frac{15}{2}x e^{-3x}.$$

6.5 Nehomogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Jsou tvaru

$$L\left(y^{(k)}(x), \dots, y'(x), y(x)\right) = P(x),$$

kde $L: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární funkce a $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce proměnné x , zvaná **pravá strana** diferenciální rovnice. Tedy

$$l_k y^{(k)}(x) + \dots + l_1 y'(x) + l_0 y(x) = P(x), \quad (12)$$

kde $l_0, \dots, l_k \in \mathbb{R}$. (BÚNO $l_k = 1$.)

K libovolnému partikulárnímu řešení této rovnice lze přičíst libovolné řešení sdružené **homogenní** lineární diferenciální rovnice

$$L\left(y^{(k)}(x), \dots, y'(x), y(x)\right) = 0.$$

Tak dostaneme všechna řešení. Nezbytným krokem je tedy řešení homogenní lineární diferenciální rovnice na základě charakteristické rovnice (11).

Nalezení partikulárního řešení nehomogenní rovnice může být problém, který nemusí mít analytické řešení. Je však známo pro speciální případy.

6.5.1 Pravá strana je polynom

Je-li P polynom stupně n , pak hledáme partikulární řešení ve tvaru polynomu, např. metodou neurčitých koeficientů. To znamená, že dosadíme obecný polynom příslušného stupně a dostaneme soustavu (lineárních) rovnic pro jeho koeficienty.

Věta 102. *Mějme lineární diferenciální rovnici*

$$l_k y^{(k)}(x) + \dots + l_1 y'(x) + l_0 y(x) = Q_n(x),$$

kde Q_n je polynom stupně n .

Pokud nula není kořenem charakteristického polynomu (tj. pokud $l_0 \neq 0$), pak je partikulárním řešením rovnice polynom stupně n .

Pokud nula je m -násobným kořenem charakteristického polynomu (tj. pokud $l_0 = \dots = l_{m-1} = 0, l_m \neq 0$), pak je partikulárním řešením rovnice polynom $x \mapsto x^m T_n(x)$, kde T_n je polynom stupně n .

Všechna řešení dostaneme jako součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení sdružené homogenní lineární diferenciální rovnice.

DR-6

Příklad 103. *Řešme lineární diferenciální rovnici*

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x - 8.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

má řešení $-1, -2$, obecné řešení sdružené homogenní rovnice je

$$y_h(x) = a e^{-x} + b e^{-2x},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = Ax + B,$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$. Pak

$$y_p'(x) = A, \quad y_p''(x) = 0,$$

dosazením dostaneme

$$3A + 2(Ax + B) = (2A)x + (3A + 2B) = 4x - 8,$$

$$2A = 4, \quad 3A + 2B = -8,$$

$$A = 2, \quad B = -7,$$

$$y_p(x) = 2x - 7.$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = 2x - 7 + a e^{-x} + b e^{-2x},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

DR-7

Příklad 104. *Řešme lineární diferenciální rovnici*

$$y''(x) + 3y'(x) = 4x - 8.$$

(Od předchozího příkladu se liší jen vynecháním členu $2y(x)$.) Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0$$

má řešení $0, -3$, obecné řešení sdružené homogenní rovnice je

$$y_h(x) = a + b e^{-3x},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = x(Ax + B),$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$. Pak

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \quad y_p''(x) = 2A,$$

dosazením dostaneme

$$\begin{aligned} 2A + 3(2Ax + B) &= (6A)x + (2A + 3B) = 4x - 8, \\ 6A &= 4, \quad 2A + 3B = -8, \\ A &= \frac{2}{3}, \quad B = -\frac{28}{9}, \\ y_p(x) &= x\left(\frac{2}{3}x - \frac{28}{9}\right). \end{aligned}$$

Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = x\left(\frac{2}{3}x - \frac{28}{9}\right) + a + be^{-3x},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$.

6.5.2 Pravá strana je exponenciální funkce

Je-li P exponenciální funkce, hledáme partikulární řešení téhož tvaru.

Věta 105. Mějme lineární diferenciální rovnici

$$l_k y^{(k)}(x) + \dots + l_1 y'(x) + l_0 y(x) = Q e^{\alpha x},$$

kde $Q, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Pokud α není kořenem charakteristického polynomu, pak existuje partikulární řešení tvaru $A e^{\alpha x}$, $A \in \mathbb{R}$.

Pokud α je m -násobným kořenem charakteristického polynomu, pak existuje partikulární řešení tvaru $A x^m e^{\alpha x}$, $A \in \mathbb{R}$.

Všchna řešení dostaneme jako součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení sdružené homogenní lineární diferenciální rovnice.

DR-8

Příklad 106. Řešme lineární diferenciální rovnici

$$y'(x) - 2y(x) = e^{2x}.$$

Charakteristický polynom má jediný jednoduchý kořen 2, což je právě koeficient v exponentu na pravé straně. Hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y_p(x) &= Ax e^{2x}, \\ y_p'(x) &= 2Ax e^{2x} + A e^{2x}, \\ y_p'(x) - 2y_p(x) &= A e^{2x} = e^{2x}, \end{aligned}$$

takže $A = 1$, $y_p(x) = x e^{2x}$.

Obecné řešení sdružené homogenní diferenciální rovnice je

$$y_h(x) = C e^{2x},$$

kde $C \in \mathbb{R}$, obecné řešení původní nehomogenní diferenciální rovnice je

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = (x + C) e^{2x}.$$

Předchozí dvě věty vypovídají o případě, kdy pravá strana je konstanta, neboť ta je tvaru $Q = Q e^{\alpha x}$, kde $\alpha = 0$. Pro tento případ dávají stejný závěr, že existuje partikulární řešení tvaru Ax , $A \in \mathbb{R}$.

6.5.3 Pravá strana je harmonická funkce

Je-li P lineární kombinace goniometrických funkcí téhož argumentu, hledáme partikulární řešení téhož tvaru (tj. lineární kombinace goniometrických funkcí téhož argumentu).

Věta 107. *Mějme lineární diferenciální rovnici*

$$l_k y^{(k)}(x) + \dots + l_1 y'(x) + l_0 y(x) = Q \cos \beta x + S \sin \beta x,$$

kde $S, Q, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

Pokud β i není kořenem charakteristického polynomu, pak existuje partikulární řešení tvaru $A \cos \beta x + B \sin \beta x$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Pokud β i je m -násobným kořenem charakteristického polynomu, pak existuje partikulární řešení tvaru $x^m (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Všechna řešení dostaneme jako součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení sdružené homogenní lineární diferenciální rovnice.

DR-9

Příklad 108. *Řešme lineární diferenciální rovnici z příkladu 106 s jinou pravou stranou:*

$$y'(x) - 2y(x) = 4 \cos 2x.$$

Charakteristický polynom má jediný jednoduchý kořen 2. Hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A \cos 2x + B \sin 2x, \\ y'_p(x) &= -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \\ y'_p(x) - 2y_p(x) &= 2(B - A) \cos 2x - 2(A + B) \sin 2x = 4 \cos 2x. \end{aligned}$$

Poslední rovnost má platit pro všechna x , takže

$$-2(A + B) = 0, \quad 2(B - A) = 4,$$

$A = -1$, $B = 1$, $y_p(x) = \sin 2x - \cos 2x$.

Obecné řešení původní nehomogenní diferenciální rovnice je

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \sin 2x - \cos 2x + C e^{2x},$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

6.5.4 Obecnější pravá strana

Předchozí speciální případy mají společné zobecnění:

Věta 109. *Mějme lineární diferenciální rovnici*

$$l_k y^{(k)}(x) + \dots + l_1 y'(x) + l_0 y(x) = e^{\alpha x} (Q_n(x) \cos \beta x + S_n(x) \sin \beta x),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a Q_n, S_n jsou polynomy stupně nejvýše n .

Pokud $\alpha + i\beta$ není kořenem charakteristického polynomu, pak existuje partikulární řešení tvaru $e^{\alpha x} (T_n(x) \cos \beta x + U_n(x) \sin \beta x)$, kde T_n, U_n jsou polynomy stupně nejvýše n .

Pokud $\alpha + i\beta$ je m -násobným kořenem charakteristického polynomu, pak existuje partikulární řešení tvaru $x^m e^{\alpha x} (T_n(x) \cos \beta x + U_n(x) \sin \beta x)$, kde T_n, U_n jsou polynomy stupně nejvýše n .

Všechna řešení dostaneme jako součet tohoto partikulárního řešení a obecného řešení sdružené homogenní lineární diferenciální rovnice.

