Markovovy řetězce

Mirko Navara
Centrum strojového vnímání
katedra kybernetiky FEL ČVUT
Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a
http://cmp.felk.cvut.cz/˜navara/stat

15. ledna 2021

Obsah

1 O čem to může být? 1

2 Matematický model: (homogenní) Markovovy řetězce *(Markov chains)* 3

3 Pravděpodobnosti stavů 4
3.1 Příklady na pravděpodobnosti stavů 4
3.2 Permutace stavů 8

4 Klasifikace stavů Markovových řetězců s konečně mnoha stavy 8

5 Asymptotické chování Markovových řetězců s konečně mnoha stavy 12
5.1 Přechodné stavy 12
5.2 Nerozložitelné Markovovy řetězce 14
5.3 Rozložitelné Markovovy řetězce 16
5.4 Příklady 16

6 Reverzibilita 17
6.1 Odhady parametrů Markovových řetězců 17
6.2 Obrácení časové osy (zpětný chod) 18
6.3 Jak lze luštit šifry 1: model 20
6.4 Jak lze luštit šifry 2: rozluštění 21
6.5 Metropolisův algoritmus 22

7 Markovovy řetězce s nekonečně mnoha stavy 24

8 Příklady aplikací 24

9 Co zde nebylo 25
9.1 Kdy se vrátíme do stejného stavu? 25
9.2 Nehomogenní Markovovy řetězce 25
9.3 Markovovy procesy 25

10 Dodatek: Mocniny stochastických matic řádu 2 25

1 O čem to může být?

Příklad (basketbal). *[MN: PMS] Alice a Bob se střídavě strefují míčem do koše, začíná Alice. Kdo se první strefí, vyhrává. Alice se strefí s pravděpodobností* a*, Bob s pravděpodobností* b*. Jaká je pravděpodobnost výsledků hry?*

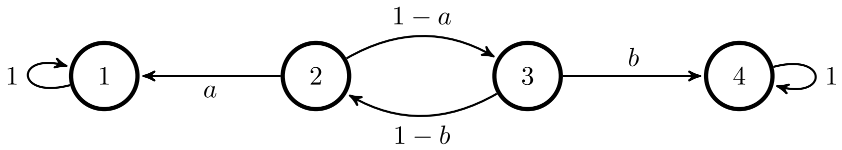
Řešení. *Po prvním hodu s pravděpodobností a Alice vyhrává, s pravděpodobností $1-a$ se pokračuje. Po 2. hodu hra skončí výhrou Boba s pravděpodobností $(1-a)\,b$, nebo je situace stejná jako na začátku a šance se dělí ve stejném poměru, tj. $a : (1-a)\,b$. Alice vyhraje s pravděpodobností*

$$\frac{a}{a+(1-a)\,b} = \frac{a}{a+b-a\,b}\,,$$

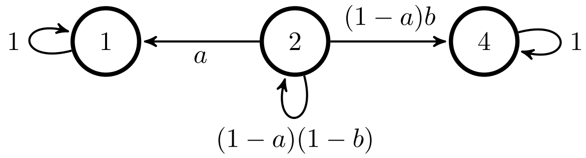
Bob s pravděpodobností

$$\frac{(1-a)\ b}{a+(1-a)\,b} = \frac{(1-a)\ b}{a+b-a\,b}\,.$$

(Předpokládáme, že aspoň jedna z pravděpodobností a, b je nenulová. Více viz [MN: PMS].) ☐



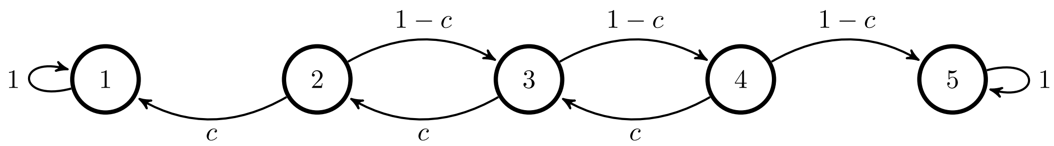
Můžeme sdružit 2 kroky do jednoho.



Příklad (foton). *[MN: PMS] Foton vnikne do tenké vrstvy s rovnoběžnými stěnami. Na jejím rozhraní může projít, nebo se odrazí a dojde k druhému rozhraní, kterým projde, nebo se odrazí atd. Vypočtěte pravděpodobnosti průchodu fotonu do jednotlivých poloprostorů vymezených touto vrstvou.*

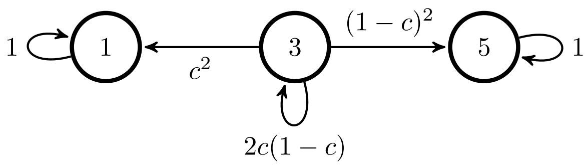
Řešení. *Jde o příklad „basketbal“ v jiné interpretaci. Obdobná úloha se řeší při programování barevných tiskáren.* ☐

Příklad (shoda v tenisu). *Alice s Bobem hrají tenis, došlo ke shodě, takže hru vyhraje hráč, který jako první vyhraje o 2 míče víc než soupeř. Alice vyhraje míč s pravděpodobností c. Jaké jsou pravděpododobnosti výsledků hry? Jaké rozdělení a střední hodnotu má počet míčů hry?*



Řešení. *Sdružíme 2 kroky do jednoho: Po 2 míčích buď vyhraje Alice (s pravděpodobností $a = c^2$), nebo Bob (s pravděpodobností $(1-c)^2$), nebo bude opět shoda. Jde o příklad „basketbal“, kde*

$$a = c^2\,, \qquad (1-a)\,b = (1-c)^2\,.$$



Alice vyhraje s pravděpodobností $\dfrac{c^2}{c^2+(1-c)^2}$, např. pro $c = 2/3$ s pravděpodobností $4/5$. Takto bychom však nevyřešili výsledek hry od jejího počátku (místo od shody), setu, zápasu, turnaje... [Papoulis, Pillai 2002]

Příklad (informační kanál se zpětnou vazbou). *Odesílatel pošle zprávu v kódu, dovolujícím odhalit chyby v přenosu. (Pro jednoduchost zanedbáváme riziko nerozpoznané chyby.) Zpráva je doručena správně s pravděpodobností c. Příjemce za stejných podmínek pošle zpět (jednobitovou) zprávu o úspěšnosti přijetí. Chybná zpráva*

o správném přenosu vypadá stejně jako správná zpráva o chybném přenosu. V těchto případech se přenos opakuje za stejných podmínek. Chybná zpráva o chybném přenosu vypadá stejně jako správná zpráva o správném přenosu. V těchto případech přenos končí; přijatá zpráva může být správná nebo chybná.
Jaké jsou pravděpodobnosti ukončení správným/chybným přijetím zprávy?

Řešení. *Jde opět o příklad „shoda v tenisu“, resp. „basketbal“.* □

Další otázky: Jaké je rozdělení délky komunikace; její střední hodnota a důležité kvantily?

Otázky: Jaké je asymptotické chování systému? Jak závisí na počátečním stavu?

2 Matematický model: (homogenní) Markovovy řetězce *(Markov chains)*

Doporučená literatura: [Hsu 1996, Papoulis, Pillai 2002, Wasserman 2004].
Posloupnost diskrétních náhodných veličin $X_0, X_1, X_2, \ldots$ s hodnotami ze spočetné množiny **stavů**, obvykle $\{1, 2, \ldots\}$.
Indexována je **diskrétním časem** s hodnotami z množiny $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
Z hlediska **okamžiku** t rozlišujeme **minulost** ($< t$) a **budoucnost** ($> t$).
Dáno:
Pravděpodobnosti počátečních stavů (=rozdělení náhodné veličiny X_0),

$$p_i(0) = p_{X_0}(i)\,,$$

popř. daný počáteční stav k, tj.

$$p_i(0) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = k, \\ 0 & \text{pro } i \neq k, \end{cases}$$

pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j v jednom kroku,

$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)\,,$$

(nezávislé na čase t); pro konečně mnoho stavů je lze popsat **maticí přechodu**

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

která je **stochastická** (=má jednotkové řádkové součty),

$$\forall i = 1, \ldots, n : \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1\,.$$

Homogenní: Matice přechodu nezávisí na čase.

Řetězce: S diskrétním časem a diskrétními stavy; pro spojitý čas dostáváme **Markovův proces** *(Markov process)*.

Markovovy: Pravděpodobnost budoucích stavů je plně určena současným stavem, bez ohledu na minulé stavy,

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i_t) = p_{i_t j}\,.$$

(Stav nese „dostatečnou informaci“ o předchozím průběhu.)
To je *podmíněná nezávislost* budoucího a minulého stavu při daném současném stavu: pro $u < t < v$ a libovolné stavy i, j, k

$$P(X_u = i, X_v = k \mid X_t = j) = P(X_u = i \mid X_t = j) \cdot P(X_v = k \mid X_t = j)\,.$$

3 Pravděpodobnosti stavů

Pravděpodobnosti stavů vyjadřuje na počátku řádkový vektor

$$\boldsymbol{p}(0) = (p_1(0), \ldots, p_n(0)) = (p_{X_0}(1), \ldots, p_{X_0}(n)) \ ,$$

dále se vyvíjejí podle rekurentního vzorce

$$\boldsymbol{p}(t+1) = \boldsymbol{p}(t)\, \boldsymbol{P}\,, \qquad p_j(t+1) = \sum_i p_i(t)\, p_{ij}\,,$$

$$\boldsymbol{p}(t+u) = \boldsymbol{p}(t)\, \boldsymbol{P}^u\,, \qquad p_j(t+u) = \sum_i p_i(t)\, p_{ij}(u)\,,$$

$$\boldsymbol{p}(u) = \boldsymbol{p}(0)\, \boldsymbol{P}^u\,, \qquad p_j(u) = \sum_i p_i(0)\, p_{ij}(u)\,,$$

kde prvky matice $\boldsymbol{P}^t$ značíme $p_{ij}(t)$ ($\neq p_{ij}^t$), což je pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j v t krocích.
Chapmanova-Kolmogorovova rovnice:

$$\boldsymbol{P}^{t+u} = \boldsymbol{P}^t\, \boldsymbol{P}^u\,, \qquad p_{kj}(t+u) = \sum_i p_{ki}(t)\, p_{ij}(u)\,,$$

kde sčítáme přes všechny možné stavy i v čase t.
Princip superpozice (=linearita): Pokud jsou počáteční pravděpodobnosti $\boldsymbol{p}(0)$ konvexní kombinací (=směsí) rozdělení,

$$\boldsymbol{p}(0) = c\, \boldsymbol{q}(0) + (1-c)\, \boldsymbol{r}(0)\,, \qquad c \in \langle 0, 1 \rangle\,,$$

jsou pozdější pravděpodobnosti dány stejnou konvexní kombinací pravděpodobností jednotlivých složek,

