LINEÁRNÍ INTEGRÁLNÍ TRANSFORMACE

Václav Hlaváč, Jan Kybic

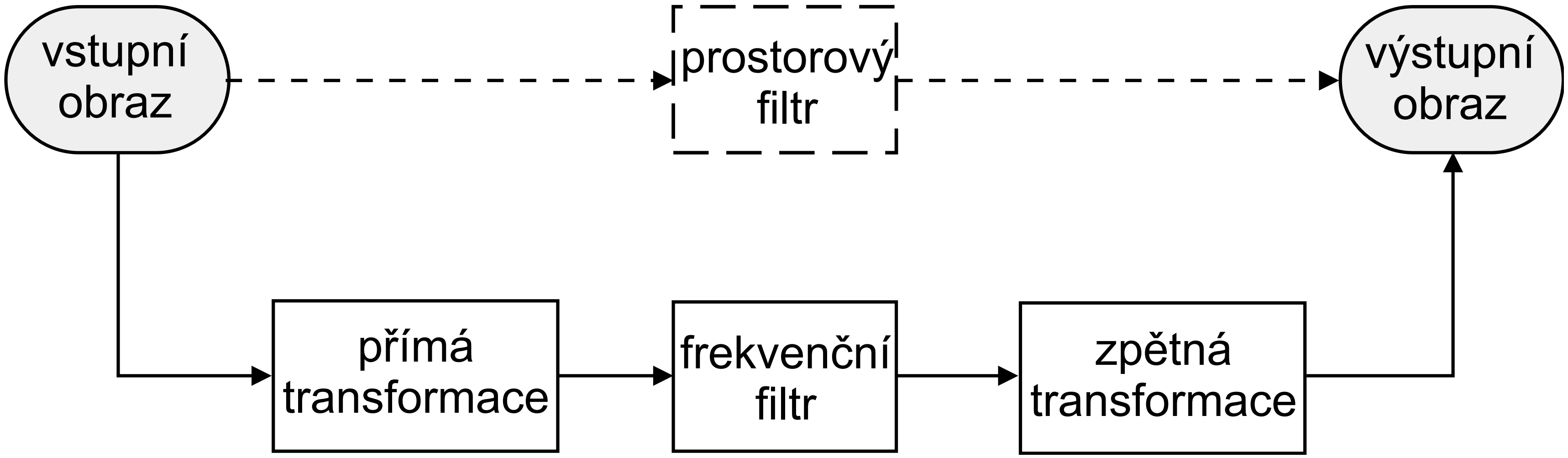
Czech Technical University, Faculty of Electrical Engineering
Center for Machine Perception, Prague, Czech Republic

hlavac@cmp.felk.cvut.cz

http://cmp.felk.cvut.cz/∼hlavac

VÝCHOZÍ PŘEDSTAVA

Zpracování obrazů $\equiv$ filtrace dvojrozměrných signálů.



Filtrace v prostorové oblasti. Pro 1D signály bychom řekli v časové oblasti. Lineární kombinace vstupního obrazu s koeficienty (často lokálního) filtru. Konvoluce.

Filtrace ve frekvenční oblasti. Převod do "frekvenční reprezentace", tam filtrace, převod zpět.

Pro první představu stačí *Fourierova transformace*, ale jsou i další.

Motivace: Efektivita, rozdělení zdrojů, interpretace.

2D FOURIEROVA TRANSFORMACE

Myšlenka. Obrazová funkce $f(x, y)$ se rozloží na lineární kombinaci harmonických (ortonormálních) funkcí.

Definice přímé transformace: u, v jsou prostorové frekvence.

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi j(xu+yv)}\, dx\, dy$$

Jiné konvence možné. Označení $\hat{f}$,$\mathcal{F}(f)$

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$; pro obrazy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

PODMÍNKY EXISTENCE FT

- *Slabá Dirichletova podmínka*: $F(u,v)$ existuje pokud $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\, f(x,y)\,|\, dx\, dy < \infty$, t.j. $f \in L_1$.
- Chceme-li aby IFT konvergovala k f (mimo nespojitosti), potřebujeme navíc *silné D. podmínky*:

  1. $f(x,y)$ může mít nejvýše konečný počet nespojitostí a konečně maxim a minim v každém konečném obdélníku.
  2. $f(x,y)$ nesmí mít nespojitosti s nekonečnou amplitudou.

Pro digitální obrazy Fourierova transformace vždy existuje, předpokládáme-li omezenost a konečný počet nespojitostí.

DFT existuje vždy.

INVERZNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\, e^{2\pi j(xu+yv)}\, dx\, dy$$

- $f(x,y)$ je lineární kombinací jednoduchých harmonických složek $e^{2\pi j(xu+uv)}$.
- Díky Eulerovu vztahu ($e^{jz} = \cos z + j \sin z$) jsou reálnými složkami $\sin$ a imaginárními $\cos$.
- Funkce $F(u,v)$ udává váhy harmonických složek v lineární kombinaci.

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$F(\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-2\pi j(x\xi+y\eta)}\, dx\, dy$$

Problém: Obrazy jsou diskrétní a prostorově omezené. . .

- Předpokládáme periodicitu → Fourierova řada, diskretizace frekvencí ($u = 0, 1, \ldots$)

$$F_s(u,v) = \frac{1}{N_x N_y} \int_0^{N_x} \int_0^{N_y} f(x,y)\, e^{-2\pi j(\frac{xu}{N_x}+\frac{yv}{N_y})}\, dx\, dy$$

- Integrace F. integrálu dle obdélníkového pravidla, ideální vzorkování ($h = 1$):

$$F_d(u,v) = \frac{1}{N_x N_y} \sum_{x=0}^{N_x-1} \sum_{y=0}^{N_y-1} f(x,y)\, e^{-2\pi j(\frac{xu}{N_x}+\frac{yv}{N_y})}$$

- Podobně IDFT:

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{N_x-1} \sum_{v=0}^{N_y-1} F_d(x,y)\, e^{2\pi j(\frac{xu}{N_x}+\frac{yv}{N_y})}$$

- Separabilita
- Fast Fourier Tranform (FFT). Volíme $N = 2^n$. V Matlabu `fft`,`fft2`, `ifft`, `ifft2`.

→**Rychlá implementace**

Různé konvence vzhledem k $N_x N_y$.

MATICOVÉ VYJÁDŘENÍ SEPARABILNÍ LIN. TRANSF.

Vstupem je obdélníkový obraz $\mathbf{f}$ o rozměru $M \times N$

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \dots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix}$$

Přímá transformace se vyjádří pomocí součinu matic

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}\,\mathbf{f}\,\mathbf{Q}\,,$$

kde $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ rozměru $M \times M$, resp. $N \times N$ jsou řádkové resp. sloupcové transformační matice.

Pro regulární matice $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ lze zapsat inverzní transformaci

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{F}\,\mathbf{Q}^{-1}\,.$$

SOUČIN MATIC ROZEPSÁN POMOCÍ SOUČTU PROSTOROVÉ FREKVENCE

Součiny: $\mathbf{F} = \mathbf{P}\,\mathbf{f}\,\mathbf{Q}\,, \quad \mathbf{f} = \mathbf{P}^{-1}\,\mathbf{F}\,\mathbf{Q}^{-1}\,,$

vyjádříme ve tvaru sum

$$F(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} P(u,m)\, f(m,n)\, Q(n,v)\,.$$

$$f(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} P^{-1}(u,m)\, f(m,n)\, Q^{-1}(n,v)\,.$$

$u = 0, 1, \ldots, M-1$; $v = 0, 1, \ldots, N-1$ jsou diskretizované prostorové frekvence

2D FOURIEROVA TRANSFORMACE V MATICOVÉM TVARU

Přímá Fourierova transformace $\mathbf{F} = \mathbf{\Phi}_{MM}\, \mathbf{f}\, \mathbf{\Phi}_{NN}$,

kde pro $k, l = 0, 1, \ldots, J-1$; $\quad \mathbf{\Phi}_{JJ}(k,l) = \dfrac{1}{J} \exp\left(-j\dfrac{2\pi}{J}kl\right)$.

Zpětná Fourierova transformace $\mathbf{f} = \mathbf{\Phi}_{MM}^{-1}\, \mathbf{F}\, \mathbf{\Phi}_{NN}^{-1}$,

kde $\Phi_{JJ}^{-1}(k,l) = \exp(\dfrac{2\pi j}{J}kl)$.

SPEKTRUM PROSTOROVÝCH FREKVENCÍ

Fourierův obraz $F(u, v)$ je komplexní.