DR-10

Příklad 110. *Řešme lineární diferenciální rovnici z příkladu 106 s jinou pravou stranou:*

$$y'(x) - 2y(x) = 2e^{-x} \sin x.$$

Charakteristický polynom má jediný jednoduchý kořen 2. Hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A e^{-x} \cos x + B e^{-x} \sin x, \\ y'_p(x) &= (B - A) e^{-x} \cos x - (B + A) e^{-x} \sin x, \\ y'_p(x) - 2y_p(x) &= (B - 3A) e^{-x} \cos x - (3B + A) e^{-x} \sin x = 2e^{-x} \sin x. \end{aligned}$$

Poslední rovnost má platit pro všechna x , takže

$$B - 3A = 0, \quad -(3B + A) = 2,$$

$$B = -3/5, \quad A = -1/5,$$

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} e^{-x} \cos x - \frac{3}{5} e^{-x} \sin x.$$

Obecné řešení původní nehomogenní diferenciální rovnice je

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) = -\frac{1}{5} e^{-x} \cos x - \frac{3}{5} e^{-x} \sin x + C e^{2x},$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

Další zobecnění umožňuje linearita:

Věta 111. Mějme lineární diferenciální rovnici

$$l_k y^{(k)}(x) + \dots + l_1 y'(x) + l_0 y(x) = \sum_{j=1}^n P_j(x). \quad (13)$$

Je-li pro každé $j = 1, \dots, n$ funkce y_j řešením diferenciální rovnice

$$l_k y_j^{(k)}(x) + \dots + l_1 y_j'(x) + l_0 y_j(x) = P_j(x),$$

pak funkce

$$y(x) = \sum_{j=1}^n y_j(x)$$

je řešením diferenciální rovnice (13).

Stačí tedy, jestliže umíme najít partikulární řešení pro každý sčítanec na pravé straně.

DR-11

Příklad 112. Řešme lineární diferenciální rovnici z příkladu 106s jinou pravou stranou:

$$y'(x) - 2y(x) = e^{2x} + 3e^x.$$

Charakteristický polynom má jediný jednoduchý kořen 2. Pro pravou stranu e^{2x} již známe řešení $y_1(x) = x e^{2x}$. Pro pravou stranu $3e^x$ hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} y_2(x) &= A e^x, \\ y_2'(x) &= A e^x, \\ y_2'(x) - 2y_2(x) &= -A e^x = 3e^x, \end{aligned}$$

$$A = -3, \quad y_2(x) = -3e^x.$$

Obecné řešení původní nehomogenní diferenciální rovnice je

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) + y_h(x) = x e^{2x} - 3e^x + C e^{2x},$$

kde $C \in \mathbb{R}$.

6.5.5 Tlumený oscilátor

Sériový LRC oscilátor má diferenciální rovnici

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{u'(t)}{L},$$

kde i je proud, u budící napětí, R odpor, $L \neq 0$ indukčnost a $C \neq 0$ kapacita.

Bez buzení ($u(t) = 0$) bude proud konvergovat k nule, neboť energie se postupně ztrácí v rezistoru. Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{LC} i(t) = 0$$

závisí na řešeních charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0,$$

zejména na znaménku diskriminantu kvadratické rovnice, který je

$$\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC} = \frac{R}{L^2C} \left(RC - 4\frac{L}{R}\right).$$

Klíčovou roli proto hraje poměr časových konstant $RC, \frac{L}{R}$.

1. Pro $RC < 4\frac{L}{R}$ má charakteristický polynom dva různé komplexní kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \pm i\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC}$$

se zápornou reálnou částí a řešení

$$i(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (a \cos \omega t + b \sin \omega t),$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, což odpovídá tlumeným kmitům s vlastní frekvencí

$$\omega = \frac{\sqrt{4LC - R^2C^2}}{2LC} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

Speciálně pro $R = 0$ dostáváme netlumené kmity s frekvencí $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,

$$i(t) = a \cos \frac{1}{\sqrt{LC}}t + b \sin \frac{1}{\sqrt{LC}}t.$$

2. Pro $RC > 4\frac{L}{R}$ má charakteristický polynom dva různé reálné kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}$$

a řešení

$$i(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, což odpovídá aperiodickému průběhu.

3. Pro $RC = 4\frac{L}{R}$ má charakteristický polynom jeden dvojnásobný reálný kořen

$$\lambda = \frac{-R}{2L}$$

a řešení

$$i(t) = a e^{-\frac{R}{2L}t} + b t e^{-\frac{R}{2L}t},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, což odpovídá aperiodickému průběhu.

6.5.6 Buzený oscilátor

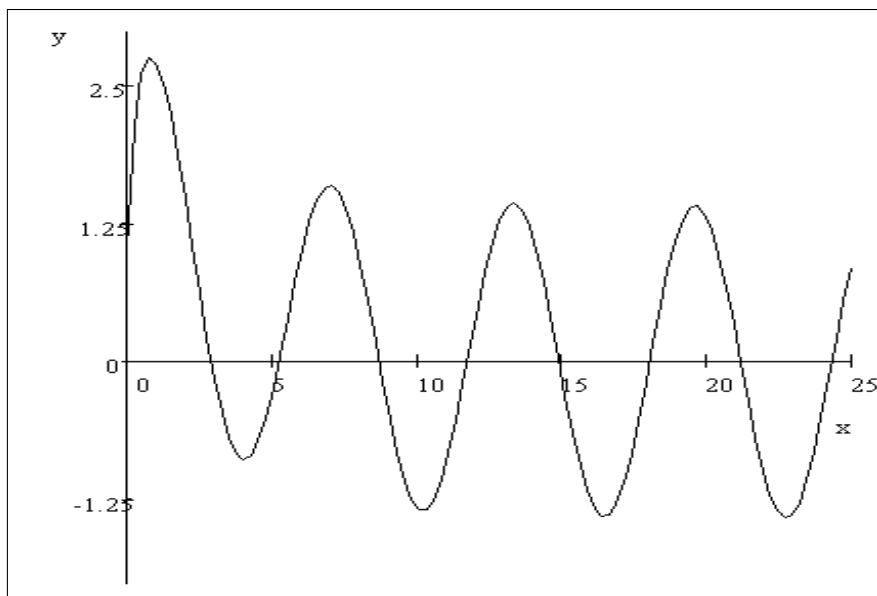
K sériovému LRC oscilátoru připojíme harmonické budící napětí $u(t) = \sin \beta t$, kde $\beta > 0$,

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{u'(t)}{L} = \frac{\beta}{L} \cos \beta t.$$

Dostaneme partikulární řešení tvaru

$$i(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t,$$

kde $A, B \in \mathbb{R}$. To odpovídá ustáleným harmonickým kmitům s budící úhlovou frekvencí β . Jak (rychle) se bude řešení blížit tomuto harmonickému průběhu, o tom rozhoduje řešení sdružené homogenní rovnice v závislosti na počátečních podmínkách.



Speciálně pro nulové tlumení, $R = 0$, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{L} \cos \beta t &= i''(t) + \frac{1}{LC} i(t) = \\ &= -(A\beta^2 \cos \beta t + B\beta^2 \sin \beta t) + \frac{1}{LC} (A \cos \beta t + B \sin \beta t) = \\ &= A \left(-\beta^2 + \frac{1}{LC} \right) \cos \beta t + B \left(-\beta^2 + \frac{1}{LC} \right) \sin \beta t. \end{aligned}$$