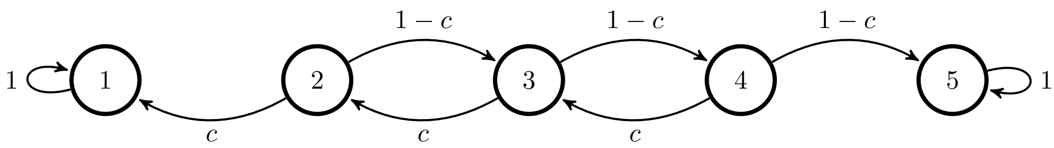
$$\boldsymbol{p}(u) = \boldsymbol{p}(0)\, \boldsymbol{P}^u = c\, \boldsymbol{q}(0)\, \boldsymbol{P}^u + (1-c)\, \boldsymbol{r}(0)\, \boldsymbol{P}^u = c\, \boldsymbol{q}(u) + (1-c)\, \boldsymbol{r}(u)\,.$$

Důsledek. *Stačí nám vyšetřit případy, kdy počáteční stav je daný (=Diracovo rozdělení).*

3.1 Příklady na pravděpodobnosti stavů

Příklad (otevřené restaurace). *Piják se pohybuje Skloněnou ulicí mezi dvěma restauracemi. Před každými dveřmi, které nevedou do restaurace, se rozhodne, kterým směrem se vydá; s pravděpodobností c půjde z kopce, s pravděpodobností $1-c$ do kopce. **Až najde restauraci, zůstane v ní**. Jaké jsou pravděpodobnosti dosažení obou restaurací? (Jednodimenzionální náhodná procházka s absorpčními bariérami.) Řešte speciálně pro restaurace ve vzdálenosti 2 od výchozí polohy.*

Řešení. *Jde opět o příklad „shoda v tenisu“, resp. „basketbal“.*



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 2\,c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 \\ 0 & c^2 & 0 & c\,(1-c) & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Např. pro $c = 0.7$ dostáváme

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.21 & 0 & 0.09 & 0 \\ 0.49 & 0 & 0.42 & 0 & 0.09 \\ 0 & 0.49 & 0 & 0.21 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.945\,56 & 6.534\,6 \cdot 10^{-3} & 0 & 2.800\,5 \cdot 10^{-3} & 4.510\,3 \cdot 10^{-2} \\ 0.833\,79 & 0 & 1.306\,9 \cdot 10^{-2} & 0 & 0.153\,14 \\ 0.572\,98 & 1.524\,7 \cdot 10^{-2} & 0 & 6.534\,6 \cdot 10^{-3} & 0.405\,24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix},$$

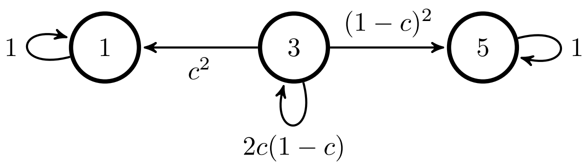
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.49 & 0 & 0.42 & 0 & 0.09 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{10} = \begin{pmatrix} 0.833\,79 & 0 & 1.306\,9 \cdot 10^{-2} & 0 & 0.153\,14 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{30} = \begin{pmatrix} 0.844\,83 & 0 & 2.232\,2 \cdot 10^{-6} & 0 & 0.155\,17 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^t = \begin{pmatrix} \frac{c^2}{c^2+(1-c)^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-c)^2}{c^2+(1-c)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.844\,83 & 0 & 0 & 0 & 0.155\,17 \end{pmatrix}.$$

Bez 2. a 4. stavu dostaneme zjednodušený popis, v němž 2 kroky považujeme za jeden (z lichého stavu se po sudém počtu kroků dostaneme do lichého stavu, sudé stavy ignorujeme):



$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Např. pro $c = 2/3$ dostáváme

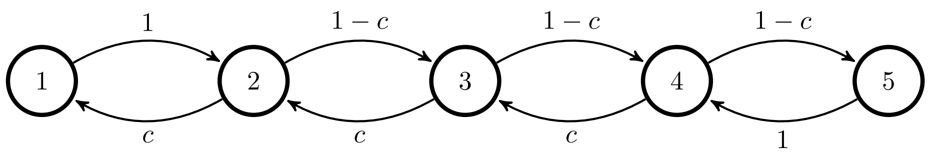
$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{52}{81} & \frac{16}{81} & \frac{13}{81} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.799\,76 & 3.007\,3 \cdot 10^{-4} & 0.199\,94 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Příklad (zavřené restaurace ve vzdálenosti 2 – pokračování**).**

Řešení.



$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\ c&0&1-c&0&0\\ 0&c&0&1-c&0\\ 0&0&c&0&1-c\\ 0&0&0&1&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{P}^2=\begin{pmatrix}c&0&1-c&0&0\\ 0&2\,c-c^2&0&(1-c)^2&0\\ c^2&0&2c\,(1-c)&0&(1-c)^2\\ 0&c^2&0&1-c^2&0\\ 0&0&c&0&1-c\end{pmatrix}.$$ *Např. pro* $c=0.7$ *dostáváme*

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\ 0.7&0&0.3&0&0\\ 0&0.7&0&0.3&0\\ 0&0&0.7&0&0.3\\ 0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

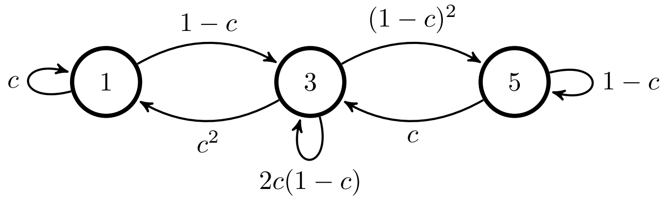
$$\boldsymbol{P}^2=\begin{pmatrix}0.7&0&0.3&0&0\\ 0&0.91&0&0.09&0\\ 0.49&0&0.42&0&0.09\\ 0&0.49&0&0.51&0\\ 0&0&0.7&0&0.3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}^{10}=\begin{pmatrix}0.594\,76&0&0.360\,14&0&4.\,510\,3\cdot10^{-2}\\ 0&0.846\,86&0&0.153\,14&0\\ 0.588\,22&0&0.363\,87&0&4.\,790\,4\cdot10^{-2}\\ 0&0.833\,79&0&0.166\,21&0\\ 0.572\,98&0&0.372\,58&0&5.\,443\,8\cdot10^{-2}\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}&=\begin{pmatrix}0&0.7&0&0.3&0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^2&=\begin{pmatrix}0.49&0&0.42&0&0.09\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{10}&=\begin{pmatrix}0.588\,22&0&0.363\,87&0&4.\,790\,4\cdot10^{-2}\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{30}&=\begin{pmatrix}0.591\,38&0&0.362\,07&0&4.\,655\,2\cdot10^{-2}\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{30}&=\begin{pmatrix}0.591\,38&0&0.362\,07&0&4.\,655\,3\cdot10^{-2}\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{31}&=\begin{pmatrix}0&0.844\,83&0&0.155\,17&0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^t\right)\ \textit{neexistuje.}$$

Bez 2. a 4. stavu dostaneme zjednodušený popis, v němž 2 kroky považujeme za 1:



$$\boldsymbol{P}_Z=\begin{pmatrix}c&1-c&0\\ c^2&2\,c\,(1-c)&(1-c)^2\\ 0&c&1-c\end{pmatrix}.$$

Např. pro $c=2/3$ *dostáváme*

$$\boldsymbol{P}_Z=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\ \frac{4}{9}&\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\\ 0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

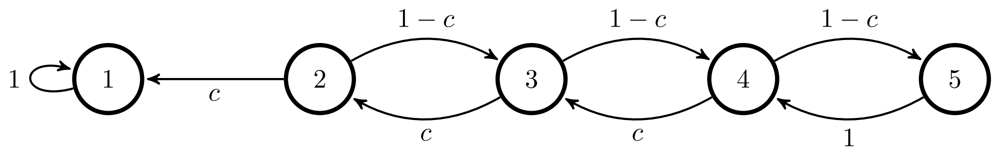
$$\boldsymbol{P}_Z^2=\begin{pmatrix}\frac{16}{27}&\frac{10}{27}&\frac{1}{27}\\ \frac{40}{81}&\frac{34}{81}&\frac{7}{81}\\ \frac{8}{27}&\frac{14}{27}&\frac{5}{27}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{10}\doteq\begin{pmatrix}0.533\,42&0.399\,95&6.\,662\,2\cdot10^{-2}\\ 0.533\,27&0.400\,03&6.\,669\,7\cdot10^{-2}\\ 0.532\,97&0.400\,18&6.\,684\,7\cdot10^{-2}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{20} \doteq \begin{pmatrix} 0.533 & 0.400 & 6.67\cdot 10^{-2} \\ 0.533 & 0.400 & 6.67\cdot 10^{-2} \\ 0.533 & 0.400 & 6.67\cdot 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

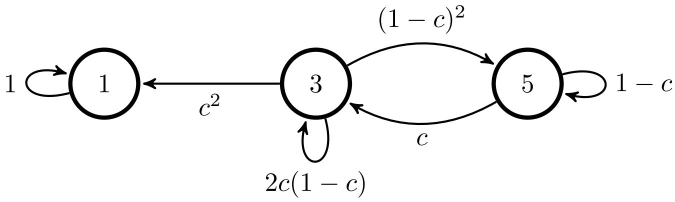
Příklad (**otevřená a zavřená restaurace ve vzdálenosti 2** – pokračování)**.**

Řešení.



