

# Markovovy řetězce – cvičení

Mirko Navara  
Centrum strojového vnímání  
katedra kybernetiky FEL ČVUT  
Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a  
<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat>

11. 12. 2018

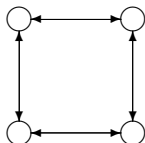
## Obsah

1	Pravděpodobnosti stavů, klasifikace stavů, stacionární rozdělení	1
2	Asymptotické pravděpodobnosti stavů	6
3	Maximálně věrohodné odhady	12
4	Úlohy pro opakování	15

## 1 Pravděpodobnosti stavů, klasifikace stavů, stacionární rozdělení

**Cvičení.** V cyklu délky 4 v každém kroku nezávisle vybereme postup po směru hodinových ručiček s pravděpodobností  $2/3$ , v opačném směru s pravděpodobností  $1/3$ . Stanovte pravděpodobnosti stavů po 4 krocích, jestliže počáteční stav je 1.

Klasifikujte stavy.



**Řešení.** První řádek matice

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \frac{41}{81} & 0 & \frac{40}{81} & 0 \\ 0 & \frac{41}{81} & 0 & \frac{40}{81} \\ \frac{40}{81} & 0 & \frac{41}{81} & 0 \\ 0 & \frac{40}{81} & 0 & \frac{41}{81} \end{pmatrix}$$

(nemusíme násobit celou maticí, stačí ji  $4 \times$  vynásobit zleva vektorem).

Všechny stavy jsou trvalé s periodou 2, řetězec je nerozložitelný.

**Cvičení.** V Markovově řetězci s následující maticí přechodu oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

**Řešení.** Stav 3 je trvalý absorpční, stavy 2 a 4 jsou trvalé s periodou 2, stavy 1 a 5 jsou přechodné. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou  $\emptyset, \{3\}, \{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$ .

**Cvičení.** V Markovově řetězci s následující maticí přechodu oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ke kterému z nich konverguje rozdělení stavů, vyjdeme-li ze stavu 4?

**Řešení.** Stav 2 je trvalý absorpční, stavy 1 a 3 jsou trvalé neperiodické, stav 4 je přechodný. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou  $\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$ . Stacionární rozdělení pravděpodobností dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$(a \quad b \quad c \quad 1-a-b-c) P = (a \quad b \quad c \quad 1-a-b-c),$$

vyjde  $(a \quad 1-3a \quad 2a \quad 0)$ ,  $0 \leq a \leq 1/3$ . Ze stavu 4 dojdeme se stejnou pravděpodobností do absorpčního stavu 2 jako do uzavřené množiny  $\{1, 3\}$ , která tvoří nerozložitelný Markovův podřetězec. Tomu odpovídá hodnota  $a = 1/6$  a rozdělení pravděpodobností  $(1/6 \quad 1/2 \quad 1/3 \quad 0)$ .

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Je-li počáteční rozdělení pravděpodobností rovnoměrné, jaké je po 4 krocích?

**Řešení.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/16 & 5/8 & 1/16 \end{pmatrix}, \\ (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/16 & 5/8 & 1/16 \end{pmatrix} &= \left( \frac{7}{16} \quad \frac{13}{24} \quad \frac{1}{48} \right). \end{aligned}$$

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.

B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

**Řešení.** A. Stav 3 a 5 jsou přechodné, stav 4 je trvalý absorpční, stavy 1 a 2 jsou trvalé s periodou 2.

B. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou  $\emptyset, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}$ .

C. Ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové. Stacionární rozdělení pravděpodobností trvalých stavů 1, 2, 4 dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$(a \quad b \quad 1 - a - b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a \quad b \quad 1 - a - b)$$

(v matici přechodu jsme vynechali řádky a sloupce odpovídající přechodným stavům); vyjde  $(a \quad a \quad 1 - 2a)$ ,  $0 \leq a \leq 1/2$ . K těmto stacionárním rozdělením pravděpodobností stavů nekonvergují.

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.