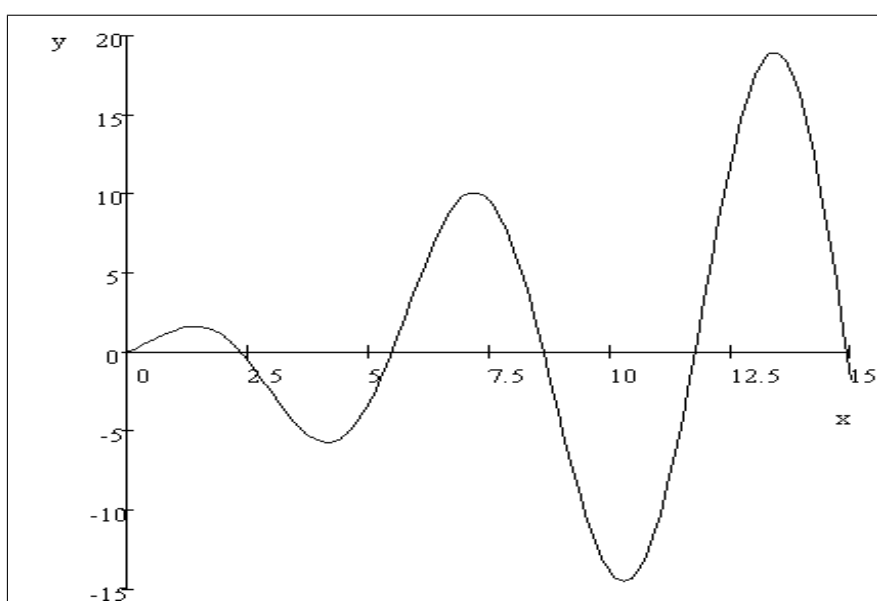
Pro $\beta \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$ dostáváme $B = 0$ a

$$A = \frac{\beta}{L \left(-\beta^2 + \frac{1}{LC} \right)}.$$

Amplituda $|A| \rightarrow \infty$ pro $\beta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Pro $\beta = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ předchozí závěry vůbec neplatí, protože β **je kořenem charakteristického polynomu**. Tento případ může nastat pouze pro nulové tlumení, $R = 0$, a rovnost vlastní a budící frekvence, $\omega = \beta$. Pak je partikulární řešení tvaru

$$t (A \cos \beta t + B \sin \beta t),$$



$A, B \in \mathbb{R}$. Jeho amplituda **lineárně roste**, takže řešení je **neomezené!** (S výjimkou případu $A = B = 0$.) Příčinou je **rezonance** – energie buzení se hromadí v oscilátoru a roste nade všechny meze.

Poznámka 113. *Může se zdát podivné, že partikulární řešení neobsahuje také členy tvaru*

$$a \cos \beta t + b \sin \beta t.$$

Ve skutečnosti je obsahuje, ale jako řešení sdružené homogenní rovnice.

6.6 Symbolické řešení diferenciálních rovnic

Je možné jen ve speciálních případech. Těch je popsáno mnoho, zde ukážeme jediný.

6.6.1 Separovatelné diferenciální rovnice

(Dle [Rektorys: Přehled, Tkadlec: Dif. rce].) Jde o diferenciální rovnice tvaru

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}, \quad y(x_0) = y_0, \quad (14)$$

kde g, h jsou spojité funkce jedné proměnné (s potřebnými definičními obory). Lze je přepsat do tvaru

$$h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x)$$

a integrovat každou stranu zvlášť,

$$\int_{x_0}^x h(y(\xi)) \cdot y'(\xi) \, d\xi = \int_{x_0}^x g(\xi) \, d\xi,$$

přičemž na levé použijeme substituci $\eta = y(\xi)$, $d\eta = y'(\xi) \, d\xi$,

$$\int_{y_0}^{y(x)} h(\eta) \, d\eta = \int_{x_0}^x g(\xi) \, d\xi. \quad (15)$$

Pokud tyto integrály umíme vypočítat, definují řešení.

Věta 114. *Nechť funkce g je spojitá na intervalu I , $x_0 \in I$, a h je spojitá a nenulová na intervalu J , $y_0 \in J$. Pak diferenciální rovnice*

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}, \quad y(x_0) = y_0,$$

má v dvojrozměrném intervalu $I \times J$ jediné řešení, dané rovnicí

$$\int_{y_0}^{y(x)} h(\eta) \, d\eta = \int_{x_0}^x g(\xi) \, d\xi.$$

Příklad 115. *Řešme diferenciální rovnici*

$$y'(x) = x (y(x))^3 \sin x$$

s počáteční podmínkou (a) $y(0) = 1$, (b) $y(0) = 0$.

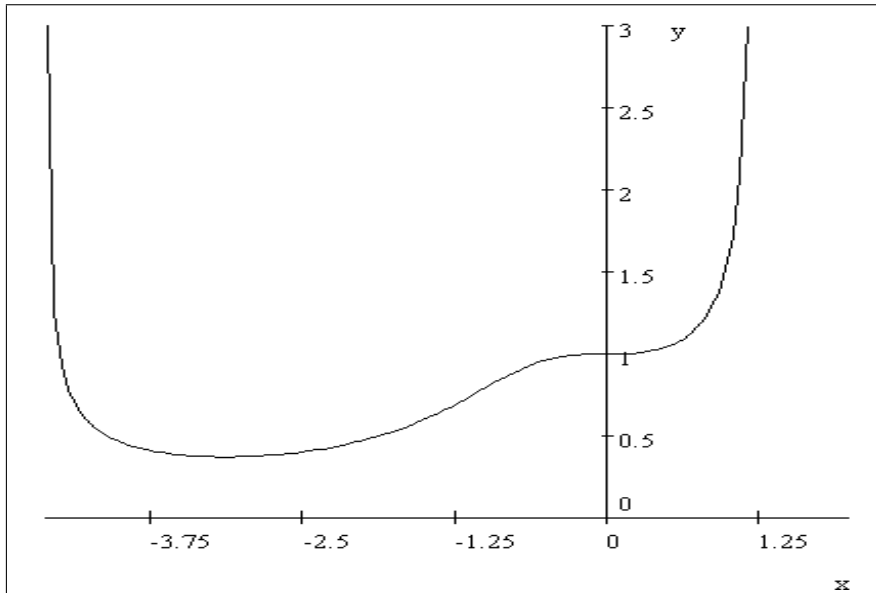
(a) Rovnice je tvaru

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}$$

pro $g(x) = x \sin x$, $h(\eta) = \frac{1}{\eta^3}$ (pokud není $\eta = y(x) \neq 0$ jako v případě (b)),

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{y(x)} h(\eta) \, d\eta &= \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{\eta^3} \, d\eta = \frac{-1}{2} \left[\frac{1}{\eta^2} \right]_{\eta=y_0}^{y(x)} = \\ &= \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{(y(x))^2} - \frac{1}{y_0^2} \right) = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{(y(x))^2} - 1 \right), \\ \int_{x_0}^x g(\xi) \, d\xi &= \int_{x_0}^x \xi \sin \xi \, d\xi = [\sin \xi - \xi \cos \xi]_{\xi=x_0}^x = \\ &= \sin x - x \cos x - \sin x_0 + x_0 \cos x_0 = \sin x - x \cos x, \\ \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{(y(x))^2} - 1 \right) &= \sin x - x \cos x, \\ y(x) &= \frac{1}{\sqrt{-2 \sin x + 2x \cos x + 1}}. \end{aligned}$$

(Řešení s opačným znaménkem nevyhovuje počáteční podmínce.) Diferenciální rovnice má řešení jen na intervalu, na kterém je výraz pod odmocninou kladný.



(b) Pro nulovou počáteční podmínku dostáváme i nulovou derivaci a konstantní řešení $y(x) = 0$.

Může se ovšem stát, že potřebné integrály symbolicky vypočítat nelze.

Příklad 116. Diferenciální rovnice

$$y'(x) = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{y(x)}{e^{y(x)}}, \quad y(2) = 1$$

je tvaru

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}$$

pro

$$g(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad h(\eta) = \frac{e^\eta}{\eta}.$$

Má v dvojrozměrném intervalu $(1, \infty) \times (0, \infty)$ jediné řešení, dané vzorcem

$$\int_1^{y(x)} \frac{e^\eta}{\eta} \, d\eta = \int_2^x \frac{1}{\ln \xi} \, d\xi.$$

Oba integrály jsou transcendentní funkce.

I když lze potřebné integrály vypočítat, neznamená to, že najdeme řešení v explicitním tvaru.

Příklad 117. Diferenciální rovnice

$$y'(x) = \frac{3x^2}{1-x^3} \cdot \frac{y(x)+1}{y(x)-1}, \quad y(0) = 0$$

je tvaru

$$y'(x) = \frac{g(x)}{h(y(x))}$$

pro

$$g(x) = \frac{3x^2}{1-x^3}, \quad h(\eta) = \frac{\eta-1}{\eta+1}.$$

Má v dvojrozměrném intervalu $(-\infty, 1) \times (-\infty, 1)$ jediné řešení, dané vzorcem

$$\int_0^{y(x)} \frac{\eta-1}{\eta+1} d\eta = \int_0^x \frac{3\xi^2}{1-\xi^3} d\xi, \\ y(x) - 2 \ln(y(x)+1) = -\ln(1-x^3). \quad (16)$$

Takto je funkce y dána implicitně, nelze ji vyjádřit v explicitním tvaru.

6.7 Numerické řešení diferenciálních rovnic

Je častou alternativou k symbolickému řešení. Omezíme se na jednu diferenciální rovnici 1. řádu.