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 2\,c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 \\ 0 & c^2 & 0 & 1-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \end{pmatrix}.$$

Bez 2. a 4. stavu dostaneme zjednodušený popis, v němž 2 kroky považujeme za jeden:



$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 \\ 0 & c & 1-c \end{pmatrix}.$$

Např. pro $c = 2/3$ dostáváme

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{52}{81} & \frac{22}{81} & \frac{7}{81} \\ \frac{8}{27} & \frac{14}{27} & \frac{5}{27} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.98613 & 1.0405\cdot 10^{-2} & 3.4683\cdot 10^{-3} \\ 0.97225 & 2.0810\cdot 10^{-2} & 6.9366\cdot 10^{-3} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_Z^{20} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.9998 & 1.8\cdot 10^{-4} & 6.01\cdot 10^{-5} \\ 0.9995 & 3.61\cdot 10^{-4} & 1.2\cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Cvičení. *Upravte předchozí úlohy na jednodimenzionální náhodné procházky tak, že se náhodně nevolí směr, ale změna směru.*
(Návod: Potřebujeme zdvojit stavy, do nichž se lze dostat z obou stran, a tím přidat informaci o tom, z kterého směru jsme přišli. Tu je potřeba dodat i v popisu počátečního stavu.)

Cvičení. *[Wasserman 2004] Markovův řetězec X_t, $t \in \mathbb{N}$, má maticí přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$$

a počáteční pravděpodobnosti $(0.3,\ 0.4,\ 0.3)$. Najděte pravděpodobnosti

$$P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3),$$
$$P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 2).$$

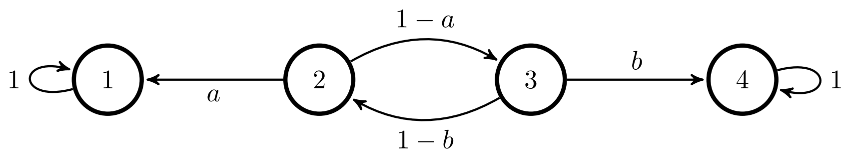
Cvičení. *(upraveno dle [Wasserman 2004]) Házíme kostkou. Náhodná veličina X_t je maximum z prvních t hodů. Ukažte, že se jedná o Markovův řetězec, najděte jeho přechodový diagram a matici přechodu.*

3.2 Permutace stavů

Pokud v popisu změníme pořadí stavů, změní se stejně pořadí složek vektorů i řádků a sloupců matice přechodu.

Příklad (basketbal – pokračování**).** *Matice přechodu*

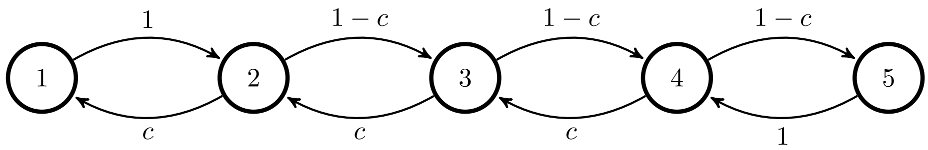
$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



se výměnou 2. a 4. stavu (=permutací stavů $(1,4,3,2)$*) změní na matici*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1-b \\ a & 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad (zavřené restaurace ve vzdálenosti 2 – pokračování**).**



Sloučením dvou kroků do jednoho jsme dospěli k matici:

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 2\,c-c^2 & 0 & (1-c)^2 & 0 \\ c^2 & 0 & 2c\,(1-c) & 0 & (1-c)^2 \\ 0 & c^2 & 0 & 1-c^2 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \end{pmatrix}.$$

Permutací stavů $(1,3,5,2,4)$ *dostaneme blokově diagonální matici:*

$$\begin{pmatrix} c & 1-c & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,c-c^2 & (1-c)^2 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 1-c^2 \end{pmatrix}.$$

4 Klasifikace stavů Markovových řetězců s konečně mnoha stavy

Stav j je **dosažitelný** (angl. *accessible*) ze stavu i, jestliže se z i do j dá přejít s nenulovou pravděpodobností (pro nějaký počet kroků),

$$\exists t \geq 0 : p_{ij}(t) > 0\,.$$

Značení: $i \to j$.   Negace: $i \not\to j$.
Stavy i, j **komunikují** (angl. *communicate*), jestliže $i \to j \wedge j \to i$. Značení: $i \leftrightarrow j$.
Relace $\leftrightarrow$ je ekvivalence.
Stav je **trvalý** (angl. *persistent, recurrent*), jestliže (podmíněná) pravděpodobnost, že když z něj vyjdeme, někdy v budoucnu se do něj vrátíme, je 1.
Speciální případ trvalého stavu: Stav i je **absorpční** (angl. *absorbing*), jestliže jej nelze opustit.

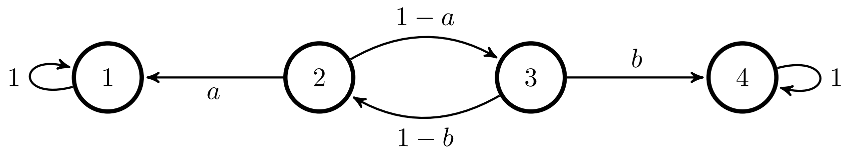
Jak se pozná, že i je absorpční stav?
$p_{ii} = 1$, tj.

$$p_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j, \\ 0 & \text{pro } i \neq j. \end{cases}$$

Stav je **přechodný** (angl. *transient*), jestliže není trvalý, tj. pravděpodobnost, že se do něj (někdy) vrátíme, je < 1.
Jak se pozná, že i je přechodný stav?
Lze se z něj dostat do stavu, z něhož se nelze dostat zpět, tj. existuje stav j takový, že $i \to j \wedge j \not\to i$.
Jak se pozná, že i je trvalý stav?
Není přechodný, neboli lze se z něj dostat jen do stavů, z nichž se lze dostat zpět, tj. $i \to j \implies j \to i$.
Důsledek:
Když i je přechodný, $i \leftrightarrow j$, pak j je přechodný.
Když i je trvalý, $i \leftrightarrow j$, pak j je trvalý.

Příklad (basketbal – pokračování**).** *Matice přechodu je*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



první a poslední stav je trvalý (dokonce absorpční), zbývající 2 přechodné, protože se z nich lze dostat do absorpčních (a zpět ne).

Věta. *Stav i je trvalý* $\iff \sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}(t) = \infty$. *Stav i je přechodný* $\iff \sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}(t) < \infty$.

Důkaz. „$\implies$“: Číslo $\sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}(t)$ je střední hodnota počtu návratů. S pravděpodobností 0 se nevrátíme. S pravděpodobností 1 se aspoň jednou vrátíme. Pravděpodobnost, že 1. návrat bude i poslední, je 0. Pravděpodobnost, že n-tý návrat bude poslední, je 0 pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To je spočetně mnoho jevů, tedy pravděpodobnost, že počet návratů bude konečný, je 0. S pravděpodobností 1 se vrátíme nekonečněkrát.
„$\Leftarrow$“: Předpokládejme, že stav i je přechodný. Označme $q < 1$ pravděpodobnost, že se někdy vrátíme. Po prvním návratu následuje druhý s podmíněnou pravděpodobností q, celkově s pravděpodobností q^2, n-tý s pravděpodobností q^n. Celkový součet pravděpodobností návratů
$\sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}(t)$ je roven součtu pravděpodobností n-tého návratu přes všechna n,

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_{ii}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} < \infty .$$

□

Perioda stavu i je největší společný dělitel všech čísel t, pro která $p_{ii}(t) > 0$, tj. největší číslo t takové, že $p_{ii}(u) = 0$ pro všechna u, která nejsou násobky t.
Trvalý stav je **periodický** (angl. *periodic*), jestliže má periodu $t > 1$, v opačném případě je **neperiodický** (angl. *aperiodic*).
Nutná podmínka: Je-li stav i periodický, musí být odpovídající prvek na diagonále $p_{ii} = 0$.
Když $i \leftrightarrow j$ a stav i je periodický s periodou t, pak j je periodický s periodou t.
Stav je **ergodický** (angl. *ergodic*), jestliže je trvalý a neperiodický.

Příklad (náhodná procházka v cyklu). *Pro (obousměrnou) náhodnou procházku v cyklu sudé délky mají všechny stavy periodu 2 (přecházíme mezi sudými a lichými), jsou trvalé a periodické.*
Pro (obousměrnou) náhodnou procházku v cyklu liché délky mají všechny stavy periodu 1 (přestože se do nich nelze vrátit v 1 kroku!) a jsou ergodické.

Množina **trvalých** stavů je **uzavřená**, jestliže ji nelze opustit.
Komponenta je (každá) neprázdná uzavřená množina (trvalých) stavů, která neobsahuje vlastní (=menší neprázdnou) uzavřenou podmnožinu stavů.

Věta. *Všechny uzavřené množiny stavů jsou sjednocení (disjunktních) komponent (včetně prázdné množiny komponent) a tvoří σ-algebru podmnožin množiny všech trvalých stavů.*

Každý absorpční stav tvoří jednoprvkovou komponentu.
Každá množina absorpčních stavů je uzavřená.

Markovův řetězec je **nerozložitelný**, jestliže množina všech jeho stavů je komponenta.
$\Rightarrow$ Nemá přechodné stavy.
Dosažitelnost (BÚNO: v obou směrech) rozděluje všechny *trvalé* stavy na disjunktní komponenty. (Dosažitelné jsou právě ty dvojice stavů, které patří do stejné komponenty.) Všechny stavy v komponentě mají stejnou periodu.

