Markovovy řetězce – cvičení

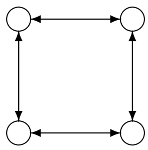
Mirko Navara
Centrum strojového vnímání
katedra kybernetiky FEL ČVUT
Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a
http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/stat

11. 12. 2018

Obsah

1 Pravděpodobnosti stavů, klasifikace stavů, stacionární rozdělení

Cvičení. *V cyklu délky* 4 *v každém kroku nezávisle vybereme postup po směru hodinových ručiček s pravděpodobností* $2/3$*, v opačném směru s pravděpodobností* $1/3$*. Stanovte pravděpodobnosti stavů po* 4 *krocích, jestliže počáteční stav je* 1*.*
Klasifikujte stavy.



Řešení. *První řádek matice*

$$\boldsymbol{P}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \frac{41}{81} & 0 & \frac{40}{81} & 0 \\ 0 & \frac{41}{81} & 0 & \frac{40}{81} \\ \frac{40}{81} & 0 & \frac{41}{81} & 0 \\ 0 & \frac{40}{81} & 0 & \frac{41}{81} \end{pmatrix}$$

(nemusíme násobit celou matici, stačí ji $4\times$ *vynásobit zleva vektorem).*

Všechny stavy jsou trvalé s periodou 2*, řetězec je nerozložitelný.*

Cvičení. *V Markovově řetězci s následující maticí přechodu oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení. *Stav 3 je trvalý absorpční, stavy 2 a 4 jsou trvalé s periodou* 2*, stavy 1 a 5 jsou přechodné. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou* $\emptyset, \{3\}, \{2,4\}, \{2,3,4\}$.

Cvičení. *V Markovově řetězci s následující maticí přechodu oklasifikujte všechny stavy a najděte všechny uzavřené množiny trvalých stavů. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností.*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ke kterému z nich konverguje rozdělení stavů, vyjdeme-li ze stavu 4?

Řešení. *Stav 2 je trvalý absorpční, stavy 1 a 3 jsou trvalé neperiodické, stav 4 je přechodný. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou $\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$. Stacionární rozdělení pravděpodobností dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 1-a-b-c \end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a & b & c & 1-a-b-c \end{pmatrix} ,$$

vyjde $\begin{pmatrix} a & 1-3a & 2a & 0 \end{pmatrix}$, $0 \le a \le 1/3$. Ze stavu 4 dojdeme se stejnou pravděpodobností do absorpčního stavu 2 jako do uzavřené množiny $\{1,3\}$, která tvoří nerozložitelný Markovův podřetězec. Tomu odpovídá hodnota $a = 1/6$ a rozdělení pravděpodobností $\begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Je-li počáteční rozdělení pravděpodobností rovnoměrné, jaké je po 4 krocích?

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} ,$$

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{8} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} & \frac{13}{24} & \frac{1}{48} \end{pmatrix} .$$

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} .$$

A. Klasifikujte všechny stavy.
B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.
C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Řešení. *A. Stavy 3 a 5 jsou přechodné, stav 4 je trvalý absorpční, stavy 1 a 2 jsou trvalé s periodou 2.*
B. Všechny uzavřené množiny trvalých stavů jsou $\emptyset, \{4\}, \{1,2\}, \{1,2,4\}$.
C. Ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové. Stacionární rozdělení pravděpodobností trvalých stavů $1,2,4$ dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \end{pmatrix}$$

(v matici přechodu jsme vynechali řádky a sloupce odpovídající přechodným stavům); vyjde $\begin{pmatrix} a & a & 1-2a \end{pmatrix}$, $0 \le a \le 1/2$. K těmto stacionárním rozdělením pravděpodobnosti stavů nekonvergují.

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.
B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.
C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Výsledky. *A. Stav* 1 *je přechodný, zbývající trvalé neperiodické (ergodické).*
B. $\{2, 3, 4\}, \emptyset$.
C. Konverguje ke stacionárnímu rozdělení $(0, 3/7, 2/7, 2/7)$.

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.
B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.
C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Výsledky. *A. Všechny stavy jsou trvalé neperiodické (ergodické).*
B. $\{1, 2, 3, 4\}, \emptyset$.
C. Konverguje ke stacionárnímu rozdělení $(1/3, 2/9, 2/9, 2/9)$.