B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

**Výsledky.** A. Stav 1 je přechodný, zbývající trvalé neperiodické (ergodické).

B.  $\{2, 3, 4\}, \emptyset$ .

C. Konverguje ke stacionárnímu rozdělení  $(0, 3/7, 2/7, 2/7)$ .

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- A. Klasifikujte všechny stavy.  
 B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.  
 C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

**Výsledek.** A. Všechny stavy jsou trvalé neperiodické (ergodické).

B.  $\{1, 2, 3, 4\}, \emptyset$ .

C. Konverguje ke stacionárnímu rozdělení  $(1/3, 2/9, 2/9, 2/9)$ .

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

- A. Klasifikujte všechny stavy.  
 B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.  
 C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

**Řešení.** A. Stavy 3 a 5 jsou přechodné, stavy 1, 2, 4 jsou trvalé s periodou 3.

B.  $\emptyset, \{1, 2, 4\}$ .

C. Ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové. Stacionární rozdělení pravděpodobností trvalých stavů 1, 2, 4 dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$(a \quad b \quad 1 - a - b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (a \quad b \quad 1 - a - b)$$

(v matici přechodu jsme vynechali řádky a sloupce odpovídající přechodným stavům); vyjde  $(1/3, 1/3, 1/3)$ . K tomuto stacionárnímu rozdělení pravděpodobností stavů nekonvergují.

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Je-li počáteční rozdělení pravděpodobností rovnoměrné, jaké je po 4 krocích?

**Řešení.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^4 = \frac{1}{32} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 4 & 8 & 20 \\ 5 & 9 & 18 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{32} \cdot (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3) \begin{pmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 4 & 8 & 20 \\ 5 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \left( \frac{13}{96} \quad \frac{29}{96} \quad \frac{9}{16} \right).$$

Místo toho lze počáteční rozdělení pravděpodobností  $4 \times$  násobit zprava maticí přechodu.

**Cvičení.** Pohybujeme se ve čtvercové síti o 2 řádcích a 3 sloupcích. Z každého z 6 uzlů můžeme pouze do sousedního vlevo, vpravo, nebo dole (pokud tam nějaký je), pravděpodobnosti přechodu do všech povolených sousedních uzlů jsou stejné.

A. Klasifikujte všechny stavy.

B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

**Řešení.** A. Horní řada uzlů odpovídá přechodným stavům, dolní trvalým, které mají periodu 2.

B. Uzavřená je pouze množina všech 3 trvalých stavů a prázdná množina.

C. Ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové. Trvalé stavy mají v tomto případě stacionární pravděpodobnosti  $(1/4 \quad 1/2 \quad 1/4)$ , neboť matice přechodu mezi nimi je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K tomuto stacionárnímu rozdělení pravděpodobnosti stavů nekonvergují; přesněji, konvergují pouze z počátečních rozdělení tvaru  $(a \quad 1/2 \quad 1/2 - a)$ , kde  $a \in \langle 0, 1/2 \rangle$ .

**Cvičení.** Pohybujeme se ve čtvercové síti o 3 řádcích a 2 sloupcích. Z každého z 6 uzlů můžeme pouze do sousedního vlevo, vpravo, nebo dole (pokud tam nějaký je), pravděpodobnosti přechodu do všech povolených sousedních uzlů jsou stejné.

A. Klasifikujte všechny stavy.

B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

**Řešení.** A. Dolní řada uzlů odpovídá trvalým stavům; ty mají periodu 2. Ostatní stavy jsou přechodné.

B. Uzavřená je pouze množina všech 2 trvalých stavů a prázdná množina.

C. Ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové. Trvalé stavy mají v tomto případě stacionární pravděpodobnosti  $(1/2 \quad 1/2)$ , neboť matice přechodu mezi nimi je

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K tomuto stacionárnímu rozdělení pravděpodobnosti stavů nekonvergují.

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.

B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

**Výsledky.** A. Stavů 1 a 4 jsou absorpční, zbývající přechodné.

B.  $\{1, 4\}$ ,  $\{1\}$ ,  $\{4\}$ ,  $\emptyset$ .

C. Stacionární je každé rozdělení tvaru  $(a, 0, 0, 1 - a)$ ,  $a \in \langle 0, 1 \rangle$ . Z jakéhokoli počátečního rozdělení  $(a, b, c, d)$ ,  $a, b, c, d \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $a + b + c + d = 1$ , konverguje k rozdělení  $(a, 0, 0, 1 - a)$ .

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.

B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.