(Komplexní) spektrum $F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$

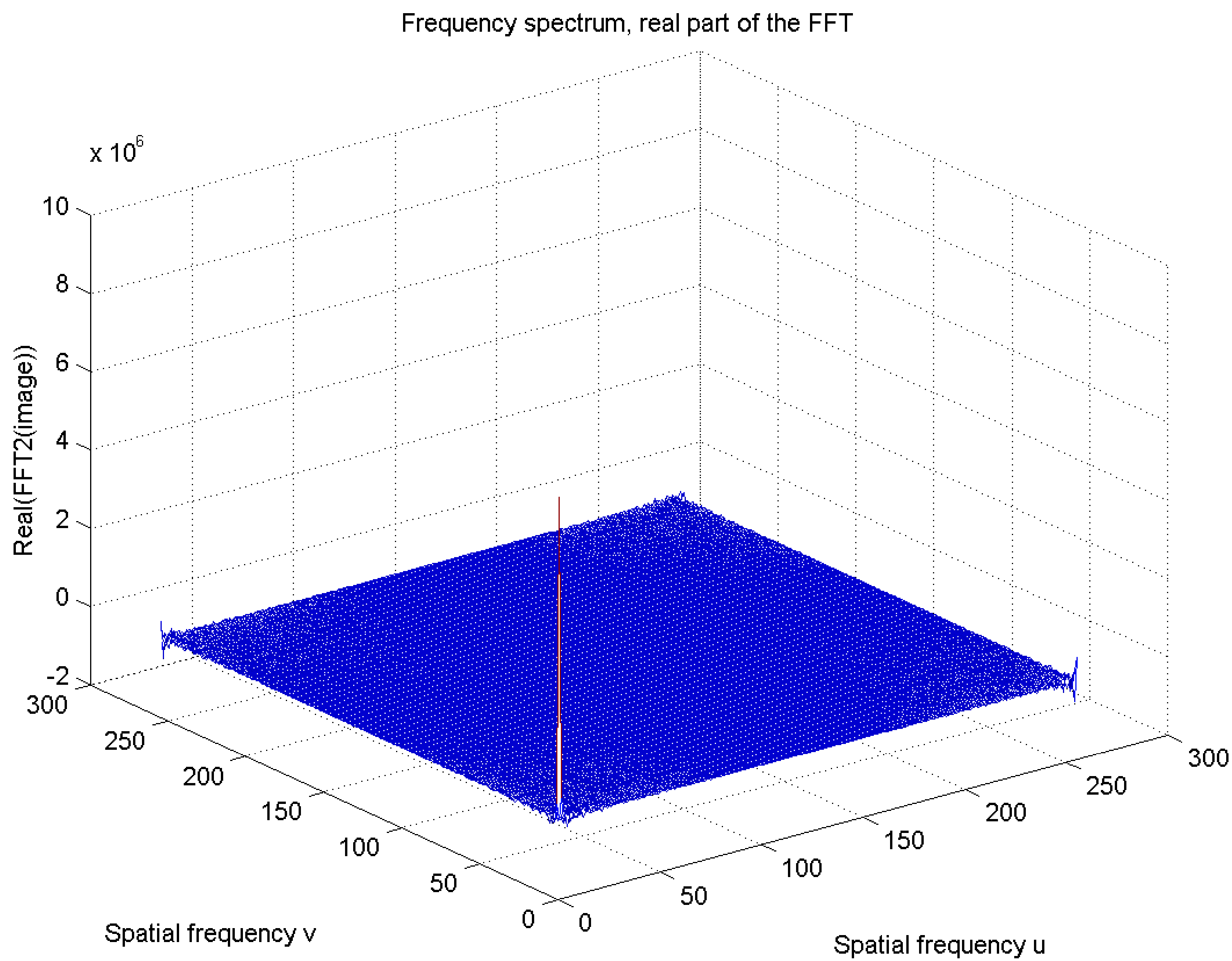
Amplitudové spektrum $|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)}$

Fázové spektrum $\phi(u, v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$

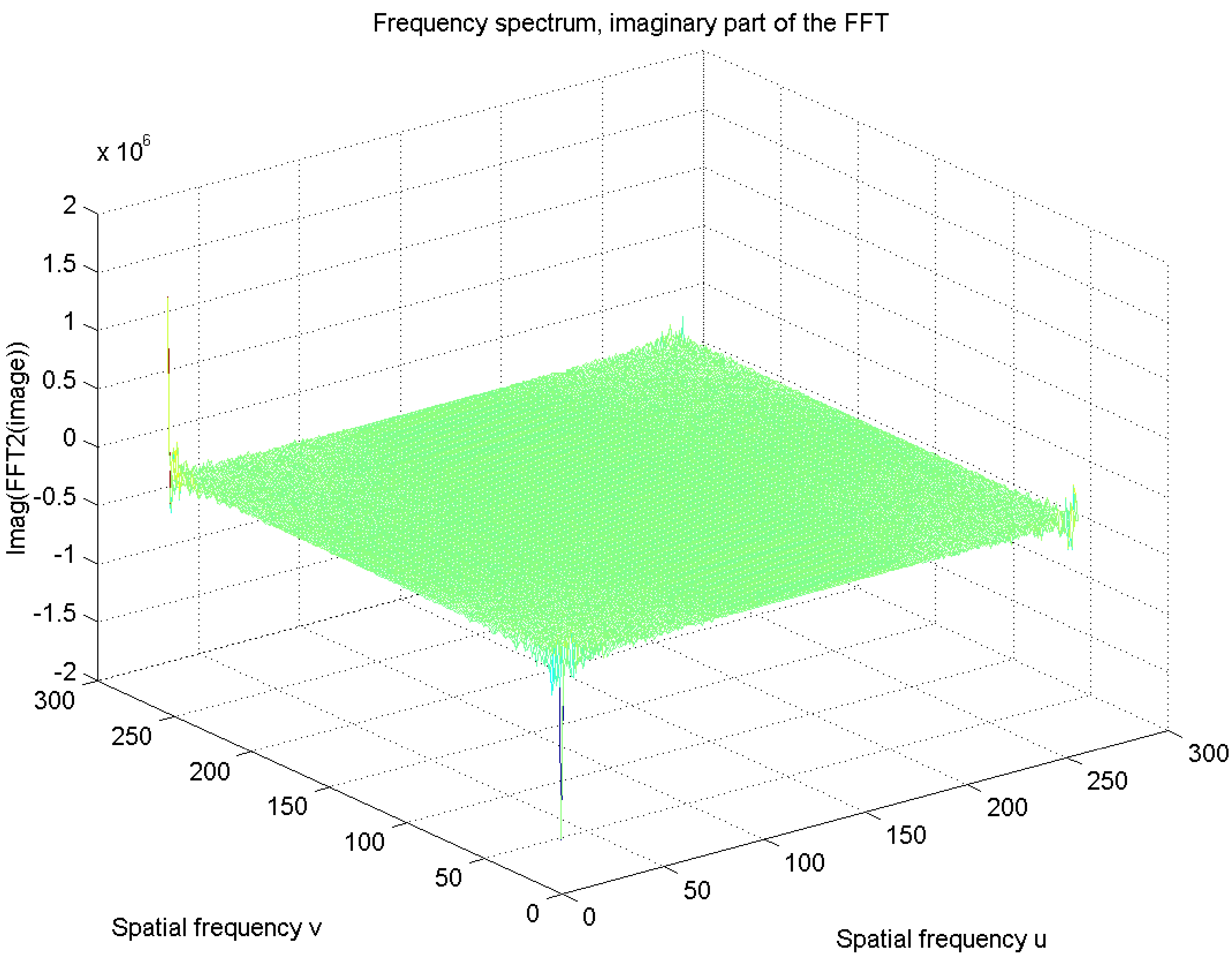
Výkonové spektrum $P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$