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.
B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.
C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Řešení. *A. Stavy* 3 *a* 5 *jsou přechodné, stavy* $1, 2, 4$ *jsou trvalé s periodou* 3.
B. $\emptyset, \{1, 2, 4\}$.
C. Ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové. Stacionární rozdělení pravděpodobností trvalých stavů $1, 2, 4$ *dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 1-a-b \end{pmatrix}$$

(v matici přechodu jsme vynechali řádky a sloupce odpovídající přechodným stavům); vyjde $(1/3, 1/3, 1/3)$. *K tomuto stacionárnímu rozdělení pravděpodobnosti stavů nekonvergují.*

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Je-li počáteční rozdělení pravděpodobností rovnoměrné, jaké je po 4 *krocích?*

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^4 = \frac{1}{32} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 4 & 8 & 20 \\ 5 & 9 & 18 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{32} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 4 & 8 & 20 \\ 5 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{96} & \frac{29}{96} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}.$$

Místo toho lze počáteční rozdělení pravděpodobností $4\times$ *násobit zprava maticí přechodu.*

Cvičení. *Pohybujeme se ve čtvercové síti o* 2 *řádcích a* 3 *sloupcích. Z každého z* 6 *uzlů můžeme pouze do sousedního vlevo, vpravo, nebo dole (pokud tam nějaký je), pravděpodobnosti přechodu do všech povolených sousedních uzlů jsou stejné.*
A. Klasifikujte všechny stavy.
B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.
C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Řešení. *A. Horní řada uzlů odpovídá přechodným stavům, dolní trvalým, které mají periodu* 2.
B. Uzavřená je pouze množina všech 3 *trvalých stavů a prázdná množina.*
C. Ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové. Trvalé stavy mají v tomto případě stacionární pravděpodobnosti $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$, *neboť matice přechodu mezi nimi je*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K tomuto stacionárnímu rozdělení pravděpodobnosti stavů nekonvergují; přesněji, konvergují pouze z počátečních rozdělení tvaru $\begin{pmatrix} a & 1/2 & 1/2 - a \end{pmatrix}$, *kde* $a \in \langle 0, 1/2 \rangle$.

Cvičení. *Pohybujeme se ve čtvercové síti o* 3 *řádcích a* 2 *sloupcích. Z každého z* 6 *uzlů můžeme pouze do sousedního vlevo, vpravo, nebo dole (pokud tam nějaký je), pravděpodobnosti přechodu do všech povolených sousedních uzlů jsou stejné.*
A. Klasifikujte všechny stavy.
B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.
C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Řešení. *A. Dolní řada uzlů odpovídá trvalým stavům; ty mají periodu* 2. *Ostatní stavy jsou přechodné.*
B. Uzavřená je pouze množina všech 2 *trvalých stavů a prázdná množina.*
C. Ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové. Trvalé stavy mají v tomto případě stacionární pravděpodobnosti $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, *neboť matice přechodu mezi nimi je*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K tomuto stacionárnímu rozdělení pravděpodobnosti stavů nekonvergují.

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.
B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.
C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Výsledky. *A. Stavy 1 a 4 jsou absorpční, zbývající přechodné.*
B. $\{1,4\}, \{1\}, \{4\}, \emptyset$.
C. Stacionární je každé rozdělení tvaru $(a, 0, 0, 1-a)$, $a \in \langle 0, 1\rangle$. *Z jakéhokoli počátečního rozdělení* (a, b, c, d), $a, b, c, d \in \langle 0, 1\rangle$, $a + b + c + d = 1$, *konverguje k rozdělení* $(a, 0, 0, 1-a)$.

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A. Klasifikujte všechny stavy.
B. Najděte všechny uzavřené množiny stavů.
C. Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností a posuďte, zda řetězec k některému z nich konverguje.

Výsledky. *A. Stavy 1 a 4 jsou přechodné, zbývající trvalé neperiodické (ergodické).*
B. $\{2, 3\}, \emptyset$.
C. Konverguje ke stacionárnímu rozdělení $(0, 1/2, 1/2, 0)$.

2 Asymptotické pravděpodobnosti stavů

Cvičení. *Najděte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jestliže počáteční stav je 2.