Úloha: Na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ máme řešit diferenciální rovnici s počáteční podmínkou

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad (17)$$

kde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Vektor $(x, f(x, y))$ má směr tečny k řešení v bodě (x, y) (pokud existuje).

Ekvivalentní formulace úlohy:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, y(\xi)) d\xi.$$

Přibližné řešení: Interval $\langle x_0, x_n \rangle$ rozdělíme na n dílků intervalů délky $h = (x_n - x_0)/n$. Získáme **uzlové body** $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \dots, n$.

Správné hodnoty řešení v uzlových bodech, $y(x_i)$, nahradíme odhady y_i .

Generujeme posloupnost y_i , $i = 0, \dots, n$. Odhad y_{i+1} počítáme z odhadů y_0, \dots, y_i . Přesné řešení

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

odhadujeme pomocí

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi, y(\xi)) d\xi,$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i.$$

Jednotlivé metody se liší odhadem Δy_i .

6.7.1 Eulerova metoda

Funkci $\xi \rightarrow f(\xi, y(\xi))$ na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ přibližně nahradíme konstantou rovnou její hodnotě $f(x_i, y_i)$ v bodě x_i ,

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i, y_i) d\xi = h f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i).$$

Geometrický význam: $f(x_i, y_i)$ je směrnice úsečky vedené body (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) .

6.7.2 Odhad chyby

Taylorův rozvoj funkce y se středem v x_0 vyhodnotíme v bodě x_1 :

$$y(x_1) = y(x_0) + h y'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(\xi),$$

kde $\xi \in \langle x_0, x_1 \rangle$.

$$y(x_1) = \underbrace{y(x_0) + h f(x_0, y_0)}_{y_1} + \frac{h^2}{2} y''(\xi),$$
$$y(x_1) - y_1 = \frac{h^2}{2} y''(\xi).$$

Chyba na konci prvního kroku je úměrná h^2 .

V dalších krocích vycházíme z počáteční podmínky, která není přesná. Přesto lze za jistých podmínek odvodit, že chyba je zhruba úměrná h^2 a počtu kroků $n = \frac{x_n - x_0}{h}$.

Chyba na konci daného intervalu je úměrná $\frac{1}{h} h^2 = h \implies$ metoda je **1. řádu**.

Zmenšováním kroku lze zmenšit chybu metody za cenu větší pracnosti řešení (a numerických chyb).

Dokonalejší metody používají lepší aproximaci

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

a jejich chyba je pro malý krok úměrná h^p , $p > 1$. Pak hovoříme o metodě **řádu p** .

Označme

$\tilde{y}(x, h)$... numerické řešení v bodě x , získané s krokem h ,

$\tilde{y}(x, 2h)$... numerické řešení v bodě x , získané s krokem $2h$.

Chyba odhadu $\tilde{y}(x, h)$ bude zhruba $2^p \times$ menší než chyba odhadu $\tilde{y}(x, 2h)$

\implies **odhad chyby výsledku $\tilde{y}(x, h)$ metodou polovičního kroku:**

$$\tilde{y}(x, h) - y(x) \approx \frac{1}{2^p - 1} (\tilde{y}(x, 2h) - \tilde{y}(x, h)).$$

Není sice zaručený, zato snadno použitelný. Je ovšem nutné znát řád použité metody.

Problém: Pokud správné řešení jde do nekonečna, při numerickém řešení se na to nepříjde.

6.8 Obecnější úlohy

6.8.1 Soustavy diferenciálních rovnic

Hledáme více neznámých funkcí. Přitom vystačíme s diferenciálními rovnicemi 1. řádu. Např. jednu diferenciální rovnici k -tého řádu

$$L(y^{(k)}(x), \dots, y'(x), y(x)) = P(x)$$

lze nahradit soustavou k diferenciálních rovnic 1. řádu zavedením nových neznámých funkcí y_j , $j = 1, \dots, k-1$, s významem j -té derivace funkce y ,

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y'(x), \\ y_2(x) &= y_1'(x), \\ &\vdots \\ y_{k-1}(x) &= y_{k-2}'(x), \\ L(y_{k-1}'(x), y_{k-1}(x), \dots, y_1(x), y(x)) &= P(x). \end{aligned} \tag{18}$$

Obdobně převedeme počáteční podmínky. Naopak lze aspoň v některých případech soustavu diferenciálních rovnic převést do tohoto tvaru a nahradit ji jedinou diferenciální rovnicí vyššího řádu.

Speciálně **soustava lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty** je tvaru

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) + \cdots + a_{1k} y_k(x) + b_1(x), \\ y_2'(x) &= a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) + \cdots + a_{2k} y_k(x) + b_2(x), \\ &\vdots \\ y_k'(x) &= a_{k1} y_1(x) + a_{k2} y_2(x) + \cdots + a_{kk} y_k(x) + b_k(x), \end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Lze ji převést na jedinou lineární diferenciální rovnici k -tého řádu s konstantními koeficienty, a to přes tvar (18), získaný eliminací obdobnou Gaussově-Jordanově. Charakteristická rovnice vyjde

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

a \mathbf{I} je jednotková matice téhož typu. Kořeny charakteristické rovnice určují složky řešení; znaménka jejich reálných částí rozhodují o stabilitě řešení.

6.8.2 Okrajové úlohy

Pro **Cauchyho počáteční úlohu** je charakteristické, že partikulární řešení je dáno podmínkami (pro hledané funkce a jejich derivace) v jednom **počátečním bodě**.

Pokud jsou dány podmínky ve více bodech (např. v počátečním a koncovém bodě hledaného řešení), pak hovoříme o **okrajové úloze**.

Podmínky existence a jednoznačnosti řešení okrajových úloh jsou složitější.

6.8.3 Parciální diferenciální rovnice

Dosud jsme studovali pouze **obyčejné** diferenciální rovnice, kde řešením jsou funkce jedné proměnné.

Často je třeba řešit **parciální** diferenciální rovnice, kde řešením jsou funkce více proměnných a jsou dány podmínky pro jejich parciální derivace.

Podmínky pro partikulární řešení pak mohou mít mnoho jiných tvarů. Např. okrajové podmínky mohou specifikovat hodnoty na okraji oblasti, na níž máme úlohu řešit.

Příklad 118. *Změny teploty nebo koncentrace $u(x, y, z, t)$ v závislosti na prostorových souřadnicích x, y, z a čase t jsou popsány parciálními diferenciálními rovnicemi difuze, které mají v nejjednodušším případě tvar*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

kde $c > 0$ (argumenty x, y, z, t funkce u jsou pro stručnost vynechány), neboli

$$D_4 u = c (D_{1,1} u + D_{2,2} u + D_{3,3} u) = c \Delta u,$$

kde

$$\Delta = D_{1,1} + D_{2,2} + D_{3,3}$$

je **Laplaceův operátor**.

Příklad 119. *Šíření elektromagnetických vln v prostoru a čase je popsáno parciálními diferenciálními rovnicemi (Maxwellovými).*

Příklad 120. *Máme odhadnout proudění neprůhledné kapaliny, jestliže vidíme (přes průhlednou nádobu) pouze její proudění na povrchu. (To se skutečně používá pro sledování průběhu míchání při chemických reakcích nebo výrobě betonu.)*

6.8.4 Variační úlohy

Někdy hledáme neznámou funkci, splňující podmínku, která není ve tvaru diferenciální rovnice, ale např. integrálu určitých kritérií.

Příklad 121. Máme najít nejrychlejší (nebo energeticky nejvýhodnější) cestu z jednoho místa prostoru do druhého. Přitom jsme vázáni podmínkami, které určují rychlost postupu (např. odpor prostředí, setrvačnost atd.). Řešením bude parametrický popis optimální trajektorie.

Tyto úlohy lze jen někdy převést na řešení diferenciálních rovnic.

Obecně se jimi zabývá **variační počet**, který je zobecněním předchozích postupů matematické analýzy.

7 Fourierovy řady

Fixujme frekvenci $\varphi = 1/T$, kde T je perioda, resp. **úhlovou frekvenci** $\omega = 2\pi\varphi$.

Harmonické funkce s touto frekvencí jsou tvaru lineárních kombinací

$$a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t.$$

Obecněji použijeme **vyšší harmonické** s úhlovou frekvencí $k\omega = 2\pi k\varphi$, kde $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

Pro úplnost přidáme i nultou harmonickou tvaru

$$a_0 \cos 0\omega t + b_0 \sin 0\omega t = a_0.$$

Budeme pracovat v lineárním prostoru P_ω všech funkcí, které jsou lineárními kombinacemi všech harmonických, tj. tvaru

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2\pi k \frac{t}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2\pi k \frac{t}{T}. \end{aligned} \tag{19}$$

Tomuto tvaru říkáme **Fourierova řada**.