PŘÍKLAD HRADČANY, VÝCHOZÍ OBRAZ 265×256

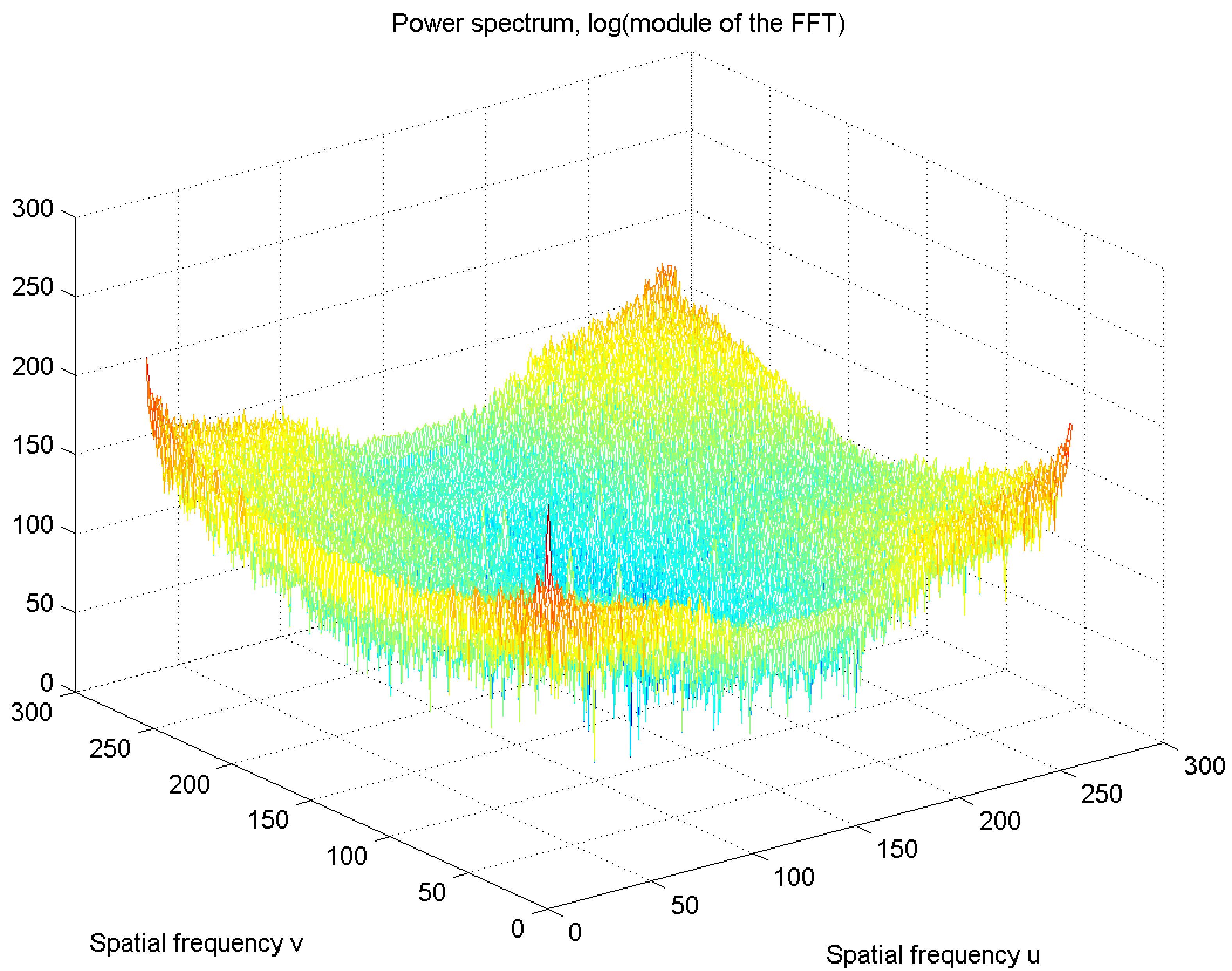
PŘÍKLAD HRADČANY, REÁLNÁ SLOŽKA SPEKTRA



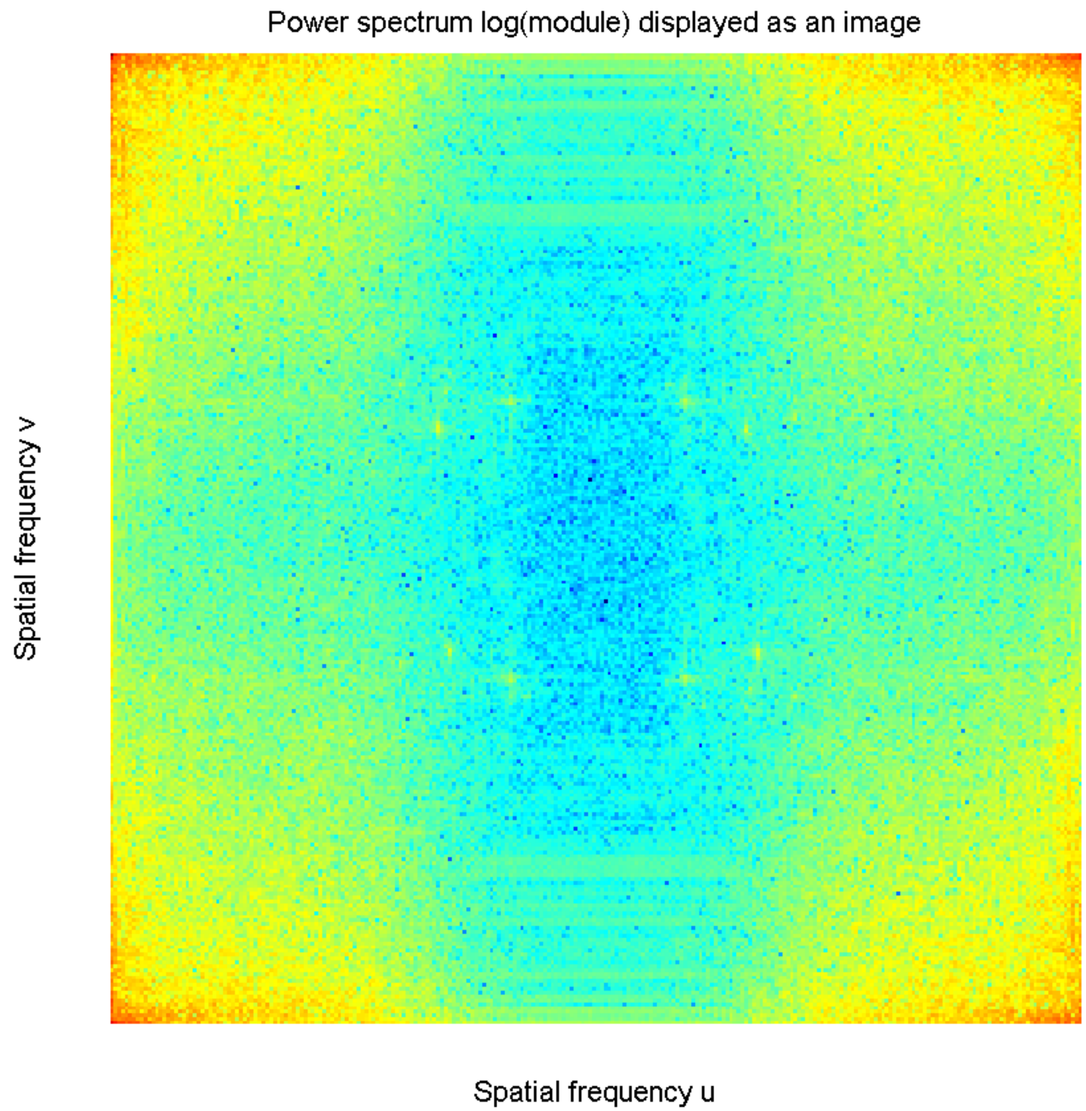
PŘÍKLAD HRADČANY, IMAGINÁRNÍ SLOŽKA SPEKTRA