C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

**Výsledky.** A. Stavů 1 a 4 jsou přechodné, zbývající trvalé neperiodické (ergodické).

B.  $\{2, 3\}$ ,  $\emptyset$ .

C. Konverguje ke stacionárnímu rozdělení  $(0, 1/2, 1/2, 0)$ .

## 2 Asymptotické pravděpodobnosti stavů

**Cvičení.** Najděte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jestliže počáteční stav je 2.

**Řešení.** První dva stavy jsou přechodné, zbývající dva absorpční. Permutací stavů  $(3, 4, 1, 2)$  dostaneme matici přechodu ve tvaru

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$F = (I_2 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$F \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

udává pravděpodobnosti dosažení absorpčních stavů z přechodných. Její poslední řádek odpovídá zadání, že začínáme ve stavu 2. Asymptotické pravděpodobnosti přechodných stavů jsou nulové, dohromady  $(1/4, 3/4, 0, 0)$  po změně pořadí stavů,  $(0, 0, 1/4, 3/4)$  při jejich původním pořadí.

**Cvičení.** Čtyři hráči házejí mincí. Komu padne líc, vyhrává. Padne-li rub, hází další hráč v pořadí (cyklicky se střídají, dokud některý nevyhraje). Najděte pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů.

**Řešení.** Matice přechodu je

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I}_4 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 16 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} \mathbf{R} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

pravděpodobnosti výhry hráčů (v pořadí, ve kterém hrají), jsou  $(8/15, 4/15, 2/15, 1/15)$ .

Místo výpočtu fundamentální matice lze použít úvahu, že první hráč vyhraje prvním hodem s pravděpodobností  $1/2$ , zatímco ve zbývajících případech, tj. s pravděpodobností  $1/2$ , se octne druhý hráč ve stejné situaci, tedy jeho šance na výhru je  $2 \times$  menší. Z téhož důvodu je poměr šancí na výhru  $8 : 4 : 2 : 1$ .

**Cvičení.** V cyklu délky

A. 3

B. 4

v každém kroku nezávisle vybereme postup po směru hodinových ručiček s pravděpodobností  $2/3$ , v opačném směru s pravděpodobností  $1/3$ . Odhadněte pravděpodobnosti stavů po 1000 krocích, jestliže počáteční stav je 1. Jaký je vliv počátečního stavu?

**Řešení.** V obou případech se jedná o nerozložitelný Markovův řetězec.

A. Stavby jsou aperiodické, po 1000 krocích mají všechny přibližně stejnou pravděpodobnost  $1/3$ . Vliv počátečního stavu je nepatrný.

B. Stavby mají periodu 2, po 1000 krocích (tedy velkém sudém počtu) jsou možné pouze liché stavby, 1 a 3; mají přibližně stejnou pravděpodobnost  $1/2$ . Záleží na tom, zda počáteční stav je sudý nebo lichý, ale který z nich to je, má jen nepatrný vliv.

**Cvičení.** Alice, Bob a Cyril házejí kostkou (v tomto pořadí). Kdo první hodí šestku, vyhrává. Hra se opakuje, dokud někdo nehodí šestku. Stanovte pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů.

**Řešení.**  $(\frac{36}{91} \quad \frac{30}{91} \quad \frac{25}{91})$ . Kromě výpočtu fundamentální matice lze použít úvahu, že Alice vyhraje prvním hodem s pravděpodobností  $1/6$ , zatímco ve zbývajících případech, tj. s pravděpodobností  $5/6$ , se octne Bob ve stejné situaci jako Alice na začátku, tedy jeho šance na výhru je menší v poměru  $5/6$ . Z téhož důvodu je Cyrilova šance menší než Bobova v poměru  $5/6$ . Výsledek je tedy tvaru  $(a \quad \frac{5}{6}a \quad (\frac{5}{6})^2a)$  a požadavek jednotkového součtu pravděpodobností dává  $a = \frac{36}{91}$ .

**Cvičení.** Alice a Bob hrají následující hru: Hráč, který je na řadě, hodí kostkou. Padne-li 6, vyhrává a hra končí. Padne-li liché číslo, pokračuje stejný hráč. Padne-li jiné sudé číslo různé od 6, pokračuje druhý hráč. Začíná Alice. Jaké jsou pravděpodobnosti výsledků hry?

**Řešení.** Matice přechodu po vhodné permutaci stavů („vyhrála Alice“, „vyhrál Bob“, „hraje Alice“, „hraje Bob“) je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 stavby jsou absorpční, zbývajících 2 přechodné,

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{F} \mathbf{R} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnost výhry začínajícího hráče (Alice) je  $3/5$ .