Řešení. *První dva stavy jsou přechodné, zbývající dva absorpční. Permutací stavů* $(3, 4, 1, 2)$ *dostaneme matici přechodu ve tvaru*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 \\ -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

udává pravděpodobnosti dosažení absorpčních stavů z přechodných. Její poslední řádek odpovídá zadání, že začínáme ve stavu 2. Asymptotické pravděpodobnosti přechodných stavů jsou nulové, dohromady $(1/4, 3/4, 0, 0)$ *po změně pořadí stavů,* $(0, 0, 1/4, 3/4)$ *při jejich původním pořadí.*

Cvičení. *Čtyři hráči házejí mincí. Komu padne líc, vyhrává. Padne-li rub, hází další hráč v pořadí (cyklicky se střídají, dokud některý nevyhraje). Najděte pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů.*

Řešení. *Matice přechodu je*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_4 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 16 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 16 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 16 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

pravděpodobnosti výhry hráčů (v pořadí, ve kterém hrají), jsou $(8/15, 4/15, 2/15, 1/15)$.

Místo výpočtu fundamentální matice lze použít úvahu, že první hráč vyhraje prvním hodem s pravděpodobností $1/2$, *zatímco ve zbývajících případech, tj. s pravděpodobností* $1/2$, *se octne druhý hráč ve stejné situaci, tedy jeho šance na výhru je* $2\times$ *menší. Z téhož důvodu je poměr šancí na výhru* $8 : 4 : 2 : 1$.

Cvičení. *V cyklu délky*
A. 3
B. 4
v každém kroku nezávisle vybereme postup po směru hodinových ručiček s pravděpodobností $2/3$, *v opačném směru s pravděpodobností* $1/3$. *Odhadněte pravděpodobnosti stavů po* 1000 *krocích, jestliže počáteční stav je* 1. *Jaký je vliv počátečního stavu?*

Řešení. *V obou případech se jedná o nerozložitelný Markovův řetězec.*
A. Stavy jsou aperiodické, po 1000 *krocích mají všechny přibližně stejnou pravděpodobnost* $1/3$. *Vliv počátečního stavu je nepatrný.*
B. Stavy mají periodu 2, *po* 1000 *krocích (tedy velkém sudém počtu) jsou možné pouze liché stavy,* 1 *a* 3; *mají přibližně stejnou pravděpodobnost* $1/2$. *Záleží na tom, zda počáteční stav je sudý nebo lichý, ale který z nich to je, má jen nepatrný vliv.*

Cvičení. *Alice, Bob a Cyril házejí kostkou (v tomto pořadí). Kdo první hodí šestku, vyhrává. Hra se opakuje, dokud někdo nehodí šestku. Stanovte pravděpodnosti výhry jednotlivých hráčů.*

Řešení. $\left(\frac{36}{91} \quad \frac{30}{91} \quad \frac{25}{91}\right)$. *Kromě výpočtu fundamentální matice lze použít úvahu, že Alice vyhraje prvním hodem s pravděpodobností* $1/6$, *zatímco ve zbývajících případech, tj. s pravděpodobností* $5/6$, *se octne Bob ve stejné situaci jako Alice na začátku, tedy jeho šance na výhru je menší v poměru* $5/6$. *Z téhož důvodu je Cyrilova šance menší než Bobova v poměru* $5/6$. *Výsledek je tedy tvaru* $\left(a \quad \frac{5}{6}a \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2 a\right)$ *a požadavek jednotkového součtu pravděpodobností dává* $a = \frac{36}{91}$.

Cvičení. *Alice a Bob hrají následující hru: Hráč, který je na řadě, hodí kostkou. Padne-li 6, vyhrává a hra končí. Padne-li liché číslo, pokračuje stejný hráč. Padne-li jiné sudé číslo různé od 6, pokračuje druhý hráč. Začíná Alice. Jaké jsou pravděpodobnosti výsledků hry?*

Řešení. *Matice přechodu po vhodné permutaci stavů („vyhrála Alice“, „vyhrál Bob“, „hraje Alice“, „hraje Bob“) je*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 *stavy jsou absorpční, zbývající* 2 *přechodné,*

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{6}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnost výhry začínajícího hráče (Alice) je 3/5.