PŘÍKLAD HRADČANY, LOGARITMUS VÝKONOVÉHO SPEKTRA

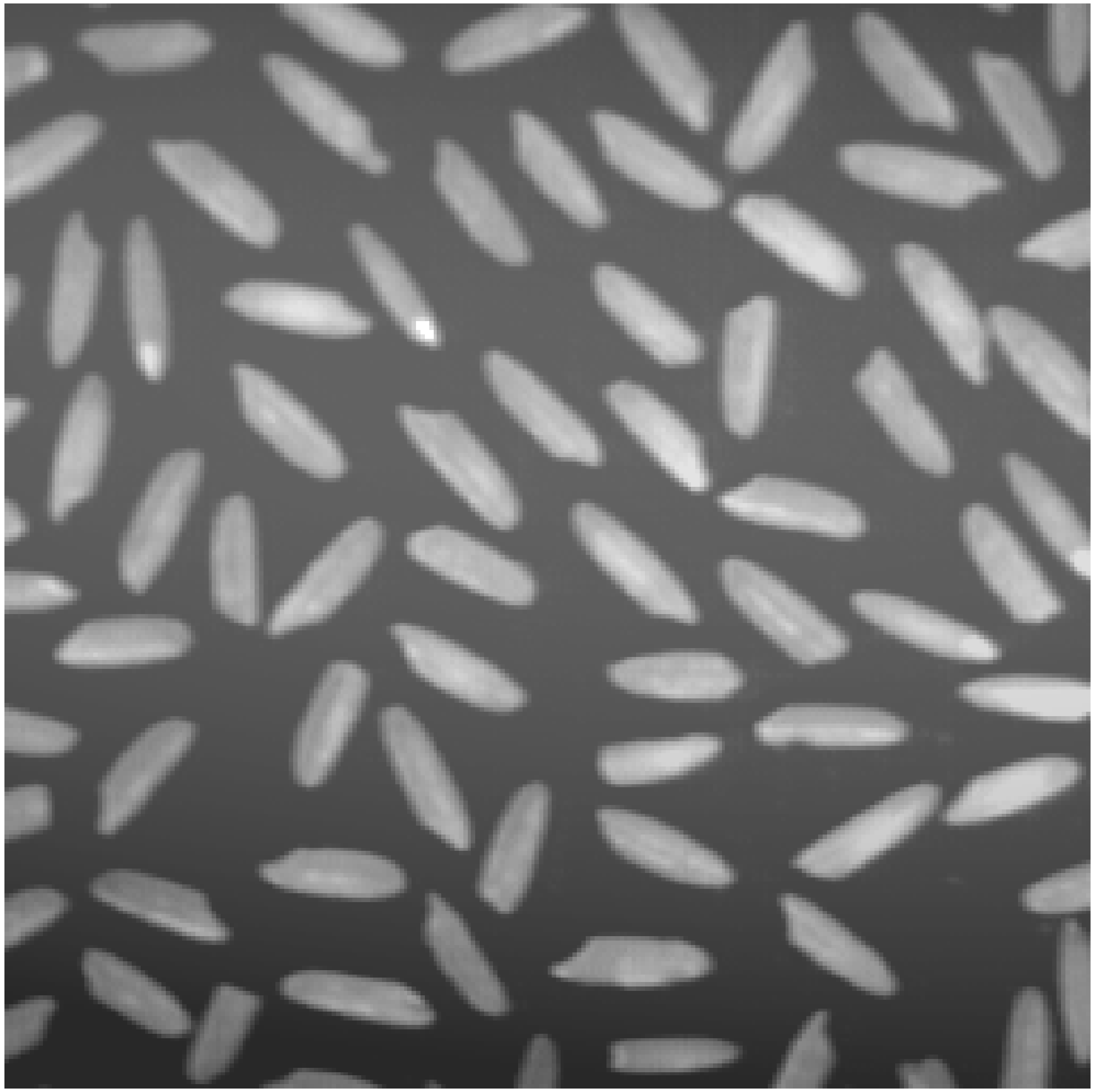


PŘÍKLAD HRADČANY, VÝKONOVÉ SPEKTRUM JAKO OBRÁZEK

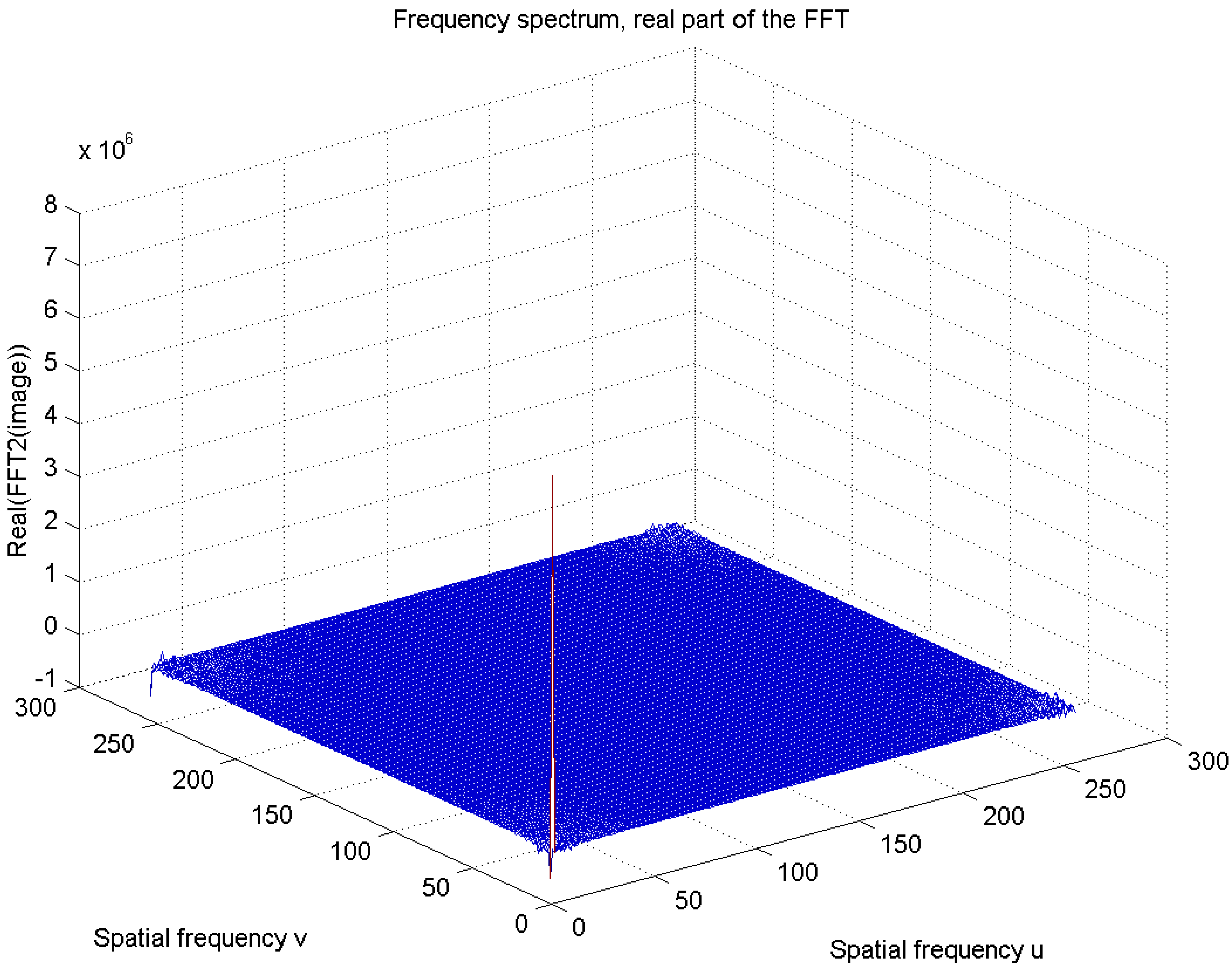


Spektrum je periodické. Někdy volíme $(u, v) = 0, 0$ uprostřed obrázku. (`fftshift` v Matlabu)