$\Rightarrow$ Pokud jsou všechny stavy trvalé a řetězec je rozložitelný, lze matici přechodu (po vhodné permutací stavů) vyjádřit jako *blokově diagonální*,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{D}_k \end{pmatrix},$$

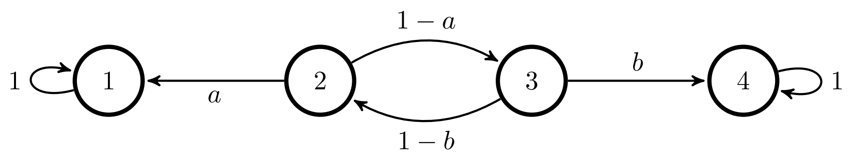
kde každý blok odpovídá jedné komponentě a $\boldsymbol{0}$ je nulová matice odpovídajícího řádu.
Pokud existují přechodné stavy a zařadíme je až za trvalé (pomocí permutace stavů), matice přechodu má tvar

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right),$$

kde $\boldsymbol{D}$ vyjadřuje pravděpodobnosti přechodů mezi trvalými stavy, $\boldsymbol{Q}$ mezi přechodnými a $\boldsymbol{R}$ vyjadřuje pravděpodobnosti přechodů z přechodných stavů do trvalých.
Po rozkladu množiny trvalých stavů na komponenty dostaneme tvar

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{D}_k & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2 & \cdots & \boldsymbol{R}_k & \boldsymbol{Q} \end{array}\right).$$

Příklad (**basketbal** – pokračování).



Matice přechodu po permutaci stavů byla

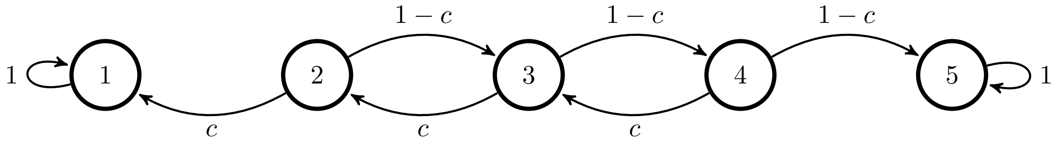
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 & 1-b \\ a & 0 & 1-a & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{Q} \end{array}\right),$$

kde první 2 stavy jsou trvalé (dokonce absorpční), zbývající 2 přechodné,

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1-b \\ 1-a & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad (**otevřené restaurace ve vzdálenosti 2** – pokračování)**.**



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutací stavů $(1,5,2,3,4)$ *dostaneme matici přechodu*

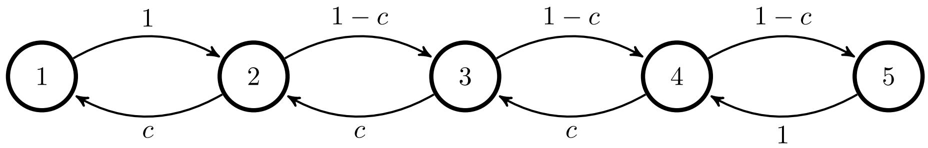
$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 1-c & 0 & c & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{Q} \end{array}\right),$$

kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 3 přechodné,

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1-c & 0 \\ c & 0 & 1-c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-c \end{pmatrix}.$$

Příklad (**zavřené restaurace ve vzdálenosti 2** – pokračování)**.**



Sloučením dvou kroků do jednoho a přeskupením stavů („napřed liché, pak sudé“) jsme dospěli k blokově diagonální matici:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} c & 1-c & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1-c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\,c-c^2 & (1-c)^2 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 1-c^2 \end{array}\right).$$

Tento řetězec lze rozložit na 2 *komponenty: jednu se* 3 *stavy (odpovídajícími lichým,* $1,3,5$, *v původní reprezentaci), druhou se* 2 *stavy (odpovídajícími původním sudým,* $2,4$*). Všechny stavy jsou ergodické.*

Cvičení. *[Wasserman 2004] Markovův řetězec má maticí přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.05 & 0.5 & 0.4 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete přechodné a trvalé stavy a jejich periodu.

Cvičení. *[Hsu 1996] Markovův řetězec má maticí přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Je stav 1 periodický?

5 Asymptotické chování Markovových řetězců s konečně mnoha stavy

Metody řešení:

- Speciální případy lze řešit exaktně.
- Obecně potřebujeme určit $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$. Pro matici řádu 2 viz Dodatek 10.
- Obtížné úlohy lze simulovat na počítači (metoda MCMC=Markov Chain Monte Carlo) a získat tak aspoň představu o jejich vlastnostech.

5.1 Přechodné stavy

Věta. *Pravděpodobnosti přechodných stavů konvergují k* 0.

Důkaz. V konečném čase T se z přechodného stavu přejde do některého trvalého s pravděpodobností aspoň $\varepsilon > 0$, v některém z přechodných stavů zůstáváme s pravděpodobností nejvýše $1-\varepsilon$. V čase $2T$ zůstáváme v některém z přechodných stavů s pravděpodobností nejvýše $(1-\varepsilon)^2$, v čase tT s pravděpodobností nejvýše $(1-\varepsilon)^t \to 0$ pro $t \to \infty$.

□

Důsledek. *S pravděpodobností* 1 *se dostaneme do některé komponenty a v té již zůstaneme.*

Důsledek. *Existuje trvalý stav.*

Otázky:
Do jakých trvalých stavů přejdeme z přechodných?
Za jak dlouho?

Věta. *Nechť stavy* $1,\ldots,i$ *jsou absorpční,* $i+1,\ldots,n$ *přechodné. Pak matice přechodu má tvar*

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_i & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right),$$

kde $\boldsymbol{I}_i$ *je jednotková matice řádu* i*. Pravděpodobnost, že z přechodného stavu* $j > i$ *skončíme v absorpčním stavu* $k \le i$*, je prvek na pozici* $(j-i,k)$ *v matici*

$$\underbrace{(\boldsymbol{I}_{n-i} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^3 + \ldots)}_{\boldsymbol{F}}\,\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}\ \boldsymbol{R},$$

kde $\boldsymbol{I}_{n-i}$ *je jednotková matice řádu* $n-i$ *a*

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_{n-i} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^3 + \ldots$$

je ***fundamentální matice*** *tohoto řetězce.*

Důkaz. (částečný) Tvar matice přechodu jsme již odvodili. Matice $\boldsymbol{Q}$ popisuje „recyklaci“ přechodných stavů a matice $\boldsymbol{R}$ jejich nevratnou přeměnu na trvalé. □

Pokud jsou pouze přechodné a absorpční stavy, pak je lze seřadit tak, jak požaduje předchozí věta.

Věta.

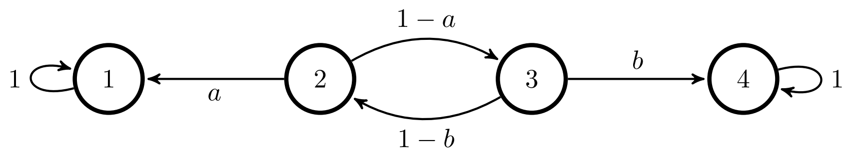
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_{n-i} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^3 + \ldots = (\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q})^{-1}.$$

Důkaz. (částečný) Označme
$$\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{I}_{n-i} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^3 + \ldots + \boldsymbol{Q}^t \,.$$

Pak
$$(\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}^2 + \boldsymbol{Q}^2 - \boldsymbol{Q}^3 + \ldots - \boldsymbol{Q}^{t+1} = \boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q}^{t+1} \,.$$
Matice $\boldsymbol{Q}$ má všechny součty řádků nejvýše 1 a některé menší než 1. O takových maticích je známo, že $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{Q}^t = \boldsymbol{0}$ a že $\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q}$ je regulární. Tudíž
$$\lim_{t\to\infty} (\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q}) \cdot \boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{I}_{n-i} \,,$$
$$\boldsymbol{F} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{F}_t = (\boldsymbol{I}_{n-i} - \boldsymbol{Q})^{-1} \,.$$

□

Příklad (**basketbal** – pokračování)**.**

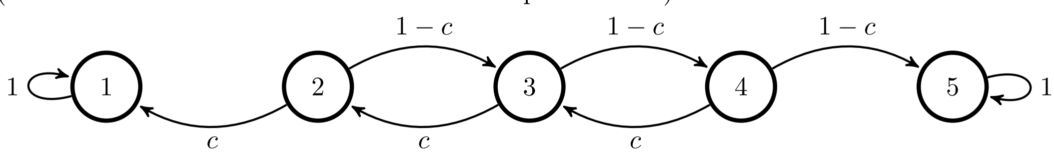


Matice přechodu po permutaci stavů byla
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 & 1-b \\ a & 0 & 1-a & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right) ,$$
kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 2 přechodné,
$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1-b \\ 1-a & 0 \end{pmatrix} ,$$
$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b-1 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a+b-a\,b} \begin{pmatrix} 1 & 1-b \\ 1-a & 1 \end{pmatrix} ,$$
$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \frac{1}{a+b-a\,b} \begin{pmatrix} a\,(1-b) & b \\ a & b\,(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a\,(1-b)}{a+b-a\,b} & \frac{b}{a+b-a\,b} \\ \frac{a}{a+b-a\,b} & \frac{b\,(1-a)}{a+b-a\,b} \end{pmatrix} .$$
Začíná Alice (stav 4*, tj. poslední; před permutací byl* 2*.), pravděpodobnosti přechodů do absorpčních stavů jsou tedy v posledním řádku matice* $\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R}$*.*

Alice vyhraje s pravděpodobností $\dfrac{a}{a+b-a\,b}$*, Bob s pravděpodobností* $\dfrac{b\,(1-a)}{a+b-a\,b}$.

Např. pro $a = 1/2$*,* $b = 1/3$ *Alice vyhraje s pravděpodobností* $3/4$ *, Bob s pravděpodobností* $1/4$ *, což odpovídá numerickému experimentu:*
$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.749\,99 & 1.693\,5 \cdot 10^{-5} & 0.250\,00 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} .$$

Příklad (**otevřené restaurace ve vzdálenosti 2** – pokračování)**.**



Permutací původních stavů $(1,5,2,3,4)$ *jsme dostali matici přechodu*
$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c & 0 & 0 & 1-c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 1-c \\ 0 & 1-c & 0 & c & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right) ,$$

kde první 2 stavy jsou absorpční, zbývající 3 přechodné,

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1-c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1-c & 0 \\ c & 0 & 1-c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{Q})^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & c-1 & 0 \\ -c & 1 & c-1 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \frac{1}{2\,c^2 - 2\,c + 1} \begin{pmatrix} 1-c+c^2 & 1-c & (1-c)^2 \\ c & 1 & 1-c \\ c^2 & c & c^2-c+1 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} &= \frac{1}{2\,c^2 - 2\,c + 1} \begin{pmatrix} c\,\left(1-c+c^2\right) & (1-c)^3 \\ c^2 & (1-c)^2 \\ c^3 & (1-c)\,\left(1-c+c^2\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Např. pro $c = 2/3$ dostáváme

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{14}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}.$$

Souhlas s numerickým experimentem, je-li počáteční stav prostřední z přechodných:

$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.799\,76 & 3.007\,3 \cdot 10^{-4} & 0.199\,94 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Matice $\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R}$ je stochastická, udává pravděpodobnosti výsledků pro libovolný přechodný počáteční stav (i pro jejich směs, tj. počáteční rozdělení, kterým ji stačí vynásobit zleva). Např. pro rovnoměrné rozdělení počátečních stavů dostaneme

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{14}{15} & \frac{1}{15} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{8}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{45} & \frac{11}{45} \end{pmatrix}.$$

Co když trvalé stavy nejsou všechny absorpční?