Požadujeme konvergenci sum, k tomu je **nutná** podmínka

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k,$$

postačující podmínkou je absolutní konvergence posloupností koeficientů:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty.$$

Značení: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Všechny funkce z prostoru P_ω jsou periodické s periodou $T = 2\pi/\omega$.

Problém: Jak k dané periodické funkci najít její Fourierovu řadu?

V prostoru P_ω definujeme **skalární součin**

$$f \bullet g = \int_0^T f(t)g(t) dt.$$

Ověříme vlastnosti skalárního součinu:

1. $f \bullet g = g \bullet f$ triviálně z komutativity násobení funkcí,

2. $f \bullet (g + h) = f \bullet g + f \bullet h$ z linearity integrálu,
3. $(c f) \bullet g = c (f \bullet g)$ z linearity integrálu,
4. $f \bullet f \geq 0$, neboť $f \bullet f = \int_0^T (f(t))^2 dt$ je integrál z nezáporné funkce,
5. $f \bullet f = 0$, právě když $f = 0$; pouze zde je problém, musíme ztotožnit funkce, které se liší jen na množině nulové míry (a mají stejné integrály).

Poznámka 122. Vzhledem k periodicitě lze integrovat místo přes interval $(0, T)$ přes libovolný interval délky T , tj. $(c, c + T)$, $c \in \mathbb{R}$, např. přes interval $(-T/2, T/2)$.

Od skalárního součinu je odvozena norma

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^T (f(t))^2 dt}.$$

(Bez předchozího ztotožnění by to byla jen pseudonorma, která je nulová i pro některé nenulové prvky.) Konvergencí posloupnosti funkcí f_n , $n \in \mathbb{N}$, rozumíme **konvergenci v normě**, tj. $f_n \rightarrow f$, právě když $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ pro $n \rightarrow \infty$. To **není** totéž jako **bodová konvergence**

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) \rightarrow f(x).$$

Příklad 123. Posloupnost funkcí f_n , $n \in \mathbb{N}$, s periodou T , definovaných na $\langle 0, T \rangle$ vzorcem

$$f_n(x) = e^{-nx},$$

konverguje bodově k funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0, \\ 0 & \text{pro } x \in (0, T), \end{cases}$$

v normě konverguje ke g , stejně jako k nulové funkci. (Tyto funkce se liší jen hodnotou v bodě 0, což nerozlišujeme.)

Příklad 124. Posloupnost funkcí f_n , $n \in \mathbb{N}$, s periodou T , definovaných na $\langle 0, T \rangle$ vzorcem

$$f_n(x) = (-1)^n e^{-nx},$$

nemá bodovou limitu v 0, ale konverguje v normě k nulové funkci.

Podle definice tvoří bázi prostoru P_ω funkce proměnné t

$$1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots$$

Tvrzení 125. Tato báze je **ortogonální**, neboť pro všechna $j, k \in \mathbb{N}_0$, $j \neq k$, platí

$$\begin{aligned} \int_0^T (\cos j \omega t) (\cos k \omega t) dt &= 0, \\ \int_0^T (\sin j \omega t) (\sin k \omega t) dt &= 0, \\ \int_0^T (\cos j \omega t) (\sin k \omega t) dt &= 0. \end{aligned}$$

(Poslední vzorec platí i pro $j = k$.)

Důkaz. Poslední vzorec je integrál liché funkce, kterou díky periodicitě lze integrovat přes interval $(-T/2, T/2)$. První dva vzorce jsou integrály sudých funkcí, které jsou však součtem harmonických funkcí s periodou T :

$$\begin{aligned} \int_0^T (\cos j \omega t) (\cos k \omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T (\cos(j-k)\omega t + \cos(j+k)\omega t) dt = 0, \\ \int_0^T (\sin j \omega t) (\sin k \omega t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^T (\cos(j-k)\omega t - \cos(j+k)\omega t) dt = 0, \end{aligned}$$

□

Z ortogonální báze lze udělat **ortonormální**, pokud její prvky vynásobíme vhodnými konstantami. Ty dostaneme ze vztahů

$$\int_0^T (\cos k \omega t)^2 dt = \frac{T}{2},$$

$$\int_0^T (\sin k \omega t)^2 dt = \frac{T}{2},$$

pro $k \neq 0$,

$$\int_0^T (\cos 0 \omega t)^2 dt = T.$$

Ortonormální bázi prostoru P_ω tvoří funkce

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \omega t, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \omega t, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos 2 \omega t, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin 2 \omega t, \dots$$

Z lineární algebry víme, že souřadnice vektoru vzhledem k ortonormální bázi jsou jeho skalární součiny s vektory báze. (Pro ortogonální bázi je třeba skalární součin ještě vydělit vhodnou konstantou, kterou dostaneme, když postup aplikujeme na vektor báze.)

Věta 126. *Koeficienty Fourierovy řady funkce $f \in P_\omega$ jsou*

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k \omega t dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k \omega t dt.$$

Poznámka 127. (Abychom měli i pro a_0 stejný vzorec, někdy se ve Fourierově řadě (19) používá absolutní člen ve tvaru $\frac{a_0}{2}$.)

Důsledek 128. *Je-li funkce f **lichá**, pak $a_k = 0$, je-li f **sudá**, pak $b_k = 0$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.*

Důkaz. Integrand je lichá funkce g s periodou T , kterou můžeme integrovat též přes interval $(-T/2, T/2)$,

$$\begin{aligned} \int_0^T g(t) dt &= \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt = \int_{-T/2}^0 g(t) dt + \int_0^{T/2} g(t) dt = \\ &= - \int_0^{T/2} g(u) du + \int_0^{T/2} g(t) dt = 0. \end{aligned}$$

□

Důsledek 129. *Koeficienty Fourierovy řady závisí na funkci lineárně.*

Důsledek 130 (Riemannova věta). *Je-li f po částech spojitá funkce, pak*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) \cos k \omega t dt = 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T f(t) \sin k \omega t dt.$$

Důkaz. Vliv mají pouze hodnoty na intervalu $(0, T)$, mimo něj můžeme funkci dodefinovat jako periodickou s periodou T ; pak integrály jsou úměrné koeficientům Fourierovy řady. Z její konvergence vyplývá, že koeficienty konvergují k 0.

□

Příklad 131. *Funkce $f(t) = |\sin t|$ má periodu $T = \pi$, tj. $\omega = 2$, není harmonická; její Fourierova řada je tvaru*

$$a_0 + a_1 \cos 2t + b_1 \sin 2t + a_2 \cos 4t + b_2 \sin 4t + \dots$$

s koeficienty

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \, dt = \frac{2}{\pi},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos 2k t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(1-2k)t + \sin(1+2k)t) \, dt =$$

$$= \frac{4}{(1-(2k)^2)\pi},$$

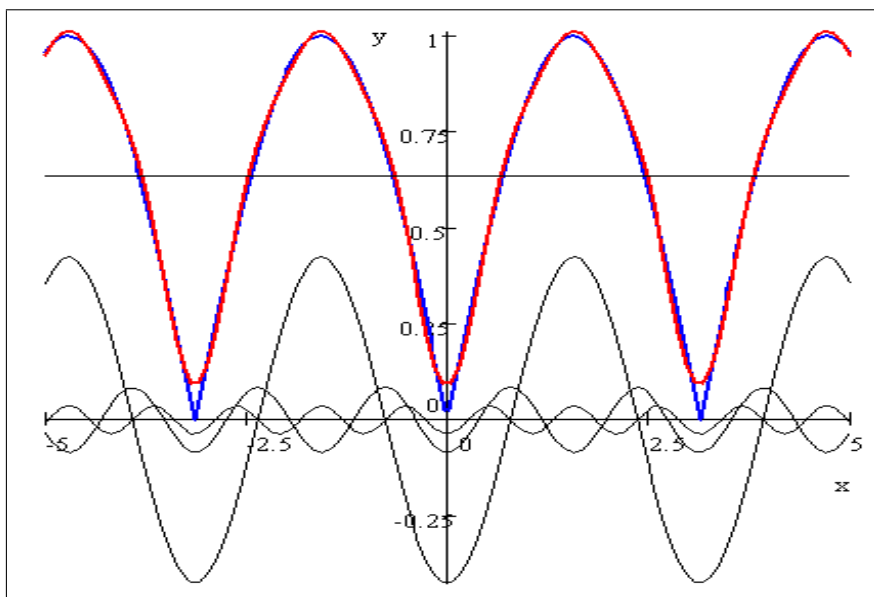
$$a_1 = -\frac{4}{3\pi}, \quad a_2 = -\frac{4}{15\pi}, \quad a_3 = -\frac{4}{35\pi}, \dots$$