Cvičení. *Alice trefí terč s pravděpodobností* 1/3*, Bob s pravděpodobností* 1/2*. Pokud hráč zasáhne terč, střílí dále, pokud mine, je na řadě druhý hráč. Začíná Alice. Alice vyhrává, pokud trefí terč* $2\times$ *za sebou, Bob vyhrává, pokud trefí terč* $3\times$ *za sebou. Pro oba hráče stanovte pravděpodobnosti výhry.*

Řešení. *Pokud bychom rozlišovali nejen to, který hráč je na řadě, ale i kolik již má úspěšných pokusů, potřebovali bychom* $3 + 4 = 7$ *stavů. Jednodušší popis dostaneme, jestliže rozlišujeme pouze stavy „vyhrála Alice“, „vyhrál Bob“, „hraje Alice“, „hraje Bob“ a celou sérii úspěšných pokusů považujeme za jeden krok (končí výhrou hráče s pravděpodobností* $(1/3)^2$ *pro Alici,* $(1/2)^3$ *pro Boba, nebo se na řadu dostává druhý hráč). Dostáváme matici přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 0 & 0 & 8/9 \\ 0 & 1/8 & 7/8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 *stavy jsou absorpční, zbývající* 2 *přechodné,*

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 8/9 \\ 7/8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -8/9 \\ -7/8 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & 4 \\ \frac{63}{16} & \frac{9}{2} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}.$$

Pokud začíná Alice, je pravděpodobnost výhry pro oba hráče stejná, 1/2.

Cvičení. *Alice a Bob házejí mincí. Padne-li dvakrát po sobě rub, vyhrává Alice. Padne-li sekvence rub-líc-rub, vyhrává Bob. Hra pokračuje, dokud nenastane jeden těchto výsledků. Jaké jsou pravděpodobnosti výsledků? (Návod: Stačí začít po prvních dvou krocích, kdy* 4 *ze stavů mají stejnou pravděpodobnost.)*

Řešení. *Přechodné stavy, které potřebujeme k popisu jen před dokončením prvních dvou hodů, můžeme ignorovat. Zbývá* 5 *stavů, které označíme sekvencí posledních výsledků: RLR, RR, LR, RL, LL. Po prvních dvou* *krocích mají stavy RR, LR, RL, LL pravděpodobnost* $1/4$*. Z nich RR je trvalý, zbývající* 3 *přechodné. Matice přechodu pro toto pořadí stavů je*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix} ,$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} ,$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Tuto matici vynásobíme zleva pravděpodobnostmi přechodných stavů po prvních dvou krocích, $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$*, a dostaneme* $\begin{pmatrix} 1/3 & 5/12 \end{pmatrix}$*. K tomu nutno připočítat, že s pravděpodobností* $1/4$ *již po prvních dvou krocích nastane absorpční stav RR, takže pravděpodobnost výhry Boba je* $1/3$*, Alice* $2/3$*.*

Cvičení. *Alice, Bob a Cyril házejí mincí (v tomto pořadí). Kdo první hodí líc, vyhrává. Hra se opakuje, dokud někdo nehodí líc. Stanovte pravděpodnosti výhry jednotlivých hráčů.*

Výsledky. $\begin{pmatrix} 4/7 & 2/7 & 1/7 \end{pmatrix}$.

Cvičení. *Stanovte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s následující maticí přechodu:*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Výsledky. *Stav 3 je přechodný, všechny ostatní jsou trvalé, jejich pravděpodobnosti konvergují k jedinému stacionárnímu rozdělení,* $\begin{pmatrix} 4/13 & 6/13 & 0 & 3/13 \end{pmatrix}$.

Cvičení. *(Obnovování paměti) Přepisujeme binární informaci, přičemž s pravděpodobností* $1\,\%$ *přepíšeme* 0 *jako* 1*, s pravděpodobností* $2\,\%$ *přepíšeme* 1 *jako* 0*. Jaké bude rozdělení pravděpodobností po velkém počtu přepisů?*

Výsledky. *Matice přechodu je*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} .$$

Řetězec je ergodický, z libovolného počátečního stavu konverguje k jedinému stacionárnímu rozdělení pravděpodobností, kterým je $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$*. Stejný výsledek dává mocnina matice*

$$\boldsymbol{P}^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} + 0.97^t \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Cvičení. *Alice a Bob hrají následující hru: Hráč, který je na řadě, hodí kostkou. Padne-li 6, vyhrává a hra končí. Padne-li jiné sudé číslo, pokračuje stejný hráč. Padne-li liché číslo, pokračuje druhý hráč. Začíná Alice. Jaké jsou pravděpodobnosti výsledků hry?*