Můžeme ignorovat rozdíly mezi trvalými stavy, které komunikují (jsou navzájem dosažitelné): Každou komponentu nahradíme jedním „novým“ stavem, který již dále nerozlišujeme. Ten je absorpční.
Tím jsme převedli úlohu na předcházející (máme pouze přechodné a absorpční stavy).
Dozvíme se, s jakou pravděpodobností skončíme v které komponentě.

Kdybychom chtěli vědět pravděpodobnosti stavů uvnitř této komponenty, analýza by byla složitější (záleží nejen na tom, přes který stav do ní vstoupíme, ale také, kdy).

Už víme, že s pravděpodobností 1 přejdeme do nějaké komponenty, kterou už neopustíme.
Otázka je, co se děje dál.

5.2 Nerozložitelné Markovovy řetězce

Stacionární rozdělení pravděpodobností $\boldsymbol{p}$ je takové, které se zachovává, tj.

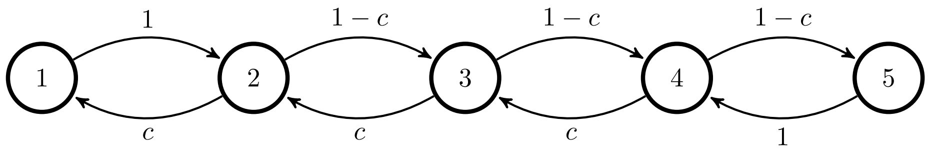
$$\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p},$$

neboli levý vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu 1.
Lze je najít vyřešením této (homogenní) soustavy lineárních rovnic pro $\boldsymbol{p}$ s dodatečnou podmínkou, že součet neznámých je 1.
Markovův řetězec je **ergodický**, je-li nerozložitelný a má všechny stavy ergodické.

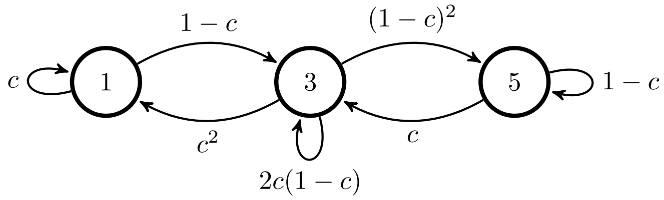
Věta. *Ergodický Markovův řetězec má jediné stacionární rozdělení pravděpodobností; k tomu konverguje při libovolném počátečním rozdělení.*

Důsledek. *V tom případě* $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t$ *existuje a je rovna matici, jejíž všechny řádky jsou rovné stacionárnímu rozdělení.*

Příklad (zavřené restaurace ve vzdálenosti 2 – pokračování**).**



Tento řetězec není ergodický, ale pro liché stavy jsme dostali zjednodušený popis, v němž 2 kroky považujeme za 1, a ten ergodický je:



$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} c & 1-c & 0 \\ c^2 & 2\,c\,(1-c) & (1-c)^2 \\ 0 & c & 1-c \end{pmatrix}$$

Např. pro $c = 2/3$

$$\boldsymbol{P}_Z = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Tento Markovův řetězec je nerozložitelný a má všechny stavy ergodické, takže má jediné stacionární rozdělení pravděpodobností, které dostaneme řešením soustavy lineárních rovnic

$$(a, b, 1-a-b)\,\boldsymbol{P}_Z = (a, b, 1-a-b)\,,$$
$$(a, b, 1-a-b) = \left(\frac{8}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{15}\right).$$

Souhlas s numerickým experimentem:

$$\boldsymbol{P}_Z^{10} \doteq \begin{pmatrix} 0.533\,42 & 0.399\,95 & 6.662\,2 \cdot 10^{-2} \\ 0.533\,27 & 0.400\,03 & 6.669\,7 \cdot 10^{-2} \\ 0.532\,97 & 0.400\,18 & 6.684\,7 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{P}_Z^{20} \doteq \begin{pmatrix} 0.533 & 0.400 & 6.67 \cdot 10^{-2} \\ 0.533 & 0.400 & 6.67 \cdot 10^{-2} \\ 0.533 & 0.400 & 6.67 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Uvažujme **nerozložitelný** Markovův řetězec, který **není ergodický**.

Nutná podmínka: Matice přechodu musí mít nulovou diagonálu.

Poznámka. *Stacionární rozdělení může existovat, ale nemusíme se k němu přiblížit.*
Např. pro

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je rozdělení $(1/3, 1/3, 1/3)$ *stacionární, ale z počátečního rozdělení* $(1, 0, 0)$ *se k němu nepřiblížíme.*

Všechny stavy mají stejnou periodu $T > 1$.

Lze je rozdělit na T disjunktních tříd $M_1, \ldots, M_T$ tak, že z každé třídy lze v jednom kroku přejít pouze do následující (a z M_T do M_1).

Do každé třídy se vrátíme po T krocích.
Sloučením T kroků do jednoho dostaneme Markovův řetězec s maticí přechodu $\boldsymbol{P}^T$.
Ten je rozložitelný, třídy $M_1, \ldots, M_T$ odpovídají komponentám, které mají všechny stavy ergodické, takže mají jediné stacionární rozdělení pravděpodobností.

$\Rightarrow$ Až na to, že se periodicky prochází mezi třídami $M_1, \ldots, M_T$, můžeme asymptotické chování uvnitř nich určit stejně jako v předchozím případě.

Cvičení. *[Wasserman 2004] Najděte stacionární rozdělení Markovova řetězce s maticí přechodu*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.05 & 0.7 & 0.25 \\ 0.05 & 0.5 & 0.45 \end{pmatrix}.$$

Cvičení (rosnička)**.** *(upraveno dle [Wasserman 2004]) Rosnička skáče po k schůdcích. Každým skokem se s pravděpodobností $c \in (0,1)$ dostane o schůdek výš, s pravděpodobností $1-c$ spadne zpět do vody a začíná od začátku. Z nejvyššího schůdku vždy spadne do vody (=„nejnižší schůdek“). Kde ji máme hledat, tj. jaká je pravděpodobnost jejího výskytu na jednotlivých schůdcích po dlouhém průběhu? Řešte pokud možno obecně, pak pro hodnoty $k = 4$, $c = 1/2$.*

5.3 Rozložitelné Markovovy řetězce

bez přechodných stavů se řeší rozkladem na nerozložitelné (na komponenty). Mohou existovat stacionární rozdělení, ale nemusí být limitou.

Příklad. *Pro*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_2$$

jsou všechna rozdělení stacionární. Pro

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jsou stacionární všechna rozdělení $\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, \frac{1-c}{2}, \frac{1-c}{2}\right)$, $c \in \langle 0,1\rangle$;
z počátečního rozdělení $(1,0,0,0)$ se dostaneme ihned do stacionárního $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$;
z počátečního rozdělení $(0,0,0,1)$ se k žádnému stacionárnímu neblížíme.

5.4 Příklady

Příklad (chcete být milionářem? – zjednodušené zadání bez záchytných bodů**).** *Hráč zaplatí za vstup do hry. Odpovídá na otázky, pravděpodobnost, že zná správnou odpověď, je $c \in (0,1)$. Po správné odpovědi může skončit s výhrou $1, 2, 4, 8, \ldots$, obecně 2^{k-1}, kde k je počet správně zodpovězených otázek. Po chybné odpovědi končí a nedostává nic.*

- *Jak dlouho má hrát, aby maximalizoval zisk? (Délka hry a výše výhry není omezena.)*

- *Jaké je při optimální strategii rozdělení, střední hodnota a rozptyl výhry po k kolech (resp. vyřazení v nejvýše k-tém kole)?*

- *Jaká je adekvátní cena za vstup do hry?*

Hráč zaplatil za vstup do hry, určitě má hrát první kolo. Před k-tým kolem (pokud do něj postoupí) se rozhoduje mezi jistou výhrou 2^{k-1} a další otázkou, která může vést k výhře buď 0, nebo 2^k (s pravděpodobností c). Optimální *rozhodnutí tedy bude vždy stejné (závislé na c, nikoli na k). Pro $c < 1/2$ končí po 1. kole. Pro $c > 1/2$ je optimální hrát co nejdéle. Pak matice přechodu je*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-c & c \end{pmatrix},$$

první stav (vyřazení) je absorpční, druhý (pokračování ve hře) je přechodný, takže ***pravděpodobnost výhry je nulová****!*
Výhra X_k po k kolech má alternativní rozdělení,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}X_k &= c^k\, 2^{k-1}, \\ \mathrm{D}X_k &= \mathrm{E}X_k^2 - (\mathrm{E}X_k)^2 = c^k\, 2^{2(k-1)} - c^{2k}\, 2^{2(k-1)} = (1-c^k)\, c^k\, 2^{2(k-1)}. \end{aligned}$$

Pro $c > 1/2$ je

$$\lim_{k\to\infty} c^k\, 2^{k-1} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} (2\,c)^k = \infty,$$

tedy ***adekvátní cena za vstup do hry je nekonečná****!*

Cvičení. *Popište Markovův řetězec, popisující hru „chcete být milionářem?“ se záchytnými body a omezeným počtem kol.*

Příklad (ruinování v ruletě). *V ruletě sázka na barvu přináší výhru ve výši dvojnásobku vkladu s pravděpodobností d o málo menší než $1/2$ (dle typu rulety $\frac{24}{49}$, $\frac{18}{37}$ nebo $\frac{18}{38} = \frac{9}{19}$). Hráč vsadí nejprve 1000 EUR. Po první výhře končí. Po každé prohře vsadí dvojnásobnou částku než v předchozím kole. Jaké je rozdělení a střední hodnota jeho výhry?*

Jde o obdobu hry „chcete být milionářem?“ s vyměněnými rolemi hráče a bankéře a $c = 1 - d$. Bankéři se hra „vyplácí“, přestože má nulovou pravděpodobnost výhry. Nereálný je předpoklad, že hru lze hrát libovolně dlouho.