Koeficienty b_k jsou nulové, protože funkce f je sudá; Fourierova řada je tvaru

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(1-(2k)^2)\pi} \cos 2k t =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 2t - \frac{4}{15\pi} \cos 4t - \frac{4}{35\pi} \cos 6t - \dots$$

Následující obrázek ukazuje původní funkci (modře), první čtyři složky Fourierovy řady (černě) a jejich součet (červeně):



Příklad 132. Kdybychom si v předchozím příkladu nevšimli, že funkce $f(t) = |\sin t|$ má periodu $T = \pi$, a použili periodu $T = 2\pi$, tj. $\omega = 1$, dostali bychom Fourierovu řadu tvaru

$$A_0 + A_1 \cos t + B_1 \sin t + A_2 \cos 2t + B_2 \sin 2t + \dots$$

s koeficienty

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t| \, dt = \frac{2}{\pi},$$

$$A_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t| \cos k t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(1-k)t + \sin(1+k)t) \, dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{(1-k^2)\pi} & \text{pro } k \text{ sudé,} \\ 0 & \text{pro } k \text{ liché.} \end{cases},$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{4}{3\pi}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -\frac{4}{15\pi}, \dots$$

a $B_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Výsledná Fourierova řada je stejná,

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 2t - \frac{4}{15\pi} \cos 4t - \frac{4}{35\pi} \cos 6t - \dots$$

Otázka, které funkce lze vyjádřit Fourierovou řadou, je složitá, **postačující** jsou **Dirichletovy podmínky** [Wrede, Spiegel]:

1. Funkce f je periodická s periodou T .
2. Funkce f je definovaná kromě konečně mnoha bodů v každé periodě.
3. Funkce f' je po částech spojitá.

Věta 133. Při splnění Dirichletových podmínek Fourierova řada funkce f konverguje v bodě x

- k $f(x)$, je-li f v x **spojitá**,
- obecně $k \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-))$.

Důsledek 134. Každá funkce na \mathbb{R} , která je periodická s periodou T a po částech **spojitá** i se svou derivací, je tvaru Fourierovy řady (19).

To je téměř univerzální nástroj pro popis periodických funkcí.

Věta 135. Fourierovu řadu lze derivovat i integrovat člen po členu (u derivace potřebujeme navíc předpoklad, že je spojitá), např.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \omega t \right) = - \sum_{k=0}^{\infty} a_k k \omega \sin k \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k k \omega \cos k \omega t.$$

7.1 Parsevalova rovnost

Příklad 136. Při konstantním odporu je výkon úměrný druhé mocnině proudu, resp. napětí. Průměrný výkon při periodickém průběhu je úměrný integrálu tohoto kvadrátu přes jednu periodu.

I jinde je průměrný výkon úměrný integrálu kvadrátu nějaké veličiny přes jednu periodu.

Zajímá nás veličina

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt \quad (20)$$

Vyjádříme funkci f ve tvaru Fourierovy řady a dosadíme do předchozího vzorce. V důsledku ortogonalit zbydou pouze kvadráty bázových funkcí,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \omega t \right)^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k \omega t)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \sin k \omega t)^2 \right) dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T (a_k \cos k \omega t)^2 dt + \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T (b_k \sin k \omega t)^2 dt = \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2}. \end{aligned}$$

Výkon odpovídající periodické funkci je součtem výkonů jejích harmonických.

Věta 137 (Parsevalova rovnost). Pokud funkce

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \omega t,$$

splňuje Dirichletovy podmínky, pak

$$\frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2},$$

kde

$$\sqrt{\frac{a_k^2 + b_k^2}{2}}$$

je **efektivní hodnota** veličiny s harmonickým průběhem

$$a_k \cos k \omega t + b_k \sin k \omega t.$$

Pouze pro $k = 0$ je efektivní hodnota rovna amplitudě, neboť se jedná o konstantní funkci.

Příklad 138. V příkladu 131 nám vyšlo

$$\begin{aligned} |\sin t| &= \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(1 - (2k)^2) \pi} \cos 2kt = \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 2t - \frac{4}{15\pi} \cos 4t - \frac{4}{35\pi} \cos 6t - \dots \end{aligned}$$

Pro kvadrát (výkon) by nám vyšlo z Parsevalovy rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (\sin t)^2 dt &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(1 - (2k)^2) \pi}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{15\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{35\pi}\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Levá strana je $1/2$, napravo máme netriviální sumu, pro niž dostáváme vztah

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(1 - (2k)^2) \pi}\right)^2, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - (2k)^2)^2} &= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

7.2 Fourierova řada v komplexním tvaru

Fourierovu řadu funkce f ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k \omega t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k \omega t$$

upravíme pomocí vztahů

$$\begin{aligned} \cos k \omega t &= \frac{1}{2} (e^{i k \omega t} + e^{-i k \omega t}), \\ \sin k \omega t &= \frac{1}{2i} (e^{i k \omega t} - e^{-i k \omega t}) \end{aligned}$$

a dostaneme ji ve tvaru

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i k \omega t},$$

kde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0, \\ c_k &= \frac{1}{2} (a_k - i b_k), \\ c_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + i b_k) = \overline{c_k} \end{aligned}$$

pro $k \in \mathbb{N}$. Pro všechna $k \in \mathbb{Z}$ lze koeficienty určit z integrálu

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i k \omega t} dt.$$

7.3 Sinová Fourierova řada

Fourierovy řady lze odvodit i od jiných ortogonálních systémů funkcí, např.

$$\sin \omega t, \sin 2 \omega t, \sin 3 \omega t, \dots$$

Takto lze vyjádřit **liché** funkce s periodou $T = 2\pi/\omega$, resp. téměř libovolné funkce na intervalu $(0, T/2)$ (které lze dodefinovat na intervalu $(-T/2, 0)$ tak, aby byly liché, a na zbývajících hodnotách tak, aby měly periodu T). Dostáváme **sinovou** Fourierovu řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin k \omega t = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k \pi t}{L},$$
$$B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k \omega t dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{k \pi t}{L} dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

kde $L = T/2$.

7.4 Kosinová Fourierova řada

Použitím ortogonálního systému funkcí

$$1, \cos \omega t, \cos 2 \omega t, \cos 3 \omega t, \dots$$

lze vyjádřit **sudé** funkce s periodou $T = 2\pi/\omega$, resp. téměř libovolné funkce na intervalu $(0, T/2)$ (které lze dodefinovat na intervalu $(-T/2, 0)$ tak, aby byly sudé, a na zbývajících hodnotách tak, aby měly periodu T). Dostáváme **kosinovou** Fourierovu řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos k \omega t = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \frac{k \pi t}{L},$$
$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) dt,$$
$$A_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k \omega t dt = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{k \pi t}{L} dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

kde $L = T/2$.

7.5 Aplikace: pohyb struny

(Dle [Wrede, Spiegel].)

Poloha $y(x, t)$ netlumené struny v bodě x v čase t je v nejjednodušším případě popsána **vlnovou rovnicí**

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2},$$

kde $\alpha > 0$. (Zrychlení je úměrné zakřivení a má stejné znaménko.) To je homogenní **lineární parciální** diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Navíc máme okrajové podmínky

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $0, L$ jsou koncové body struny, a počáteční podmínky

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad y(x, 0) = f(x), \quad x \in \langle 0, L \rangle,$$

tj. počáteční rychlost je nulová a počáteční poloha je dána nějakou funkcí f , která má spojitou 2. derivaci a je nulová v koncových bodech.