**Cvičení.** Alice trefí terč s pravděpodobností  $1/3$ , Bob s pravděpodobností  $1/2$ . Pokud hráč zasáhne terč, střílí dále, pokud mine, je na řadě druhý hráč. Začíná Alice. Alice vyhrává, pokud trefí terč  $2\times$  za sebou, Bob vyhrává, pokud trefí terč  $3\times$  za sebou. Pro oba hráče stanovte pravděpodobnosti výhry.



**Řešení.** Pokud bychom rozlišovali nejen to, který hráč je na řadě, ale i kolik již má úspěšných pokusů, potřebovali bychom  $3 + 4 = 7$  stavů. Jednodušší popis dostaneme, jestliže rozlišujeme pouze stavy „vyhrála Alice“, „vyhrál Bob“, „hraje Alice“, „hraje Bob“ a celou sérii úspěšných pokusů považujeme za jeden krok (končí výhrou hráče s pravděpodobností  $(1/3)^2$  pro Alici,  $(1/2)^3$  pro Boba, nebo se na řadu dostává druhý hráč). Dostáváme matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 2 přechodné,

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 \\ 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/9 \\ -7/8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 4 \\ \frac{63}{16} & \frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}.$$

Pokud začíná Alice, je pravděpodobnost výhry pro oba hráče stejná,  $1/2$ .

**Cvičení.** Alice a Bob házejí mincí. Padne-li dvakrát po sobě rub, vyhrává Alice. Padne-li sekvence rub-líc-rub, vyhrává Bob. Hra pokračuje, dokud nenastane jeden těchto výsledků. Jaké jsou pravděpodobnosti výsledků? (Návod: Stačí začít po prvních dvou krocích, kdy 4 ze stavů mají stejnou pravděpodobnost.)

**Řešení.** Přechodné stavy, které potřebujeme k popisu jen před dokončením prvních dvou hodů, můžeme ignorovat. Zbývá 5 stavů, které označíme sekvencí posledních výsledků: RLR, RR, LR, RL, LL. Po prvních dvou krocích mají stavy RR, LR, RL, LL pravděpodobnost  $1/4$ . Z nich RR je trvalý, zbývající 3 přechodné. Matice přechodu pro toto pořadí stavů je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 4/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Tuto matici vynásobíme zleva pravděpodobnostmi přechodných stavů po prvních dvou krocích,  $(1/4 \ 1/4 \ 1/4)$ , a dostaneme  $(1/3 \ 5/12)$ . K tomu nutno připočítat, že s pravděpodobností  $1/4$  již po prvních dvou krocích nastane absorpční stav  $RR$ , takže pravděpodobnost výhry Boba je  $1/3$ , Alice  $2/3$ .

**Cvičení.** Alice, Bob a Cyril házejí mincí (v tomto pořadí). Kdo první hodí líc, vyhrává. Hra se opakuje, dokud někdo nehodí líc. Stanovte pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů.

**Výsledky.**  $(4/7 \ 2/7 \ 1/7)$ .

**Cvičení.** Stanovte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s následující maticí přechodu:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

**Výsledky.** Stav 3 je přechodný, všechny ostatní jsou trvalé, jejich pravděpodobnosti konvergují k jedinému stacionárnímu rozdělení,  $(4/13 \ 6/13 \ 0 \ 3/13)$ .

**Cvičení.** (Obnovování paměti) Přepisujeme binární informaci, přičemž s pravděpodobností 1% přepíšeme 0 jako 1, s pravděpodobností 2% přepíšeme 1 jako 0. Jaké bude rozdělení pravděpodobností po velkém počtu přepisů?

**Výsledky.** Matice přechodu je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix}.$$

Řetězec je ergodický, z libovolného počátečního stavu konverguje k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností, kterým je  $(\frac{2}{3} \ \frac{1}{3})$ . Stejný výsledek dává mocnina matice

$$\mathbf{P}^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 0.97^t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

**Cvičení.** Alice a Bob hrají následující hru: Hráč, který je na řadě, hodí kostkou. Padne-li 6, vyhrává a hra končí. Padne-li jiné sudé číslo, pokračuje stejný hráč. Padne-li liché číslo, pokračuje druhý hráč. Začíná Alice. Jaké jsou pravděpodobnosti výsledků hry?