Řešení. *Matice přechodu po vhodné permutaci stavů („vyhrála Alice", „vyhrál Bob", „hraje Alice", „hraje Bob") je*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

kde první 2 *stavy jsou absorpční, zbývající* 2 *přechodné,*

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice tohoto řetězce je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/2 \\ -1/2 & 2/3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{36}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 3/7 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

Začíná Alice, tj. počáteční rozdělení stavů je $\boldsymbol{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ *a asymptotické*

$$\boldsymbol{p}(0)\,\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \\ 3/7 & 4/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 & 3/7 \end{pmatrix}.$$

Pravděpodobnost výhry začínajícího hráče (Alice) je 4/7.

Cvičení. *Najděte asymptotické pravděpodobnosti stavů Markovova řetězce s maticí přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jestliže počáteční stav je 2.

Řešení. *Stavy* 1 *a* 4 *jsou absorpční, zbývající přechodné. Permutací stavů* $(1,4,2,3)$ *dostaneme matici přechodu ve tvaru*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

udává pravděpodobnosti dosažení absorpčních stavů z přechodných. Její první řádek odpovídá zadání, že začínáme ve stavu 2. *Asymptotické pravděpodobnosti přechodných stavů jsou nulové, dohromady* $(1/2, 1/2, 0, 0)$ *po změně pořadí stavů,* $(1/2, 0, 0, 1/2)$ *při jejich původním pořadí.*

Cvičení. *Tři hráči házejí kostkou. Komu padne* 5 *nebo* 6*, vyhrává. Padne-li jiné číslo, hází další hráč v pořadí (cyklicky se střídají, dokud některý nevyhraje). Najděte pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů.*

Řešení. *Matice přechodu je*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{Q})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{27}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 4/9 \\ 4/9 & 1 & 2/3 \\ 2/3 & 4/9 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{3}{19} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} &= \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ 4 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pravděpodobnosti výhry hráčů (v pořadí, ve kterém hrají), jsou $(9/19, 6/19, 4/19)$.

3 Maximálně věrohodné odhady

Cvičení. *Odhadněte stavy* i *a* k *Markovova řetězce s maticí přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(1, i, 2, k, 3)$.

Řešení. *Věrohodnost této posloupnosti stavů je*

$$L(i, k) = p_1(0) \cdot p_{1i} \cdot p_{i2} \cdot p_{2k} \cdot p_{k3}.$$

Odhady stavů i, k *jsou nezávislé. Věrohodnost stavu* i *závisí na 1. řádku a 2. sloupci matice přechodu, stavu* k *na 2. řádku a 3. sloupci. Maximum nastává pro* $i = 2$, $k = 2$.

Cvičení. *Odhadněte stavy* i *a* k *Markovova řetězce s maticí přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(2, i, k, 3)$.

Řešení. *Věrohodnost této posloupnosti stavů je*

$$L(i,k) = p_2(0) \cdot p_{2i} \cdot p_{ik} \cdot p_{k3}\,.$$

Je nenulová pro $(i,k) \in \{(2,2),(2,3),(3,3)\}$. *Maximum nastává pro* $i = 2, k = 2$.

Cvičení. *Markovův řetězec má dva stavy,* $1, 2$. *Pravděpodobnost přechodu ze stavu* 1 *do stavu* 2 *je* p, *pravděpodobnost přechodu ze stavu* 2 *do stavu* 1 *je* q.

A. Z pozorované posloupnosti stavů

$$(1,2,2,1,1,1,2,1,1,1,2,2,1,1,1,1)$$

odhadněte parametry p, q.