Pokud by počáteční poloha byla

$$f(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad b_1 \in \mathbb{R},$$

dostali bychom

$$\frac{\partial^2 y(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 b_1 \sin \frac{\pi x}{L} = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 f(x) = -\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 y(x, 0),$$

tj. zrychlení je úměrné výchylce. Koefficient úměrnosti je záporný a **nezávislý** na x . Tato úměra zůstane zachována i v čase a každý bod bude vykonávat harmonický pohyb, který je řešením diferenciální rovnice

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\alpha^2 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 y(x, t).$$

Řešení je

$$y(x, t) = A(x) \cos \frac{\pi \alpha t}{L} + B(x) \sin \frac{\pi \alpha t}{L},$$

počátečním podmínkám vyhovuje pouze $B(x) = 0$, $A(x) = f(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{L}$,

$$y(x, t) = b_1 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi \alpha t}{L}.$$

Obecněji, pokud by počáteční poloha byla

$$f(x) = b_k \sin \frac{k \pi x}{L}, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

dostali bychom

$$\frac{\partial^2 y(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -\left(\frac{k \pi}{L}\right)^2 b_k \sin \frac{k \pi x}{L} = -\left(\frac{k \pi}{L}\right)^2 f(x) = -\left(\frac{k \pi}{L}\right)^2 y(x, 0),$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\alpha^2 \left(\frac{k \pi}{L}\right)^2 y(x, t),$$

$$y(x, t) = b_k \sin \frac{k \pi x}{L} \cos \frac{k \pi \alpha t}{L}.$$

Díky linearitě můžeme pro počáteční podmínku tvaru sinové Fourierovy řady

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k \pi x}{L}$$

psát řešení ve tvaru

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k \pi x}{L} \cos \frac{k \pi \alpha t}{L}.$$

7.6 Užití Fourierových řad

Dovolují aproximaci i zpracování periodických signálů.

Např. můžeme stanovit odezvu systému na periodický vstup tak, že vyřešíme případy, kdy vstup je harmonický, a výsledek dostaneme jako jejich lineární kombinaci. Takto lze i kompenzovat nedostatky frekvenční charakteristiky přenosové cesty nebo záznamového média. To je možné za předpokladu, že systém splňuje princip superpozice, tj. že je **lineární**.

Důležitý důsledek je, že energie periodického signálu je dána součtem energií jednotlivých harmonických, které jej tvoří.

Pokud je signál frekvenčně omezený (vysoké frekvence se v něm nevyskytují, nejsou podstatné, nebo pocházejí z šumu), lze nepotřebné frekvence vynechat vypuštěním (vynulováním) příslušných koeficientů. Pak lze posíláním Fourierových koeficientů místo původního průběhu docílit kompresi informace. Navíc lze zpracovávat zvlášť amplitudu a fázi jednotlivých frekvencí a vynechat informaci o fázi, pokud není důležitá, např. při vnímání zvuku (mono, nikoli stereo). Podmínkou je, že signál je periodický, nebo jej lze považovat za součást periodického průběhu. Není možné použít přímo tento princip on-line.

8 Fourierova transformace

Doporučená literatura: [CRC Encyclopedia].

8.1 Motivace

Fourierovy řady se osvědčily pro zpracování signálů, které obsahují pouze násobky určité základní frekvence. Je žádoucí hledat analogie i pro neperiodické funkce (signály tvaru jednoho impulzu, který se neopakuje). Jednou z možností je snižování této frekvence k nule, takže nakonec postihneme všechny možné frekvence. Tomu odpovídá zvětšování periody do nekonečna. Abychom popsali průběh po celé reálné ose, vyjdeme ze symetrického intervalu $(-T/2, T/2)$. V této kapitole ω **neznačí** $2\pi/T$.

8.1.1 Změna základní frekvence Fourierovy řady

Fourierova řada v komplexním tvaru je

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i \frac{k}{T} t},$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{k}{T} t} dt,$$

kde f je funkce s periodou T . Pak f má i periodu nT , $n \in \mathbb{N}$, pro kterou dostáváme Fourierovu řadu (viz př. 132)

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m/n} e^{2\pi i \frac{m}{nT} t},$$

$$c_{m/n} = \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{m}{nT} t} dt.$$

Koeficient $c_{m/n}$ odpovídá frekvenci $2\pi \frac{m}{nT}$. Pokud $m = kn$, $k \in \mathbb{N}$, je koeficient $c_{m/n} = c_{kn/n} = c_k$ stejný jako pro **odpovídající** frekvenci $\omega = 2\pi \frac{m}{nT} = 2\pi \frac{k}{T}$ Fourierovy řady s periodou T , a to

$$C(\omega) = c_k = c_{kn/n} = \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{k}{T} t} dt = \tag{21}$$

$$= \frac{\omega}{2\pi n} \int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

nezávisle na n , tj. na tom, jakou základní frekvenci, resp. periodu jsme zvolili. (Pokud f má i tuto periodu.)

V ostatních případech, kdy m není násobkem n , je příslušný koeficient $c_{m/n} = 0$. (Plyne z ortogonality použitého systému funkcí, též z jednoznačnosti Fourierovy řady.) Dostáváme tedy více koeficientů („ $n \times$ více“), ale z nich jen každý n -tý je nenulový (rovný příslušnému koeficientu původní řady). Výsledný tvar Fourierovy řady je stejný.

Kdyby však původní signál obsahoval i nižší frekvence, které jsou násobkem $\frac{2\pi}{nT}$, ale nikoli násobkem $\frac{2\pi}{T}$, pak by je vystihovaly nenulové koeficienty v nové Fourierově řadě, zatímco původní řada by tyto frekvence neobsahovala.

8.1.2 Fourierův obraz jako analogie Fourierovy řady pro neperiodické funkce

Fourierovy řady přinesly užitečný nástroj; zkusme jej použít pro neperiodický průběh. Nechť funkce f je **spojitá**, není periodická, ale nabývá nenulových hodnot jen na nějakém omezeném intervalu (vstupní signál omezené amplitudy i délky). Složka signálu odpovídající (úhlové) frekvenci $\omega \neq 0$ bude dle (21) úměrná výrazu

$$C(\omega) = \frac{\omega}{2\pi n} \int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega} f(t) e^{-i\omega t} dt \tag{22}$$

za předpokladu, že integrační interval pokrývá všechny nenulové hodnoty funkce f , tj. že $n \in \mathbb{N}$ je dostatečně velké. Zajímá nás tedy limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega}{2\pi n} \int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Pro funkci s periodou $2\pi/\omega$ se jednalo o limitu konstantní posloupnosti, neboť jak integrál, tak jmenovatel před ním je úměrný n . Pro zde použité předpoklady bychom však dostali nulu, protože integrál se pro velké hodnoty n nemění a dělíme jej n . Zato existuje limita

$$F(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \quad (23)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-\omega t) dt, \quad (24)$$

a to i pro $\omega = 0$ a pro všechna záporná ω , neboť

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t) e^{-i\omega t}} dt = \overline{F(\omega)}.$$

Funkce $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definovaná vzorcem (23) se nazývá **Fourierův obraz** funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a zobrazení \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F}(f) = F$$

se nazývá **(přímá) Fourierova transformace**.

8.1.3 Obecnější předpoklady Fourierovy transformace

Protože funkci f chceme pouze integrovat, stačí, je-li po částech spojitá (s **konečně mnoha** nespojitostmi).

Nemusí být nulová mimo nějaký omezený interval, stačí, když v $\pm\infty$ konverguje k nule „dostatečně rychle“, např. exponenciálně, tj.

$$\forall t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq A e^{-\alpha|t|}$$

pro nějaká $A, \alpha > 0$. (Tato nerovnost smí být porušena na nějakém **omezeném** intervalu.) Potřebujeme totiž, aby integrál

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

konvergoval (absolutně), tj. aby existoval konečný integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

(*To není postačující podmínka.*) Limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n\pi/\omega}^{n\pi/\omega} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

může existovat i za obecnějších předpokladů.

Lze připustit, aby funkce f nabývala i komplexních hodnot, i když pak postrádá předchozí motivaci. Rovnost $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ platí jen pro Fourierův obraz **reálné** funkce.

8.2 Zpětná Fourierova transformace

Účelem Fourierových koeficientů byla aproximace původní funkce pomocí goniometrických funkcí, tj. Fourierovy řady. Tuto možnost dává i Fourierova transformace, z Fourierova obrazu najdeme (přibližně) vzor, nyní ne jako sumu, ale jako integrál:

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Ten je navíc téměř stejného tvaru jako přímá Fourierova transformace (s vyměněnou rolí reálných argumentů t, ω), liší se pouze znaménkem v exponentu (tj. orientací reálné osy) a multiplikační konstantou $\frac{1}{2\pi}$.

Poznámka 139. *Ještě lepší shodu obou vzorců bychom dosáhli, kdybychom multiplikační konstantu $\frac{1}{2\pi}$ rozdělili do obou vzorců, které by pak měly tvar (který používá Mathematica)*

$$F^*(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

To se často dělá, stejně jako změna měřítka pro t, ω . V literatuře se proto setkáme s mnoha různými vzorci, které se liší lineární změnou měřítka proměnných. Navíc jsou různé zvyky v různých oblastech matematiky. Zde uvedený způsob používá Maple.