**Řešení.** Matice přechodu po vhodné permutaci stavů („vyhrála Alice“, „vyhrál Bob“, „hraje Alice“, „hraje Bob“) je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 2 přechodné,

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{36}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} \mathbf{R} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 3/7 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

Začíná Alice, tj. počáteční rozdělení stavů je  $\mathbf{p}(0) = (1 \ 0)$  a asymptotické

$$\mathbf{p}(0) \mathbf{F} \mathbf{R} = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 3/7 & 4/7 \end{pmatrix} = (4/7 \ 3/7).$$

Pravděpodobnost výhry začínajícího hráče (Alice) je 4/7.

**Cvičení.** Najděte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jestliže počáteční stav je 2.

**Řešení.** Stavy 1 a 4 jsou absorpční, zbývající přechodné. Permutací stavů (1, 4, 2, 3) dostaneme matici přechodu ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\mathbf{F} = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\mathbf{F R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

udává pravděpodobnosti dosažení absorpčních stavů z přechodných. Její první řádek odpovídá zadání, že začínáme ve stavu 2. Asymptotické pravděpodobnosti přechodných stavů jsou nulové, dohromady  $(1/2, 1/2, 0, 0)$  po změně pořadí stavů,  $(1/2, 0, 0, 1/2)$  při jejich původním pořadí.

**Cvičení.** Tři hráči házejí kostkou. Komu padne 5 nebo 6, vyhrává. Padne-li jiné číslo, hází další hráč v pořadí (cyklicky se střídají, dokud některý nevyhraje). Najděte pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů.

**Řešení.** Matice přechodu je

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{Q})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{27}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 4/9 \\ 4/9 & 1 & 2/3 \\ 2/3 & 4/9 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{3}{19} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F R} &= \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pravděpodobnosti výhry hráčů (v pořadí, ve kterém hrají), jsou  $(9/19, 6/19, 4/19)$ .

### 3 Maximálně věrohodné odhady

**Cvičení.** Odhadněte stavy  $i$  a  $k$  Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů  $(1, i, 2, k, 3)$ .

**Řešení.** Věrohodnost této posloupnosti stavů je

$$L(i, k) = p_1(0) \cdot p_{1i} \cdot p_{i2} \cdot p_{2k} \cdot p_{k3}.$$

Odhady stavů  $i, k$  jsou nezávislé. Věrohodnost stavu  $i$  závisí na 1. řádku a 2. sloupci matice přechodu, stavu  $k$  na 2. řádku a 3. sloupci. Maximum nastává pro  $i = 2, k = 2$ .

**Cvičení.** Odhadněte stavy  $i$  a  $k$  Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů  $(2, i, k, 3)$ .

**Řešení.** Věrohodnost této posloupnosti stavů je

$$L(i, k) = p_2(0) \cdot p_{2i} \cdot p_{ik} \cdot p_{k3}.$$

Je nenulová pro  $(i, k) \in \{(2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$ . Maximum nastává pro  $i = 2, k = 2$ .

**Cvičení.** Markovův řetězec má dva stavy, 1, 2. Pravděpodobnost přechodu ze stavu 1 do stavu 2 je  $p$ , pravděpodobnost přechodu ze stavu 2 do stavu 1 je  $q$ .

A. Z pozorované posloupnosti stavů

$$(1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$$

odhadněte parametry  $p, q$ .

B. Určete pravděpodobnosti stavů 2 kroky poté, co byl řetězec ve stavu 1.

C. Stanovte stacionární rozdělení pravděpodobností stavů a posuďte, zda řetězec k tomuto rozdělení konverguje.

D. Stanovte pravděpodobnost, že se řetězec ze stavu 1 vrátí do tohoto stavu v nejvýše 3 krocích.

E. Stanovte pravděpodobnost, že se řetězec ze stavu 1 vrátí do tohoto stavu (v libovolném počtu kroků).

**Řešení.** A.

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Pozorované absolutní a relativní četnosti přechodů:

	1	2		1	2
1	7	3	1	0.7	0.3
2	3	2	2	0.6	0.4

Maximálně věrohodný odhad matice přechodu je roven relativním četnostem, tj.  $p = 0.3, q = 0.6$ ,

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

B.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.66 & 0.34 \end{pmatrix},$$

první řádek udává pravděpodobnosti stavů po dvou krocích při počátečním stavu 1. (Nemusíme násobit celou maticí, stačí ji  $2 \times$  vynásobit zleva vektorem.)