Cvičení. *Jak bude vypadat „ruinování v ruletě“, jestliže hráč (případně i bankéř) má omezené finance?*

Příklad (petrohradský paradox). *Hráč zaplatí za účast ve hře, v níž hází mincí. Padne-li líc, vyhraje 1 EUR. Padne-li rub, hra pokračuje a výhra se zdvojnásobuje, tj. padne-li líc poprvé v k-tém hodu, výhra je 2^{k-1} EUR. Jaká je adekvátní cena za účast ve hře?*

Hra končí v k-tém kroku s pravděpodobností 2^{-k} a výhrou 2^{k-1} EUR, střední hodnotu výhry dostaneme součtem přes všechny možné délky hry,

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\, 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty.$$

Cvičení (prodlužovačky). *Prodlužovačky s pravděpodobností $c \in (0,1)$ mění pořadí vodičů (fáze $\leftrightarrow$ nulák). Jaká je pravděpodobnost, že sériové spojení k prodlužovaček mění pořadí vodičů?*

Cvičení (informační kanál). ** Binární informační kanál přenese 0 s pravděpodobností 0.1 jako 1, 1 s pravděpodobností 0.2 jako 0. Spojíme jich k do série. Jaké jsou pravděpodobnosti chyb? Jaký bude výstup pro $k \to \infty$?*

6 Reverzibilita

6.1 Odhady parametrů Markovových řetězců

Co lze zjistit dlouhodobým pozorováním?

A. Pokud můžeme pokus libovolně opakovat (včetně počátečního rozdělení pravděpodobností stavů), lze konzistentně odhadnout všechny parametry.
(„Dostatečně dlouhá doba sledování“ je Čebyševovou nerovností vázána na nejmenší nenulovou z odhadovaných pravděpodobností.)
B. Nadále uvažujeme obvyklý případ, kdy Markovův řetězec nastartoval jen jednou a my můžeme sledovat jen jednu posloupnost, kterou vygeneruje.

Nemůžeme odhadnout počáteční rozdělení pravděpodobností stavů a nedovíme se nic o komponentách, do kterých jsme se nedostali.

Můžeme studovat jen tu komponentu, v níž jsme skončili, a to jen její asymptotické vlastnosti.
To postačuje ke konzistentnímu odhadu matice přechodu **této komponenty**.

6.2 Obrácení časové osy (zpětný chod)

Co bychom pozorovali, kdybychom sledovali Markovův řetězec pozpátku a chtěli pozorování popsat rovněž Markovovým řetězcem?

1. Přechodné stavy by nám to mohly znemožnit, nadále je vyloučíme.

2. Má smysl studovat jen jednu komponentu, tedy nerozložitelný Markovův řetězec.

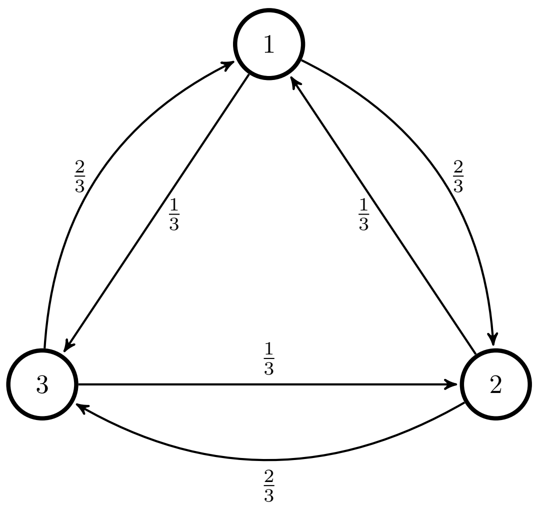
3. Má-li periodu $T > 1$, pak při zpětném chodu vidíme průchod třídami stavů $M_1, \ldots, M_T$ dle kapitoly 5.2 v opačném pořadí.
Chování uvnitř nich popisují ergodické řetězce, vzniklé přechodem ke krokům délky T a následnou dekompozicí na komponenty $M_1, \ldots, M_T$.

4. Pokud rozdělení pravděpodobností stavů není stacionární, pak při pohybu vpřed ke stacionárnímu konverguje, při zpětném chodu „diverguje". Z toho poznáme, že orientace času je chybná a popis zpětného chodu Markovovým řetězcem neexistuje. (Souvislost s principem růstu entropie.)
Zbývá popsat **ergodické** Markovovy řetězce se **stacionárním rozdělením pravděpodobností stavů**.

Podkladem pro odhad jejich parametrů jsou nám pouze (relativní) četnosti přechodů v posloupnosti stavů (libovolně dlouhé); ty konvergují k pravděpodobnostem přechodů.
(„Konvergují" ve stejném smyslu, o jakém hovoří Čebyševova nerovnost. Díky nezávislosti lze uplatnit i centrální limitní větu.)

$\boldsymbol{P}^{-1}$ **není** matice přechodu zpětného chodu:
absolutní hodnota vlastních čísel matice $\boldsymbol{P}$ je ≤ 1;
absolutní hodnota vlastních čísel matice $\boldsymbol{P}^{-1}$ je ≥ 1.

Příklad.

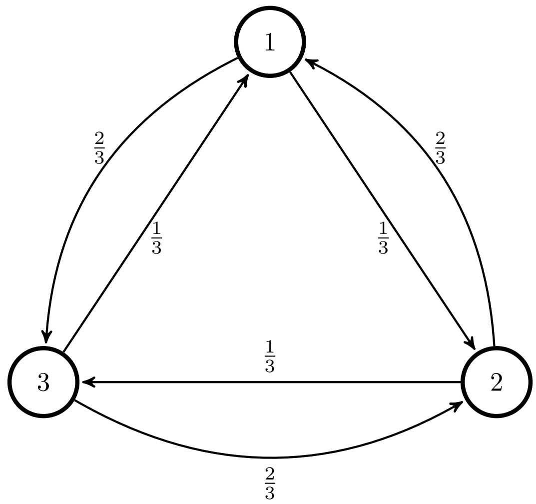


$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix},$$

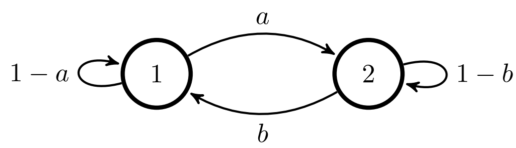
stacionární rozdělení $\boldsymbol{p} = (1/3, 1/3, 1/3)$.
„Převládá pohyb po směru hodinových ručiček."
*Při zpětném chodu „převládá pohyb **proti** směru hodinových ručiček."*

Odpovídá mu „obrácení šipek“ a transponovaná matice

$$\boldsymbol{P}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix},$$



Příklad.



$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in (0,1)$, *stacionární rozdělení* $\mathbf{p} = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$.
Zpětný chod ***nepopisuje*** *matice* $\boldsymbol{P}^\top$ *(není stochastická!), ani*

$$\begin{pmatrix} 1-b & b \\ a & 1-a \end{pmatrix},$$

(má jiné stacionární rozdělení pravděpodobností stavů), nýbrž opět $\boldsymbol{P}$ *(změnu orientace času nepoznáme).*

Takovým řetězcům budeme říkat **reverzibilní**.

Definice. ***Ergodický*** *Markovův řetězec s maticí přechodu* $\boldsymbol{P}$ *a stacionárním rozdělením stavů* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ *je* ***reverzibilní****, jestliže*

$$p_i\, p_{ij} = p_j\, p_{ji}$$

pro všechna i, j.

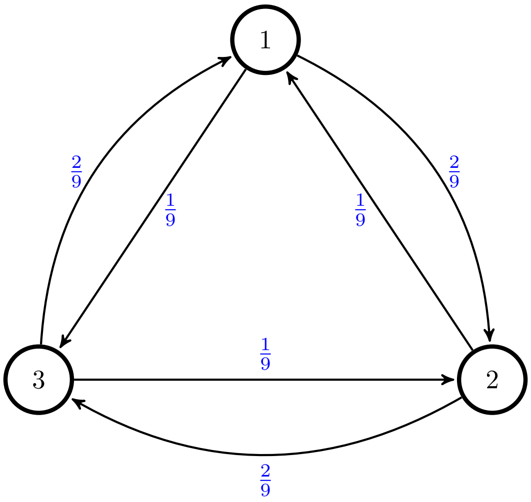
Ekvivalentní formulace:

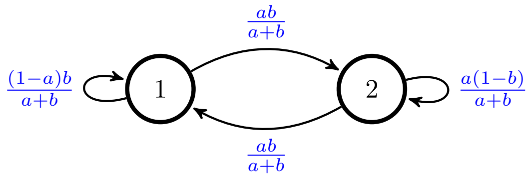
$$P(X_t = i) \cdot P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_t = j) \cdot P(X_{t+1} = i | X_t = j)$$
$$s_{ij} := P(X_{t+1} = j,\, X_t = i) = P(X_{t+1} = i,\, X_t = j) =: s_{ji}$$
$$s_{ij} = s_{ji}$$

Převod na původní popis:

$$p_i = P(X_t = i) = \sum_k s_{ik} = \sum_m s_{mi}\,,$$
$$p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i) = \frac{s_{ij}}{p_i} = \frac{s_{ij}}{\sum\limits_k s_{ik}} = \frac{s_{ij}}{\sum\limits_m s_{mi}}\,.$$

Pro libovolný ergodický Markovův řetězec máme matici s prvky $s_{ij} = P(X_{t+1} = j, X_t = i)$. Můžeme jimi ohodnotit hrany přechodového grafu; pak reverzibilitu snadno poznáme z grafu i ze symetrie matice $\boldsymbol{S}$.