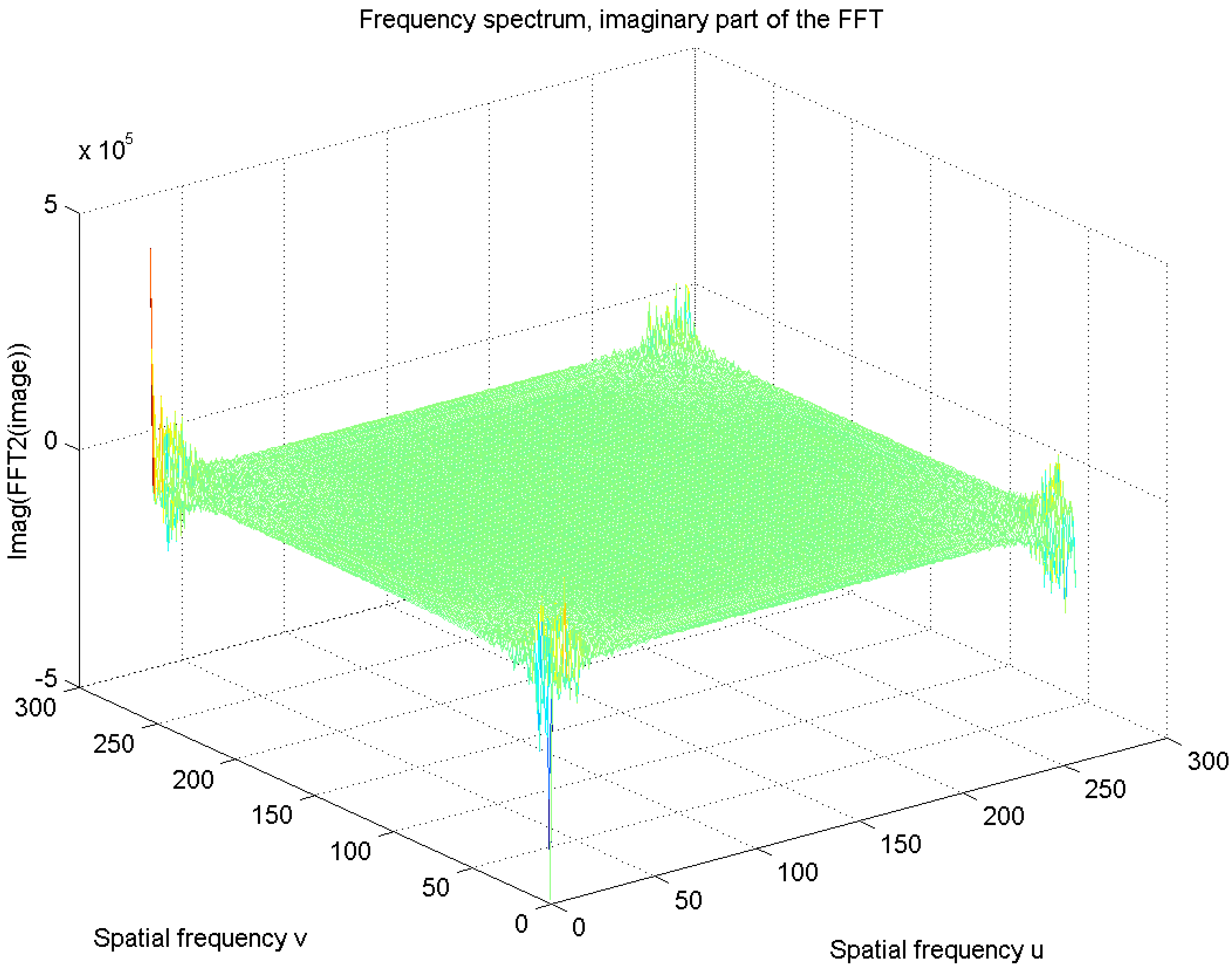
PŘÍKLAD RÝŽE, VÝCHOZÍ OBRAZ 265×256



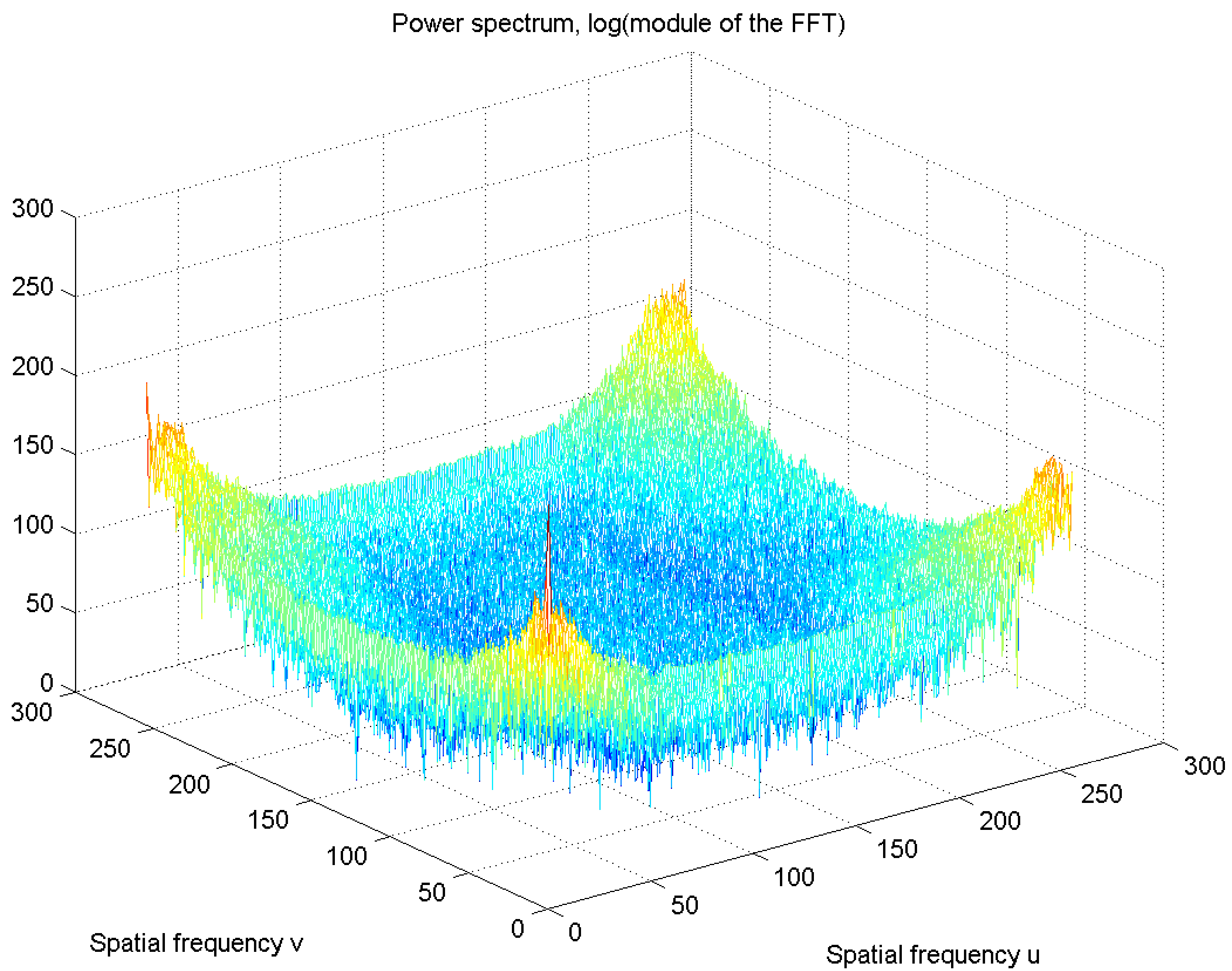
PŘÍKLAD RÝŽE, REÁLNÁ SLOŽKA SPEKTRA



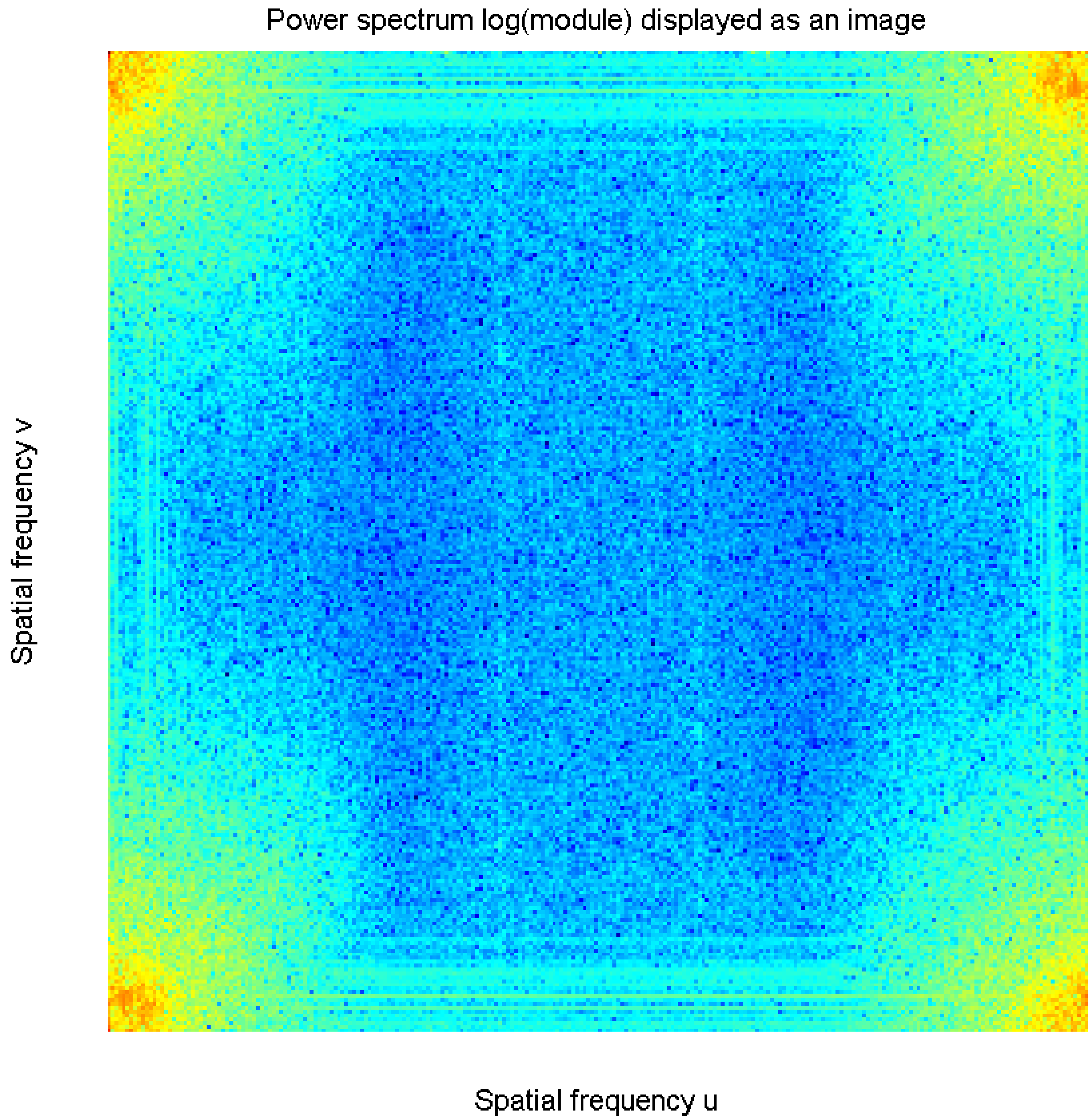