C. Řešením rovnice

$$(a \quad 1 - a) (P - I) = \mathbf{0}$$

dostaneme  $a = 2/3$ ,  $(a \quad 1 - a) = (2/3 \quad 1/3)$ , což je jediné stacionární rozdělení pravděpodobností stavů. Řetězec k němu konverguje, neboť je ergodický.

D.  $p_k$  = pravděpodobnost návratu do stavu 1 po právě  $k$  krocích:

$k$	$p_k$
1	0.7
2	0.18
3	0.072
celkem	0.952

E. Návrat do stavu 1 nastane s pravděpodobností 1, neboť řetězec je ergodický.

**Cvičení.** Odhadněte stav  $i$  Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů  $(1, i, i, 3)$ .

**Řešení.** Věrohodnost této posloupnosti stavů je

$$L(i, k) = p_1(0) \cdot p_{1i} \cdot p_{ii} \cdot p_{i3}.$$

Závisí na 1. řádce, diagonále a 3. sloupci matice přechodu. Maximum  $p_1(0) \cdot 2/27$  nastává pro  $i \in \{2, 4\}$ .

**Cvičení.** Odhadněte stavy  $i$  a  $k$  Markovova řetězce s maticí přechodu

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů  $(2, i, k, 3)$ .

**Řešení.** Věrohodnost této posloupnosti stavů je

$$L(i, k) = p_2(0) \cdot p_{2i} \cdot p_{ik} \cdot p_{k3},$$

přičemž  $p_{2i} = 0.25$  nezávisle na  $i$ . Maximum nastává pro  $i = 3, k = 4$ .

## 4 Úlohy pro opakování

Pro následující úlohy můžete použít např. matice přechodu

$$P_A = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P_C = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad P_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

**Cvičení.** Najděte přechodové diagramy.

**Cvičení.** Odhadněte počáteční stav  $i$  a koncový stav  $k$  Markovova řetězce s danou maticí přechodu, jestliže posloupnost stavů byla  $i, 2, 1, 3, k$  (dále ji neznáme) a počáteční rozdělení pravděpodobností bylo rovnoměrné.

**Řešení.** Věrohodnost této posloupnosti stavů je

$$L(i, k) = p_i(0) \cdot p_{i2} \cdot p_{21} \cdot p_{13} \cdot p_{3k}.$$

Lze vytknout konstanty včetně  $p_i(0) = 1/3$  (pokud jsou nenulové!), věrohodnost je úměrná  $p_{i1} \cdot p_{2k}$ . Odhady stavů  $i, k$  jsou nezávislé.

Věrohodnost možných hodnot stavu  $k$  je dána 3. řádkem matice přechodu, věrohodnost stavu  $i$  2. sloupcem matice přechodu. Je však nutno vyloučit případ  $D$ , neboť v něm posloupnost stavů  $2, 1, 3$  není možná a věrohodnost je nulová!

[A. 3; 2, B. 1; 1, C. 2; 3, D. -]

**Cvičení.** Odhadněte stav  $i$  Markovova řetězce s danou maticí přechodu, jestliže posloupnost stavů byla  $3, 2, i, 1$ .

**Řešení.** Věrohodnost této posloupnosti stavů je

$$L(i) = p_3(0) \cdot p_{32} \cdot p_{2i} \cdot p_{i1}.$$

Lze vytknout nenulové konstanty, pak je věrohodnost úměrná  $p_{2i} \cdot p_{i1}$ , jednotlivým hodnotám odpovídají součiny 2. řádku a 1. sloupce po složkách. V případě  $A$  je pro všechny hodnoty  $i$  nulová.

[A. -, B. 3, C. -, D. 1]

**Cvičení.** Který z daných Markovových řetězců spíše mohl vygenerovat posloupnost stavů (a)  $2, 3, 2, 1, 2$ , (b)  $1, 2, 1, 3$ ?