Zobrazení \mathcal{F}^{-1} ,

$$\mathcal{F}^{-1}(F) = f^*$$

se nazývá **zpětná Fourierova transformace**. V mnoha důležitých případech se výsledek f^* s původní funkcí f shoduje, nebo se liší jen v bodech nespojitosti.

Věta 140 (postačující podmínka pro přímou i zpětnou Fourierovu transformaci). *Nechť funkce f má konečně mnoho bodů nespojitosti, splňuje Lipschitzovu podmínku a existuje konečný integrál*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt.$$

Pak funkce f má Fourierův obraz F , jehož zpětnou transformací dostaneme funkci $f^ = \mathcal{F}^{-1}(F)$ takovou, že $f^* = f$ v bodech spojitosti funkce f a v libovolném bodě t platí*

$$f^*(t) = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0+} (f(t+h) + f(t-h)).$$

8.3 Vlastnosti Fourierovy transformace

Obrazy ve Fourierově transformaci značíme obvykle velkým písmenem, tj. $F = \mathcal{F}(f)$, $G = \mathcal{F}(g)$...

Funkce je svým Fourierovým obrazem určena jednoznačně (až na množinu nulové míry, např. konečně mnoho bodů). Říkáme, že f je reprezentace signálu **v časové oblasti** a F je reprezentace **ve frekvenční oblasti**.

Stejně jako integrál, je i Fourierova transformace lineární, tj.

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Fourierův obraz **reálné sudé** funkce má nenulové jen kosinové složky, je to tedy **reálná** funkce (viz důkaz tvrzení 125). Fourierův obraz **reálné liché** funkce má nenulové jen sinové složky, je to tedy **ryze imaginární** funkce. Každou funkci f lze vyjádřit jako součet sudé a liché funkce,

$$f(t) = \underbrace{\frac{1}{2} (f(t) + f(-t))}_{\text{sudá}} + \underbrace{\frac{1}{2} (f(t) - f(-t))}_{\text{lichá}},$$

sudá složka určuje reálnou a lichá imaginární část Fourierova obrazu. **Důsledek:** Je-li f **reálná**, je $F(0) \in \mathbb{R}$.

Z definice plyne víc:

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt.$$

Změníme-li lineárně měřítka času, $g(t) = f(at)$, $a \in \mathbb{R}$, změní se i měřítka ve frekvenční oblasti (po substituci $u = at$):

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{\text{sign } a}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u/a} du = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

(Činitel $\text{sign } a$ vyjadřuje záměnu integračních mezí pro $a < 0$.) Posunutí počátku času, $g(t) = f(t+a)$, $a \in \mathbb{R}$, má následující účinek (po substituci $u = t+a$):

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega(u-a)} du = e^{i\omega a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du = e^{i\omega a} F(\omega). \end{aligned}$$

Fourierův obraz derivace $Df = f'$ dostaneme integrací per partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(Df)(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \underbrace{[f(t) e^{-i\omega t}]_{t=-\infty}^{\infty}}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-i\omega) e^{-i\omega t} dt = i\omega F(\omega).\end{aligned}$$

(První člen je nulový, protože Fourierův obraz je definován jen za předpokladu $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$.) **Derivování** v časové oblasti **odpovídá násobení** ω ve frekvenční oblasti (až na násobek i). Pro k -tou derivaci

$$\mathcal{F}(D^k f)(\omega) = \mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (i\omega)^k F(\omega).$$

Podobně bychom dostali i vzorec pro integrál (dělíme $i\omega$), ale museli bychom ohlídat podmínky pro existenci jeho Fourierova obrazu.

8.4 Aplikace Fourierovy transformace

- Frekvenční analýza neperiodických signálů, hledání odezvy lineárních systémů.
- Filtrace šumu (pokud má jinou frekvenční charakteristiku než užitečný signál).
- Kompresí informace (ztrátová i bezztrátová), např. ve formátu JPEG.
- Rozpoznávání, zejména zvuku (řeči) – Fourierův obraz nese stejnou informaci jako původní signál a může být vhodnější pro další zpracování.
- ...

8.5 Obecnější integrální transformace

Integrální transformací obecně rozumíme zobrazení, které funkci f přiřazuje funkci F tak, že se vynásobí vhodnou funkcí dvou proměnných κ (zvanou **jádro** transformace) a zintegruje podle původní proměnné,

$$F(\omega) = \int_a^b f(t) \kappa(\omega, t) dt.$$

V případě Fourierovy transformace je

$$\kappa(\omega, t) = e^{-i\omega t}, \quad a = -\infty, \quad b = \infty.$$

Lze použít jiné jádro, např. $\cos(\omega t)$ nebo $\sin(\omega t)$, a jiné meze integrace. Např. **Laplaceova transformace** používá

$$\kappa(s, t) = e^{-st}, \quad a = 0, \quad b = \infty,$$

kde však proměnná s je **komplexní**. Má obdobné vlastnosti jako Fourierova transformace, zejména derivování vzoru odpovídá vynásobení obrazu. Toho se využívá při **řešení lineárních diferenciálních rovnic**; jejich charakteristická rovnice vznikla právě tímto postupem.

„Integrační obor“ může být tvořen též spočetně mnoha body, dostáváme diskrétní transformace. Používají se např. pro reprezentaci nebo kompresi digitálních signálů a pro **řešení lineárních diferenčních rovnic**.

Literatura

- [Apl. mat.] kol.: *Aplikovaná matematika*. Oborové encyklopedie SNTL, Praha, 1978.
- [Apostol] Apostol, T.M.: *Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*. Second edition, J. Wiley & Sons, 1967.
- [Ayres, Mendelson] Ayres, F., Mendelson, E.: *Schaum's Outline of Calculus*. Edition 4, McGraw-Hill, 1999, ISBN 0070419736.
- [Bronson] Bronson, R.: *Differential Equations*. 2nd edition, McGraw-Hill, 1994, ISBN 0-07-008019-4.
- [CRC Encyclopedia] kol.: *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. <http://mathworld.wolfram.com>
- [Hamhalter, Tišer: Dif. p.] Hamhalter, J., Tišer, J.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Skriptum ČVUT, Praha, 2005.
- [Hamhalter, Tišer: Int. p.] Hamhalter, J., Tišer, J.: *Integrální počet funkcí více proměnných*. Skriptum ČVUT, Praha, 2005.
- [Havlíček: Dif. p.] Havlíček, K.: *Diferenciální počet pro začátečníky*. SNTL, Praha, 1965.
- [Havlíček: Int. p.] Havlíček, K.: *Integrální počet pro začátečníky*. SNTL, Praha, 1968.
- [Knuth 1997] Knuth, D.E.: *The Art of Computer Programming*. Addison Wesley, Boston, 1997.
- [Navara: PMS] Navara, M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika*. Skriptum ČVUT, Praha, 2007.
- [NRR:nekon] Neubrunn, T., Riečan, B., Riečanová, Z.: *O nekonečně malých veličinách*. Alfa, Bratislava, 1987.
- [Olšák 2007] Olšák, P.: *Úvod do algebry, zejména lineární*. Skriptum FEL ČVUT, Praha, 2007.
- [Press et al. 1986] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T.: *Numerical Recipes (The Art of Scientific Computing)*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [Rektorys: Přehled] Rektorys, K. a kol.: *Přehled užití matematiky*. SNTL, Praha, 1973.
- [Rektorys: Co je] Rektorys, K.: *Co je a k čemu je vyšší matematika*. Academia Praha 2001, ISBN 8020008837.
- [Schlesinger, Hlaváč] Schlesinger, M.I., Hlaváč, V.: *Deset přednášek z teorie statistického a strukturního rozpoznávání*. ČVUT, Praha, 1999.
- [Šindelář] Šindelář, K.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných*. SNTL, Praha, 1972.
- [Výborný] Výborný, R.: *Diferenciální počet*. Academia, Praha, 1966.
- [Tkadlec: Dif. int. p.] Tkadlec, J.: *Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné*. Skriptum ČVUT, Praha, 2004, ISBN 80-0103039-3, <http://math.feld.cvut.cz/skripta/difint1/>
- [Tkadlec: Dif. rce] Tkadlec, J.: *Diferenciální rovnice. Laplaceova transformace*. Skriptum ČVUT, Praha, 2005.
- [Wikipedia] <http://en.wikipedia.org>
- [Wrede, Spiegel] Wrede, R.C., Spiegel, M.R.: *Schaum's Outline of Advanced Calculus*. 2nd edition, McGraw-Hill, 2002, ISBN 0071375678.