PŘÍKLAD RÝŽE, IMAGINÁRNÍ SLOŽKA SPEKTRA



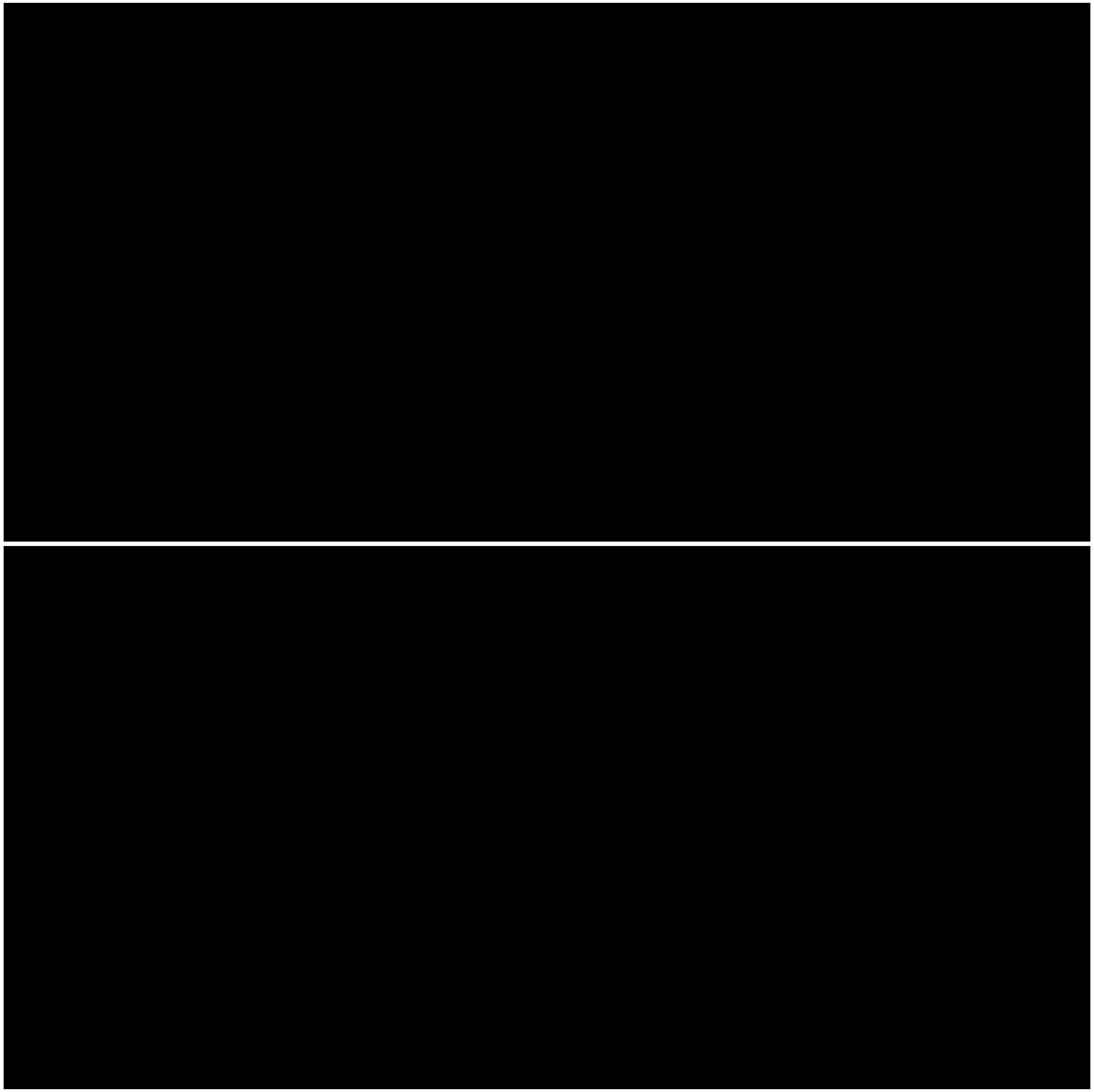
PŘÍKLAD RÝŽE, LOGARITMUS VÝKONOVÉHO SPEKTRA



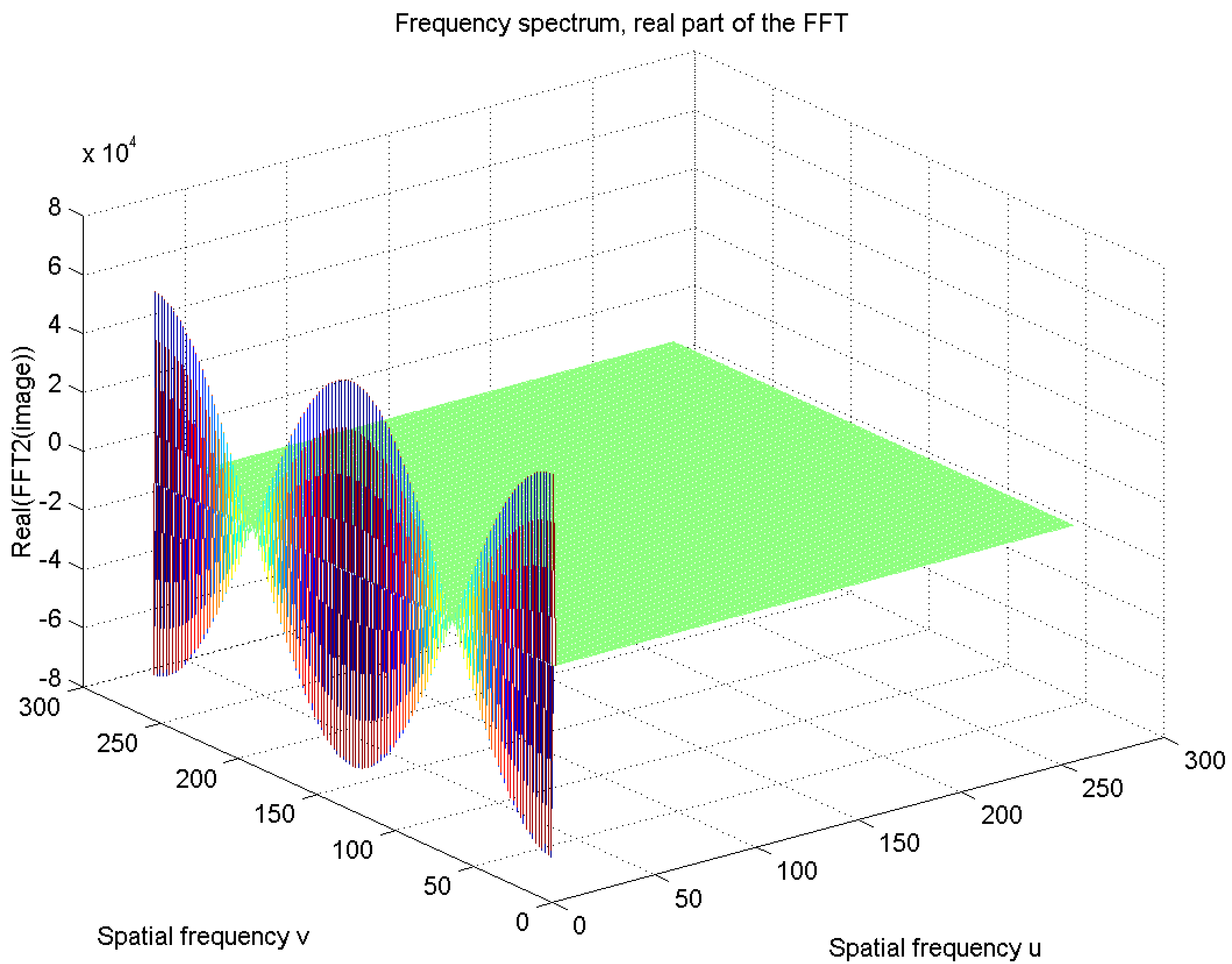
Příklad rýže, výkonové spektrum jako obrázek