B. Určete pravděpodobnosti stavů 2 *kroky poté, co byl řetězec ve stavu* 1.

C. Stanovte stacionární rozdělení pravděpodobností stavů a posuďte, zda řetězec k tomuto rozdělení konverguje.

D. Stanovte pravděpodobnost, že se řetězec ze stavu 1 *vrátí do tohoto stavu v nejvýše* 3 *krocích.*

E. Stanovte pravděpodobnost, že se řetězec ze stavu 1 *vrátí do tohoto stavu (v libovolném počtu kroků).*

Řešení. *A.*

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Pozorované absolutní a relativní četnosti přechodů:

	1	2
1	7	3
2	3	2

	1	2
1	0.7	0.3
2	0.6	0.4

Maximálně věrohodný odhad matice přechodu je roven relativním četnostem, tj. $p = 0.3$, $q = 0.6$,

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

B.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.66 & 0.34 \end{pmatrix},$$

první řádek udává pravděpodobnosti stavů po dvou krocích při počátečním stavu 1. *(Nemusíme násobit celou matici, stačí ji* $2\times$ *vynásobit zleva vektorem.)*

C. Řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} (P - \boldsymbol{I}) = \mathbf{0}$$

dostaneme $a = 2/3$, $\begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, *což je jediné stacionární rozdělení pravděpodobností stavů. Řetězec k němu konverguje, neboť je ergodický.*

D. p_k = *pravděpodobnost návratu do stavu* 1 *po právě* k *krocích:*

k	p_k
1	0.7
2	0.18
3	0.072
celkem	0.952

E. Návrat do stavu 1 *nastane s pravděpodobností* 1, *neboť řetězec je ergodický.*

Cvičení. *Odhadněte stav* i *Markovova řetězce s maticí přechodu*

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(1, i, i, 3)$.

Řešení. *Věrohodnost této posloupnosti stavů je*

$$L(i,k) = p_1(0) \cdot p_{1i} \cdot p_{ii} \cdot p_{i3}\,.$$

Závisí na 1. řádku, diagonále a 3. sloupci matice přechodu. Maximum $p_1(0) \cdot 2/27$ *nastává pro* $i \in \{2,4\}$.

Cvičení. *Odhadněte stavy* i *a* k *Markovova řetězce s maticí přechodu*

$$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

z pozorované posloupnosti stavů $(2,i,k,3)$.

Řešení. *Věrohodnost této posloupnosti stavů je*

$$L(i,k) = p_2(0) \cdot p_{2i} \cdot p_{ik} \cdot p_{k3}\,,$$

přičemž $p_{2i} = 0.25$ *nezávisle na* i. *Maximum nastává pro* $i = 3, k = 4$.

4 Úlohy pro opakování

Pro následující úlohy můžete použít např. matice přechodu

$$\boldsymbol{P}_A = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_C = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Cvičení. *Najděte přechodové diagramy.*

Cvičení. *Odhadněte počáteční stav* i *a koncový stav* k *Markovova řetězce s danou maticí přechodu, jestliže posloupnost stavů byla* $i, 2, 1, 3, k$ *(dále ji neznáme) a počáteční rozdělení pravděpodobností bylo rovnoměrné.*

Řešení. *Věrohodnost této posloupnosti stavů je*

$$L(i,k) = p_i(0) \cdot p_{i2} \cdot p_{21} \cdot p_{13} \cdot p_{3k}\,.$$

Lze vytknout konstanty včetně $p_i(0) = 1/3$ *(pokud jsou nenulové!), věrohodnost je úměrná* $p_{i1} \cdot p_{2k}$. *Odhady stavů* i, k *jsou nezávislé.*

Věrohodnost možných hodnot stavu k *je dána 3. řádkem matice přechodu, věrohodnost stavu* i *2. sloupcem matice přechodu. Je však nutno vyloučit případ D, neboť v něm posloupnost stavů* $2, 1, 3$ *není možná a věrohodnost je nulová!*

[A. 3; 2, *B.* 1; 1, *C.* 2; 3, *D. –]*

Cvičení. *Odhadněte stav* i *Markovova řetězce s danou maticí přechodu, jestliže posloupnost stavů byla* $3, 2, i, 1$.