**Výsledky.** (a)  $B$  (jako jediný může vygenerovat tuto posloupnost), (b)  $A$ .

**Cvičení.** Je-li počáteční rozdělení pravděpodobností rovnoměrné, jaké je po 2 krocích?

**Řešení.**  $\mathbf{p} = (1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)$ ,

$$\mathbf{p} \mathbf{P}_A^2 = \left( \frac{5}{9} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \right),$$

$$\mathbf{p} \mathbf{P}_B^2 = \left( \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right),$$

$$\mathbf{p} \mathbf{P}_C^2 = (0.28 \quad 0.27 \quad 0.45),$$

$$\mathbf{p} \mathbf{P}_D^2 = \left( \frac{85}{108} \quad \frac{19}{108} \quad \frac{1}{27} \right) = (0.787 \quad 0.176 \quad 0.037).$$

**Cvičení.** Klasifikujte stavy řetězců.

**Výsledek.**  $A, B, C$ . Všechny stavy jsou trvalé neperiodické (ergodické), řetězec je nerozložitelný.

$D$ . Stav 1 je trvalý absorpční, 2 a 3 jsou přechodné.

**Cvičení.** Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností stavů a posuďte, zda k nim rozdělení stavů konverguje.

**Řešení.**  $A, B, C$ . Řetězce jsou ergodické, mají tedy jediné stacionární rozdělení pravděpodobností, ke kterému konvergují z libovolného počátečního stavu. Dostaneme je řešením soustavy lineárních rovnic

$$(a \quad b \quad 1 - a - b) \mathbf{P} = (a \quad b \quad 1 - a - b).$$

$$A. \left( \frac{3}{7} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{7} \right)$$

$$B. \left( \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right)$$

$$C. \left( \frac{1}{4} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{7}{12} \right)$$

$D. (1 \quad 0 \quad 0)$  (ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové)

**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.3 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Počáteční stav je 3. Vypočtěte (alespoň přibližně) rozdělení pravděpodobností

A. po 4 krocích,

B. po  $2^{24}$  krocích.

**Řešení.** A.

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.51 & 0.37 & 0.12 \\ 0.51 & 0.12 & 0.37 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7599 & 0.1513 & 0.0888 \\ 0.7599 & 0.0888 & 0.1513 \end{pmatrix}.$$

Hledané rozdělení je v 3. řádce výsledku,  $(0.7599 \quad 0.0888 \quad 0.1513)$ .

Místo toho lze počáteční rozdělení pravděpodobností  $4 \times$  násobit zprava maticí přechodu:

$$\begin{aligned} (0 \quad 0 \quad 1) \cdot \mathbf{P}^4 &= (0.3 \quad 0.1 \quad 0.6) \cdot \mathbf{P}^3 = (0.51 \quad 0.12 \quad 0.37) \cdot \mathbf{P}^2 = \\ &= (0.657 \quad 0.109 \quad 0.234) \cdot \mathbf{P} = (0.7599 \quad 0.0888 \quad 0.1513). \end{aligned}$$

B. Stav 1 je absorpční, zbývající přechodné, v nekonečnu se pravděpodobnost stavu 1 blíží 1, přechodných stavů 0, pro velký počet kroků bude výsledek velmi podobný.



**Cvičení.** Markovův řetězec má matici přechodu

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Počáteční rozdělení stavů je rovnoměrné. Vypočtete (alespoň přibližně) rozdělení pravděpodobností

A. po 4 krocích,

B. po 1 000 000 kroků.

**Řešení.** A.

$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.3504 & 0.6496 \\ 0.3248 & 0.6752 \end{pmatrix}.$$

Rozdělení po 4 krocích je

$$\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0.3504 & 0.6496 \\ 0.3248 & 0.6752 \end{pmatrix} = \left(0.3376 \quad 0.6624\right).$$

Místo toho lze počáteční rozdělení pravděpodobností  $4 \times$  násobit zprava maticí přechodu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right) \cdot P^4 &= \left(0.4 \quad 0.6\right) \cdot P^3 = \left(0.36 \quad 0.64\right) \cdot P^2 = \\ &= \left(0.344 \quad 0.656\right) \cdot P = \left(0.3376 \quad 0.6624\right). \end{aligned}$$

B. Stavů jsou ergodické, v nekonečnu se jejich pravděpodobnost blíží jedinému stacionárnímu rozdělení, které dostaneme řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix},$$

vyjde  $\begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ . Pro velký počet kroků bude výsledek velmi podobný.