Proč jsme $\boldsymbol{S}$ nepoužívali od začátku?
Protože popisuje řetězec se **stacionárním** rozdělením pravděpodobností stavů.
$\boldsymbol{P}$ je matice **podmíněných** pravděpodobností, nezávislých na pravděpodobnostech stavů.
Obráceně:

Věta. *V **nerozložitelném** Markovově řetězci reverzibilita*

$$p_i \, p_{ij} = p_j \, p_{ji}$$

neboli

$$s_{ij} = s_{ji}$$

implikuje, že je ergodický a $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ je stacionární rozdělení pravděpodobností stavů.

Důkaz. Pravděpodobnost, že při rozdělení pravděpodobností $\boldsymbol{p}$ bude v dalším kroku stav j, je

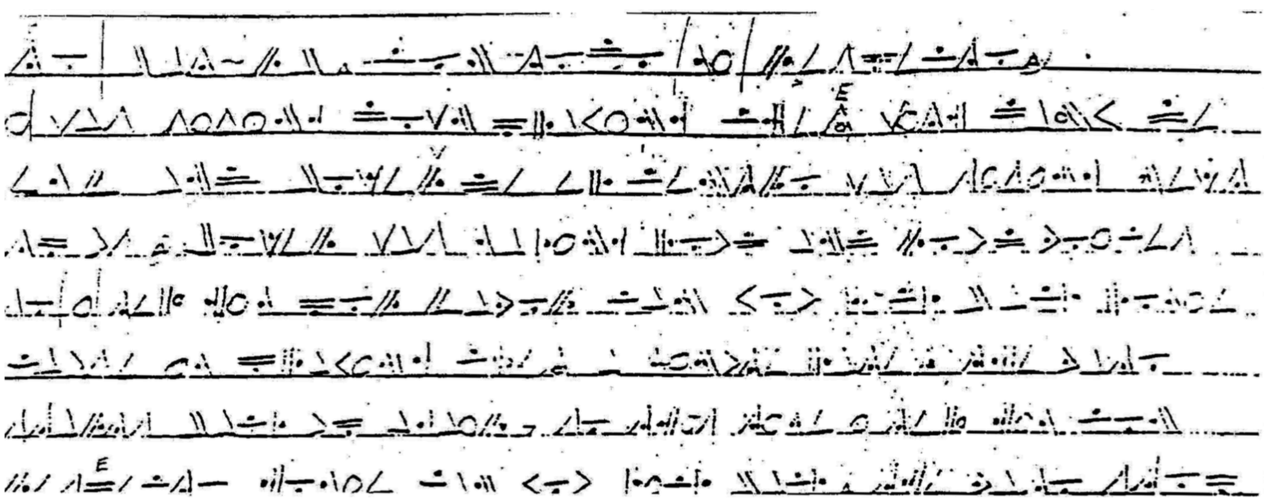
$$\sum_i p_i \, p_{ij} = \sum_i p_j \, p_{ji} = p_j \underbrace{\sum_i p_{ji}}_{1} = p_j \,.$$

□

Reverzibilita je silnější podmínka.

6.3 Jak lze luštit šifry 1: model

Příklad. *Fragment motáku z americké věznice [Diaconis 2009]:*



Předpokládáme, že každý z n znaků odpovídá právě jednomu znaku abecedy. Hledáme správnou permutaci abecedy, těch je $n!$ (moc).

Hledáme vhodně zjednodušený model.

A. Každý znak je nezávisle vylosován s nějakou pravděpodobností.
n pravděpodobností odhadneme relativními četnostmi v jazyce.
Maximalizujeme věrohodnost: Znaky obou abeced seřadíme podle relativní četnosti a ztotožníme ty, které mají stejné pořadí.

Snadné, ale neúspěšné; málo informace.
B. Každý znak je vylosován s nějakou pravděpodobností závislou na předchozím znaku.
$\Longrightarrow$ Markovův řetězec s n stavy (poslední znak).
n^2 prvků matice přechodu odhadneme podmíněnými relativními četnostmi dvojic znaků v jazyce.
Maximalizujeme věrohodnost.
Jak?
Ukážeme, ale napřed uvážíme složitější modely.
C. Každý znak je vylosován s nějakou pravděpodobností závislou na ℓ předchozích znacích.
$\Longrightarrow$ Markovův řetězec s n^ℓ stavy (posledních ℓ znaků).
matice přechodu má $n^{2\ell}$ prvků, z nichž nenulových může být nejvýše $n^{\ell+1}$, odhad je příliš obtížný.
Nemáme dost dlouhý text.
D. Každé **slovo** je vylosováno s nějakou pravděpodobností závislou na slově.
$\Longrightarrow$ Markovův řetězec s tolika stavy, kolik slov v jazyce uvažujeme (např. 10 000).
n^2 prvků matice přechodu odhadneme jen s obtížemi, i když se to dělá.
Nemáme dost dlouhý text, aby rozdělení na něm bylo podobné...

6.4 Jak lze luštit šifry 2: rozluštění

Model B: Pravděpodobnost znaku závisí na předchozím znaku.
Hledáme správnou permutaci znaků abecedy.
Spoléháme na to, že víme, co jsou mezery mezi slovy.
Pro každou permutaci znaků π dovedeme určit věrohodnost $L(\pi)$ dané zprávy.
Jak najdeme maximum věrohodnosti?
Sestrojíme nový **nerozložitelný reverzibilní** Markovův řetězec s $n!$ stavy – permutacemi abecedy.
Zvolíme matici přechodu $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n! \times n!}$ tak, aby stacionární rozdělení pravděpodobností stavů bylo úměrné věrohodnosti L,

$$p_\pi = \frac{L(\pi)}{\sum\limits_{\varrho} L(\varrho)} =: \frac{L(\pi)}{S}\,.$$

K čemu to bude?

Po delším běhu budeme dostávat převážně permutace s velkou věrohodností; správná permutace bude nejčastější.

Problém: $S := \sum\limits_{\varrho} L(\varrho)$ přes všech $n!$ permutací nespočítáme.

Řešení: Budeme používat jen poměry věrohodností, na této sumě nezávislé.

6.5 Metropolisův algoritmus

0. Zvolíme libovolnou počáteční permutaci znaků π.

1. V π vyměníme náhodně vybranou dvojici znaků (z $\binom{n}{2}$ možností s rovnoměrným rozdělením); dostaneme novou permutaci ϱ.

2. Porovnáme věrohodnosti:

$$a_{\pi\varrho} = \frac{L(\varrho)}{L(\pi)} = \frac{p_\varrho}{p_\pi}\,.$$

(Věrohodnosti lze snadno spočítat, na rozdíl od pravděpodobností p_π, p_ϱ.)

A. $a_{\pi\varrho} \geq 1$ (ϱ je věrohodnější) $\implies$ změnu ($\pi := \varrho$) provedeme.

B. $a_{\pi\varrho} < 1$ (π je věrohodnější) $\implies$ změnu ($\pi := \varrho$) provedeme s pravděpodobností $a_{\pi\varrho}$.

3. Dokud nejsme spokojeni s výsledkem, pokračujeme od kroku 1.
Řetězec je nerozložitelný – ke každé permutaci se můžeme dostat.

Kdybychom změnu vždy provedli, řetězec by nebyl ergodický, měl by periodu 2.
Navíc jsme splnili podmínku reverzibility (zobrazen detail přechodového grafu):
A. $L(\varrho) \geq L(\pi)$: $\quad p_\pi\, p_{\pi\varrho} = \frac{p_\pi}{\binom{n}{2}} = p_\varrho\, p_{\varrho\pi}$

$$\begin{tikzcd} \pi \arrow[r, bend left, "\frac{1}{\binom{n}{2}}"] & \varrho \arrow[l, bend left, "\frac{a_{\varrho\pi}}{\binom{n}{2}} = \frac{L(\pi)}{\binom{n}{2} L(\varrho)} = \frac{p_\pi}{\binom{n}{2} p_\varrho}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \pi \arrow[r, bend left, "\frac{p_\pi}{\binom{n}{2}} = \frac{L(\pi)}{S\binom{n}{2}}"] & \varrho \arrow[l, bend left, "\frac{p_\varrho\, a_{\varrho\pi}}{\binom{n}{2}} = \frac{p_\pi}{\binom{n}{2}} = \frac{L(\pi)}{S\binom{n}{2}}"] \end{tikzcd}$$

B. $L(\varrho) < L(\pi)$: $\quad p_\pi\, p_{\pi\varrho} = \frac{p_\varrho}{\binom{n}{2}} = p_\varrho\, p_{\varrho\pi}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \pi \arrow[r, bend left, "\frac{a_{\pi\varrho}}{\binom{n}{2}} = \frac{L(\varrho)}{\binom{n}{2} L(\pi)} = \frac{p_\varrho}{\binom{n}{2} p_\pi}"] & \varrho \arrow[l, bend left, "\frac{1}{\binom{n}{2}}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \pi \arrow[r, bend left, "\frac{p_\pi\, a_{\pi\varrho}}{\binom{n}{2}} = \frac{p_\varrho}{\binom{n}{2}} = \frac{L(\varrho)}{S\binom{n}{2}}"] & \varrho \arrow[l, bend left, "\frac{p_\varrho}{\binom{n}{2}} = \frac{L(\varrho)}{S\binom{n}{2}}"] \end{tikzcd}$$