Řešení. *Věrohodnost této posloupnosti stavů je*

$$L(i) = p_3(0) \cdot p_{32} \cdot p_{2i} \cdot p_{i1}\,.$$

Lze vytknout nenulové konstanty, pak je věrohodnost úměrná $p_{2i} \cdot p_{i1}$, *jednotlivým hodnotám odpovídají součiny 2. řádku a 1. sloupce po složkách. V případě A je pro všechny hodnoty* i *nulová.*

[A. –, B. 3, *C. –, D.* 1*]*

Cvičení. *Který z daných Markovových řetězců spíše mohl vygenerovat posloupnost stavů (a)* $2,3,2,1,2$, *(b)* $1,2,1,3$*?*

Výsledky. *(a) B (jako jediný může vygenerovat tuto posloupnost), (b) A.*

Cvičení. *Je-li počáteční rozdělení pravděpodobností rovnoměrné, jaké je po 2 krocích?*

Řešení. $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P}_A^2 = \begin{pmatrix}\frac{5}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P}_B^2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P}_C^2 = \begin{pmatrix}0.28 & 0.27 & 0.45\end{pmatrix}$,
$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P}_D^2 = \begin{pmatrix}\frac{85}{108} & \frac{19}{108} & \frac{1}{27}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.787 & 0.176 & 0.037\end{pmatrix}$.

Cvičení. *Klasifikujte stavy řetězců.*

Výsledky. *A, B, C. Všechny stavy jsou trvalé neperiodické (ergodické), řetězec je nerozložitelný.*
D. Stav 1 je trvalý absorpční, 2 a 3 jsou přechodné.

Cvičení. *Najděte všechna stacionární rozdělení pravděpodobností stavů a posuďte, zda k nim rozdělení stavů konverguje.*

Řešení. *A, B, C. Řetězce jsou ergodické, mají tedy jediné stacionární rozdělení pravděpodobností, ke kterému konvergují z libovolného počátečního stavu. Dostaneme je řešením soustavy lineárních rovnic*

$$\begin{pmatrix}a & b & 1-a-b\end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}a & b & 1-a-b\end{pmatrix} .$$

A. $\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{7}{12}\end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ *(ve stacionárním rozdělení musí být pravděpodobnosti přechodných stavů nulové)*

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.3 & 0.6 & 0.1\\ 0.3 & 0.1 & 0.6\end{pmatrix} .$$

Počáteční stav je 3*. Vypočtěte (alespoň přibližně) rozdělení pravděpodobností*
A. po 4 *krocích,*
B. po 2^{24} *krocích.*

Řešení. *A.*

$$\boldsymbol{P}^4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.51 & 0.37 & 0.12\\ 0.51 & 0.12 & 0.37\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0.7599 & 0.1513 & 0.0888\\ 0.7599 & 0.0888 & 0.1513\end{pmatrix} .$$

Hledané rozdělení je v 3*. řádku výsledku,* $\begin{pmatrix}0.7599 & 0.0888 & 0.1513\end{pmatrix}$.
Místo toho lze počáteční rozdělení pravděpodobností $4\times$ *násobit zprava maticí přechodu:*

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{P}^4 &= \begin{pmatrix}0.3 & 0.1 & 0.6\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{P}^3 = \begin{pmatrix}0.51 & 0.12 & 0.37\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{P}^2 = \\ &= \begin{pmatrix}0.657 & 0.109 & 0.234\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix}0.7599 & 0.0888 & 0.1513\end{pmatrix} .\end{aligned}$$

B. Stav 1 *je absorpční, zbývající přechodné, v nekonečnu se pravděpodobnost stavu* 1 *blíží* 1*, přechodných stavů* 0*, pro velký počet kroků bude výsledek velmi podobný.*

Cvičení. *Markovův řetězec má matici přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} .$$

Počáteční rozdělení stavů je rovnoměrné. Vypočtěte (alespoň přibližně) rozdělení pravděpodobností
A. po 4 krocích,
B. po 1 000 000 kroků.

Řešení. *A.*

$$\boldsymbol{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.44 & 0.56 \\ 0.28 & 0.72 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.3504 & 0.6496 \\ 0.3248 & 0.6752 \end{pmatrix} .$$

Rozdělení po 4 krocích je

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.3504 & 0.6496 \\ 0.3248 & 0.6752 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3376 & 0.6624 \end{pmatrix} .$$

Místo toho lze počáteční rozdělení pravděpodobností $4\times$ *násobit zprava maticí přechodu:*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{P}^4 &= \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.36 & 0.64 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{P}^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 0.344 & 0.656 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.3376 & 0.6624 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

B. Stavy jsou ergodické, v nekonečnu se jejich pravděpodobnost blíží jedinému stacionárnímu rozdělení, které dostaneme řešením rovnice

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} ,$$

vyjde $\begin{pmatrix} a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$*. Pro velký počet kroků bude výsledek velmi podobný.*