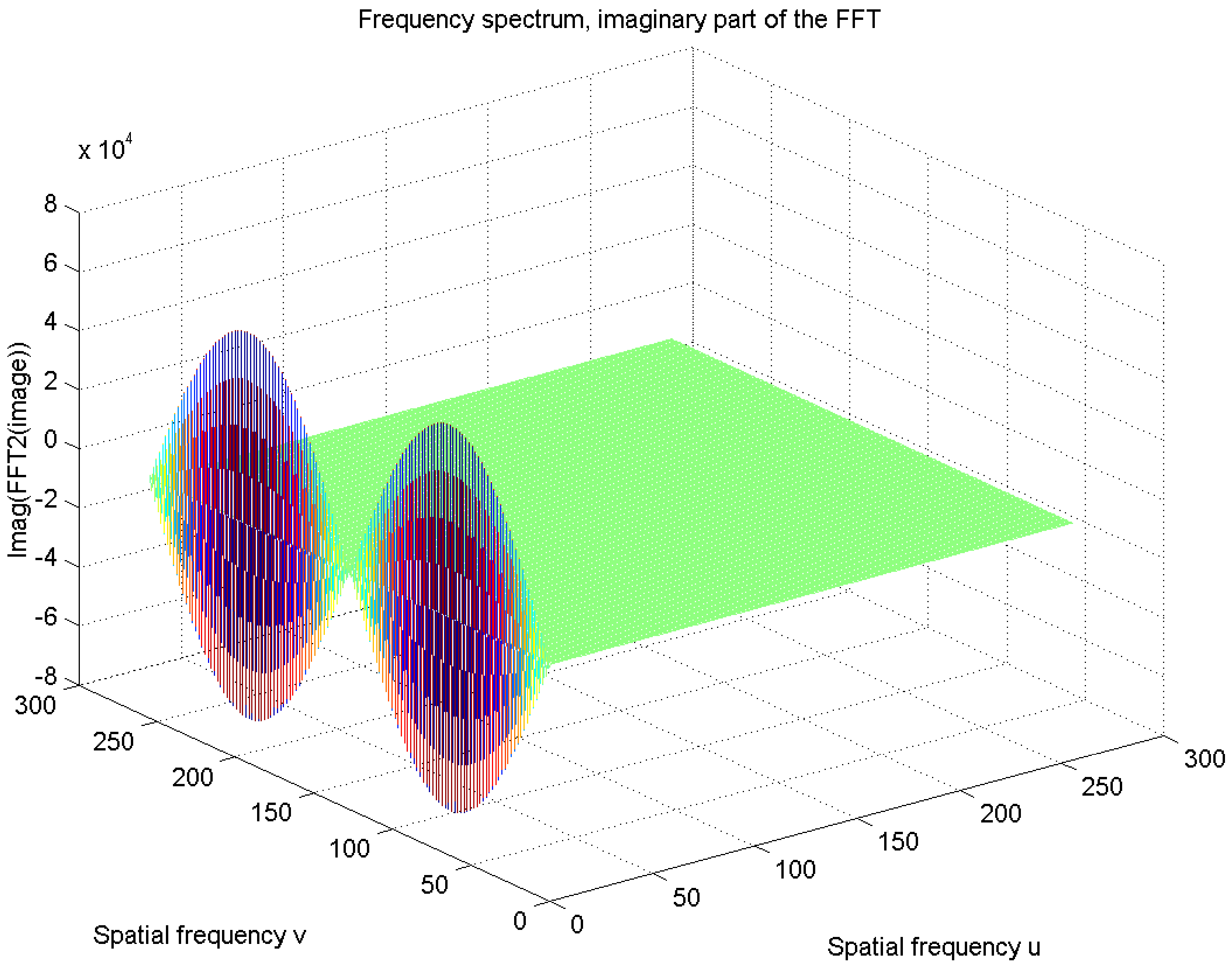
PŘÍKLAD VODOROVNÁ ČÁRA, VÝCHOZÍ OBRAZ
265×256



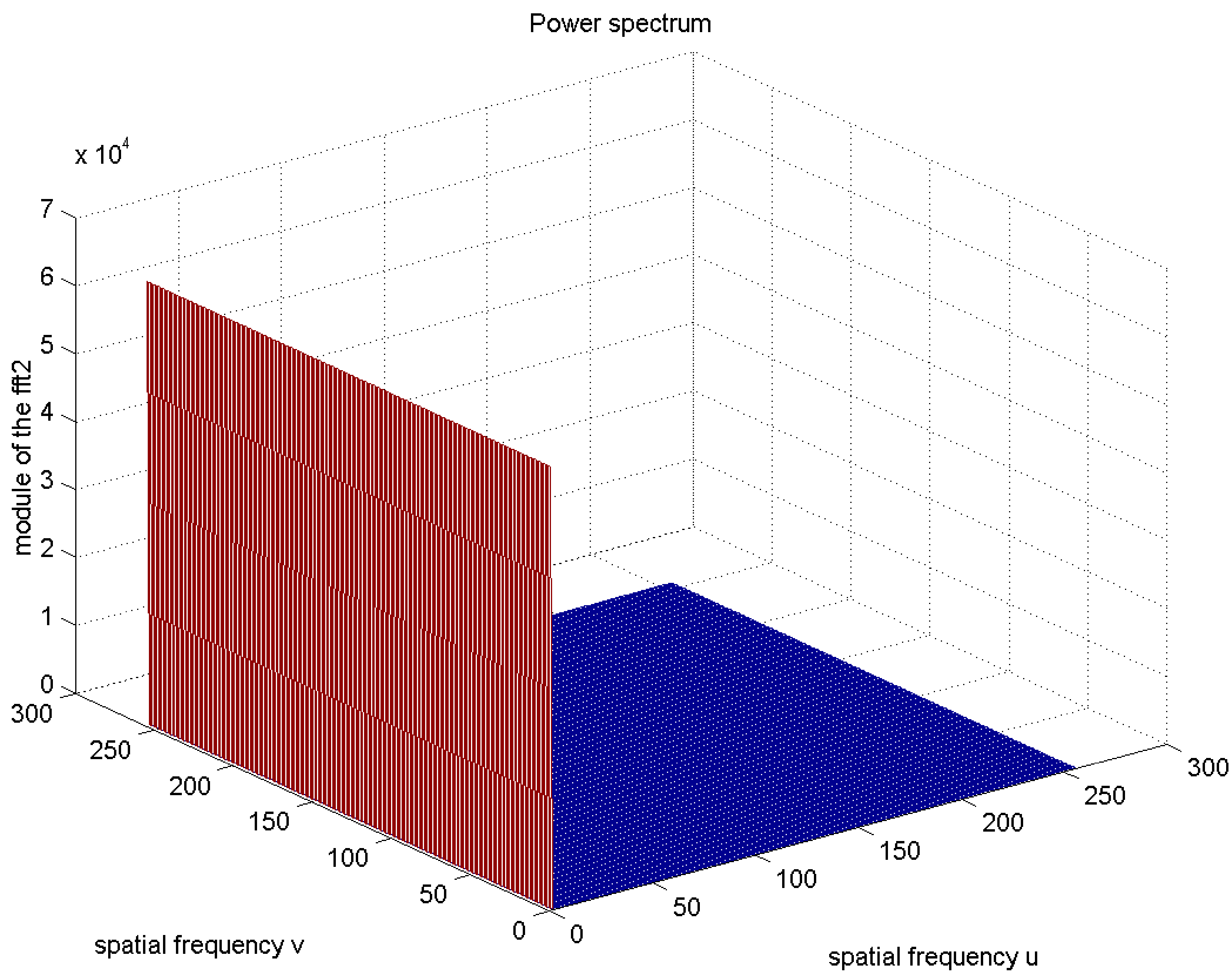
PŘÍKLAD VODOROVNÁ ČÁRA, REÁLNÁ SLOŽKA SPEKTRA



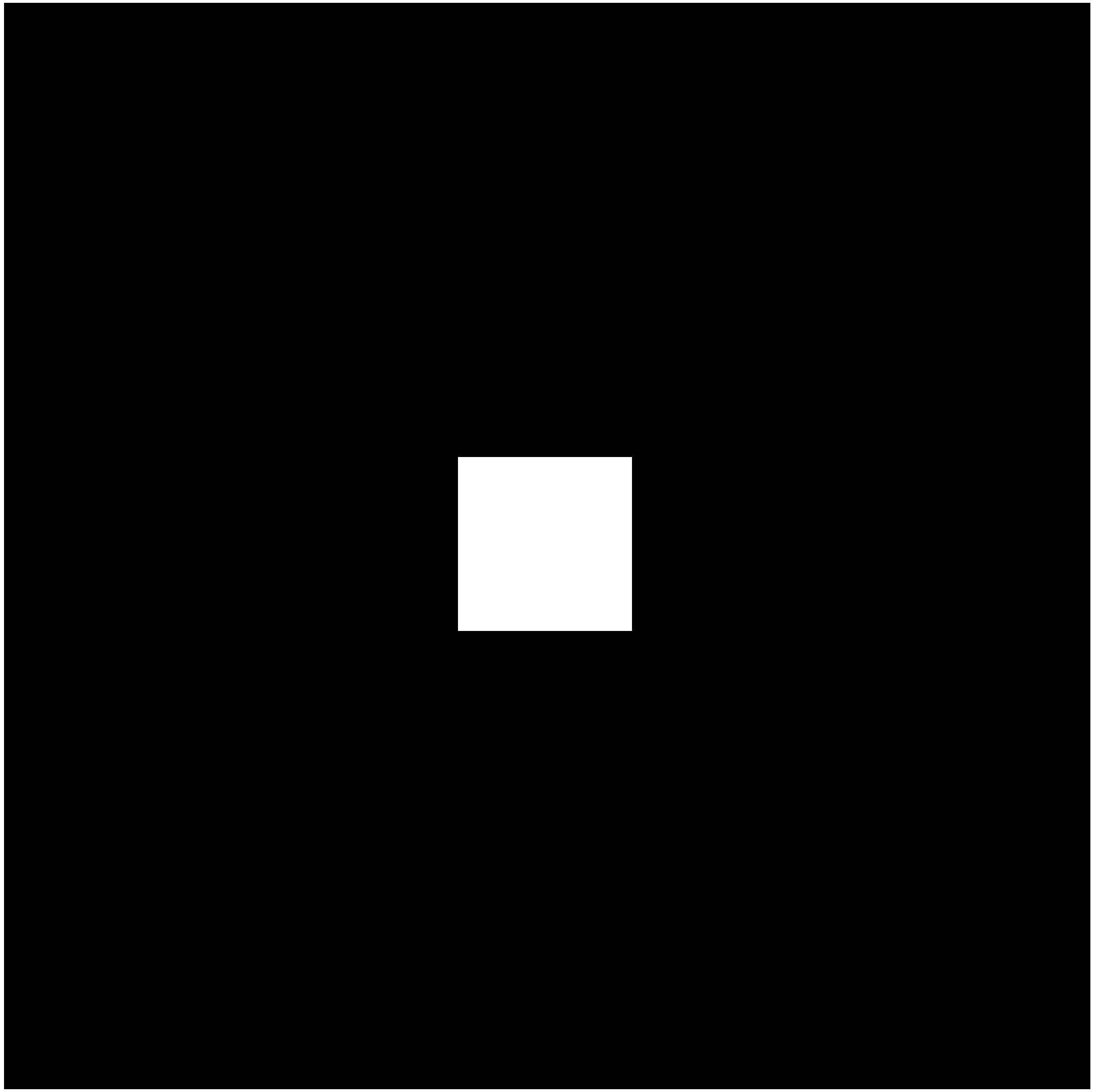
PŘÍKLAD VODOROVNÁ ČÁRA, IMAGINÁRNÍ SLOŽKA SPEKTRA