Pravděpodobnosti stavů podle věty 6.2 konvergují k

$$p_\pi = \frac{L(\pi)}{S} = \frac{L(\pi)}{\sum\limits_{\varrho} L(\varrho)}\,,$$

takže jsou úměrné věrohodnosti.
Příklad rozšifrování Shakespearova textu (vlevo počet kroků algoritmu):

```
 100 ER ENOHDLAE OHDLO UOZEOUNORU O UOZEO HD OITO HEOQSET IUROFHE HENO ITORUZAEN
 200 ES ELOHRNDE OHRNO UOVEOULOSU O UOVEO HR OITO HEOQAET IUSOPHE HELO ITOSUVDEL
 300 ES ELOHANDE OHANO UOVEOULOSU O UOVEO HA OITO HEOQRET IUSOFHE HELO ITOSUVDEL
 400 ES ELOHINME OHINO UOVEOULOSU O UOVEO HI OATO HEOQRET AUSOWHE HELO ATOSUVMEL
 500 ES ELOHINME OHINO UODEOULOSU O UODEO HI OATO HEOQRET AUSOWHE HELO ATOSUDMEL
 600 ES ELOHINME OHINO UODEOULOSU O UODEO HI OATO HEOQRET AUSOWHE HELO ATOSUDMEL
 900 ES ELOHANME OHANO UODEOULOSU O UODEO HA OITO HEOQRET IUSOWHE HELO ITOSUDMEL
1000 IS ILOHANMI OHANO RODIORLOSR O RODIO HA OETO HIOQUIT ERSOWHI HILO ETOSRDMIL
1100 ISTILOHANMITOHANOT ODIO LOS TOT ODIOTHATOEROTHIOQUIRTE SOWHITHILOTEROS DMIL
1200 ISTILOHANMITOHANOT ODIO LOS TOT ODIOTHATOEROTHIOQUIRTE SOWHITHILOTEROS DMIL
1300 ISTILOHARMITOHAROT ODIO LOS TOT ODIOTHATOENOTHIOQUINTE SOWHITHILOTENOS DMIL
1400 ISTILOHAMRITOHAMOT OFIO LOS TOT OFIOTHATOENOTHIOQUINTE SOWHITHILOTENOS FRIL
1600 ESTEL HAMRET HAM TO CE OL SOT TO CE THAT IN THE QUENTIOS WHETHEL TIN SOCREL
1700 ESTEL HAMRET HAM TO BE OL SOT TO BE THAT IN THE QUENTIOS WHETHEL TIN SOBREL
1800 ESTER HAMLET HAM TO BE OR SOT TO BE THAT IN THE QUENTIOS WHETHER TIN SOBLER
1900 ENTER HAMLET HAM TO BE OR NOT TO BE THAT IS THE QUESTION WHETHER TIS NOBLER
2000 ENTER HAMLET HAM TO BE OR NOT TO BE THAT IS THE QUESTION WHETHER TIS NOBLER
```

Fragment rozšifrovaného motáku:

to bat-rb. con todo mi respeto. i was sitting down playing chess with danny de emf and boxer de el centro was sitting next to us. boxer was making loud and loud voices so i tell him por favor can you kick back homie cause im playing chess a minute later the vato starts back up again so this time i tell him con respecto homie can you kick back. the vato stop for a minute and he starts up again so i tell him check this out shut the f**k up cause im tired of your voice and if you got a problem with it we can go to celda and handle it. i really felt disrespected thats why i told him. anyways after i tell him that the next thing I know that vato slashes me and leaves. dy the time i figure im hit i try to get away but the c.o. is walking in my direction and he gets me right dy a celda. so i go to the hole. when im in the hole my home boys hit doxer so now "b" is also in the hole. while im in the hole im getting schoold wrong and

Úspěch, přestože to ani nebyla tak docela angličtina.

7 Markovovy řetězce s nekonečně mnoha stavy

Místo násobení matic bychom potřebovali nekonečné sumy.

Klasifikace stavů je složitější o další možnosti (**nulový** stav), nemusí existovat trvalý stav...

Lze setrvat v přechodných stavech (nekonečně mnoha).

Příklad (nekonečná náhodná procházka)**.** *[Wasserman 2004, Zvára, Štěpán 2002]*

- *Pokud oba směry volíme se stejnou pravděpodobností, do výchozího bodu se vrátíme s pravděpodobností* 1*. S pravděpodobností* 1 *navštívíme výchozí bod (stejně jako všechny ostatní!)* ***nekonečněkrát****, přesto* ***střední doba mezi návraty je nekonečná****.*

- *Pokud oba směry volíme se různou pravděpodobností, do výchozího bodu se vrátíme s pravděpodobností* < 1*. Pak jsou* ***všechny stavy přechodné****.*

Příklad (nekonečná náhodná procházka ve více dimenzích)**.** *[Enc. Math.] Při nekonečné náhodné procházce se vždy vydáme do některého ze sousedních bodů, a to se stejnou pravděpodobností.*

- *V* 1 *dimenzi se do výchozího bodu vrátíme s pravděpodobností* 1*.*

- *Ve* 2 *dimenzích (volíme ze* 4*-okolí) se do výchozího bodu vrátíme s pravděpodobností* 1*.*

- *Ve* 3 *dimenzích (volíme ze* 6*-okolí) se do výchozího bodu vrátíme s pravděpodobností přibližně* $0.35 < 1$*.*

8 Příklady aplikací

- Hromadná obsluha a fronty

- Klasifikace, rozpoznávání *(od třídění chmelu po rozpoznávání obličejů)*

- Pohyb nosičů náboje v polovodičích, rekombinace

- Chemické a jaderné reakce (řetězová reakce)
- Vývoj populací
- ...

Příklad. *Ve stabilní populaci budou mít nakonec všichni stejná příjmení.*

Příklad. *S jakou pravděpodobností vymřeme.*

9 Co zde nebylo

9.1 Kdy se vrátíme do stejného stavu?

Doporučená literatura: [Hsu 1996].

9.2 Nehomogenní Markovovy řetězce

Asymptotické chování je složitější.

9.3 Markovovy procesy

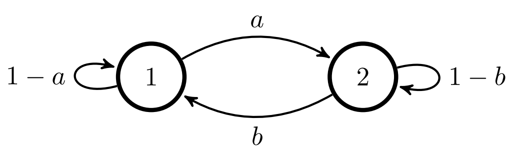
Doporučená literatura: [Apl. mat. 1978, Hsu 1996, Papoulis, Pillai 2002].
Díky spojitému času dovolují modelovat např. Brownův pohyb, difuzi...

10 Dodatek: Mocniny stochastických matic řádu 2

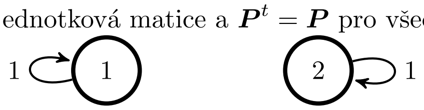
Obecná stochastická matice řádu 2 je tvaru

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \langle 0, 1 \rangle$.



A. Pokud $a = b = 0$, je $\boldsymbol{P}$ jednotková matice a $\boldsymbol{P}^t = \boldsymbol{P}$ pro všechna $t \in \mathbb{N}$.



Oba stavy jsou absorpční.
B. Nadále předpokládáme $a + b > 0$. Pak

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1},$$

kde

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

má na diagonále vlastní čísla matice $\boldsymbol{P}$, $\lambda = 1 - a - b \in \langle -1, 1)$,

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

má ve sloupcích odpovídající pravé vlastní vektory (na velikosti nezáleží),

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

má v řádcích odpovídající levé vlastní vektory.
Mocniny diagonální matice lze pro všechna $t \in \mathbb{N}$ počítat po složkách,

$$\boldsymbol{D}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix}$$

Protože

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^2 &= \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1}\,\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}^2\,\boldsymbol{T}^{-1}\,,\\
\boldsymbol{P}^t &= \underbrace{\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1}\ldots\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{T}^{-1}}_{t\times} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{D}^t\,\boldsymbol{T}^{-1}\,,
\end{aligned}$$

lze mocniny matice $\boldsymbol{P}$ vyjádřit ve tvaru

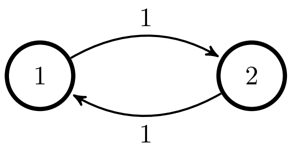
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^t &= \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^t \end{pmatrix} \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} 1 & -a\,\lambda^t \\ 1 & b\,\lambda^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b+a\,\lambda^t & a-a\,\lambda^t \\ b-b\,\lambda^t & a+b\,\lambda^t \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{a+b} \left(\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \lambda^t \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right),
\end{aligned}$$

kde $\lambda = 1 - a - b$.
Speciální případy:

- $a = b = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

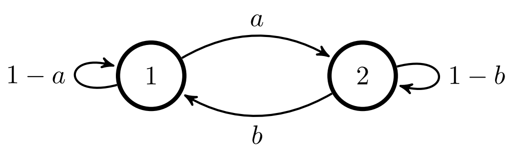
$$\boldsymbol{P}^t = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{pro } t \text{ liché,} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{pro } t \text{ sudé.} \end{cases}$$



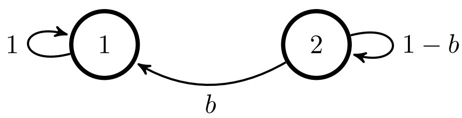
Oba stavy jsou trvalé s periodou 2.

- Pro $|\lambda| < 1$, tj. $a + b \notin \{0, 2\}$, je

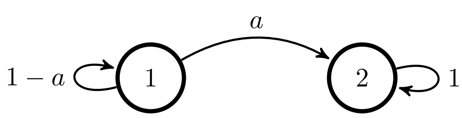
$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P}^t = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}.$$



$a > 0, b > 0$: oba stavy ergodické,



$a = 0, b > 0$: „1“ absorpční, „2“ přechodný,



$a > 0, b = 0$: „2“ absorpční, „1“ přechodný.

- $a+b=1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$,
$$\boldsymbol{P}^t = \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$
nezávisí na t. Klasifikace stavů jako v předchozím obecnějším případě.

Podobně lze počítat i mocniny matic vyšších řádů, pokud mají bázi z vlastních vektorů (k tomu stačí, jsou-li všechna vlastní čísla různá).
Používají se v kapitole 5.

Literatura

[Apl. mat. 1978] kol.: *Aplikovaná matematika.* Oborové encyklopedie SNTL, Praha, 1978.

[Diaconis 2009] Diaconis, P.: The Markov Chain Monte Carlo Revolution. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (2009), no. 2, 179–205.

[Enc. Math.] Hazewinkel, M.: *Encyclopaedia of Mathematics.* Kluwer Academic Publishers, 1995.

[Hsu 1996] Hsu, H.P.: *Probability, Random Variables, and Random Processes.* McGraw-Hill, 1996.

[MN: PMS] Navara, M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* ČVUT, Praha, 2007.

[Papoulis, Pillai 2002] Papoulis, A., Pillai, S.U.: *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.* McGraw-Hill, Boston, 2002.

[Wasserman 2004] Wasserman, L.: *All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference.* Springer Texts in Statistics, 2nd ed., 2004.

[Zvára, Štěpán 2002] Zvára, K., Štěpán, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* 2. vydání, Matfyzpress, MFF UK, Praha, 2002.