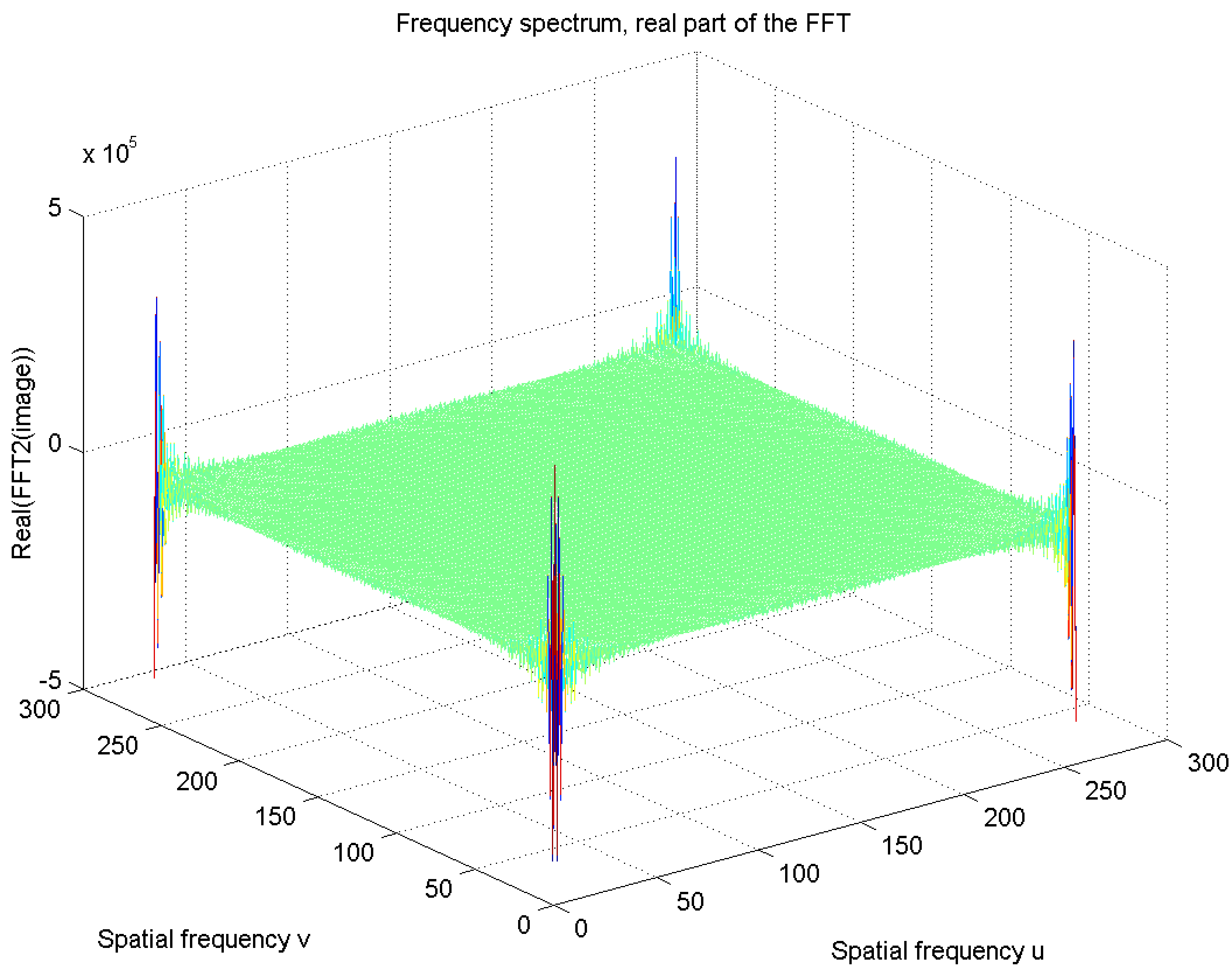
PŘÍKLAD VODOROVNÁ ČÁRA, VÝKONOVÉ SPEKTRUM



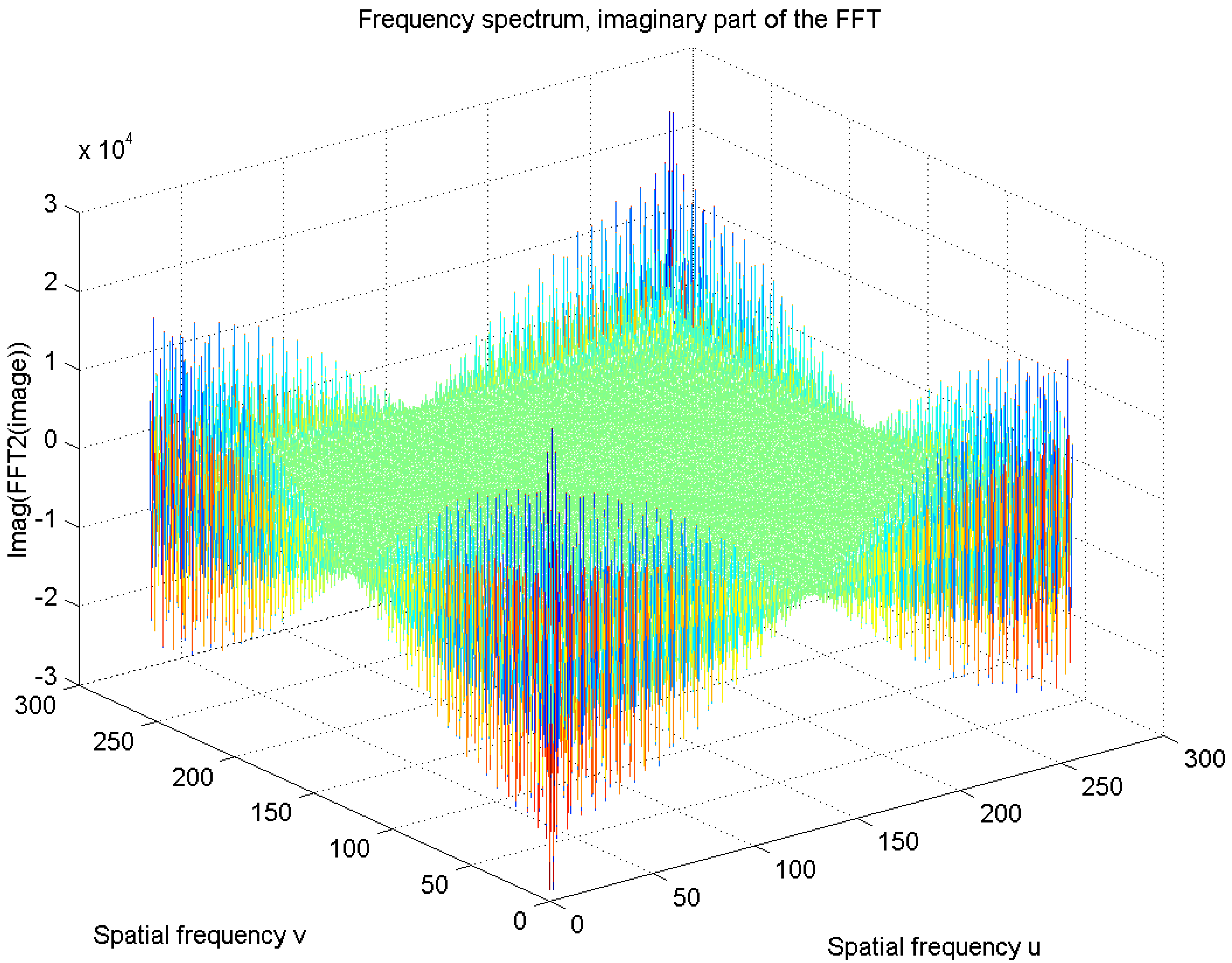
PŘÍKLAD ČTVEREC, VÝCHOZÍ OBRAZ 265×256



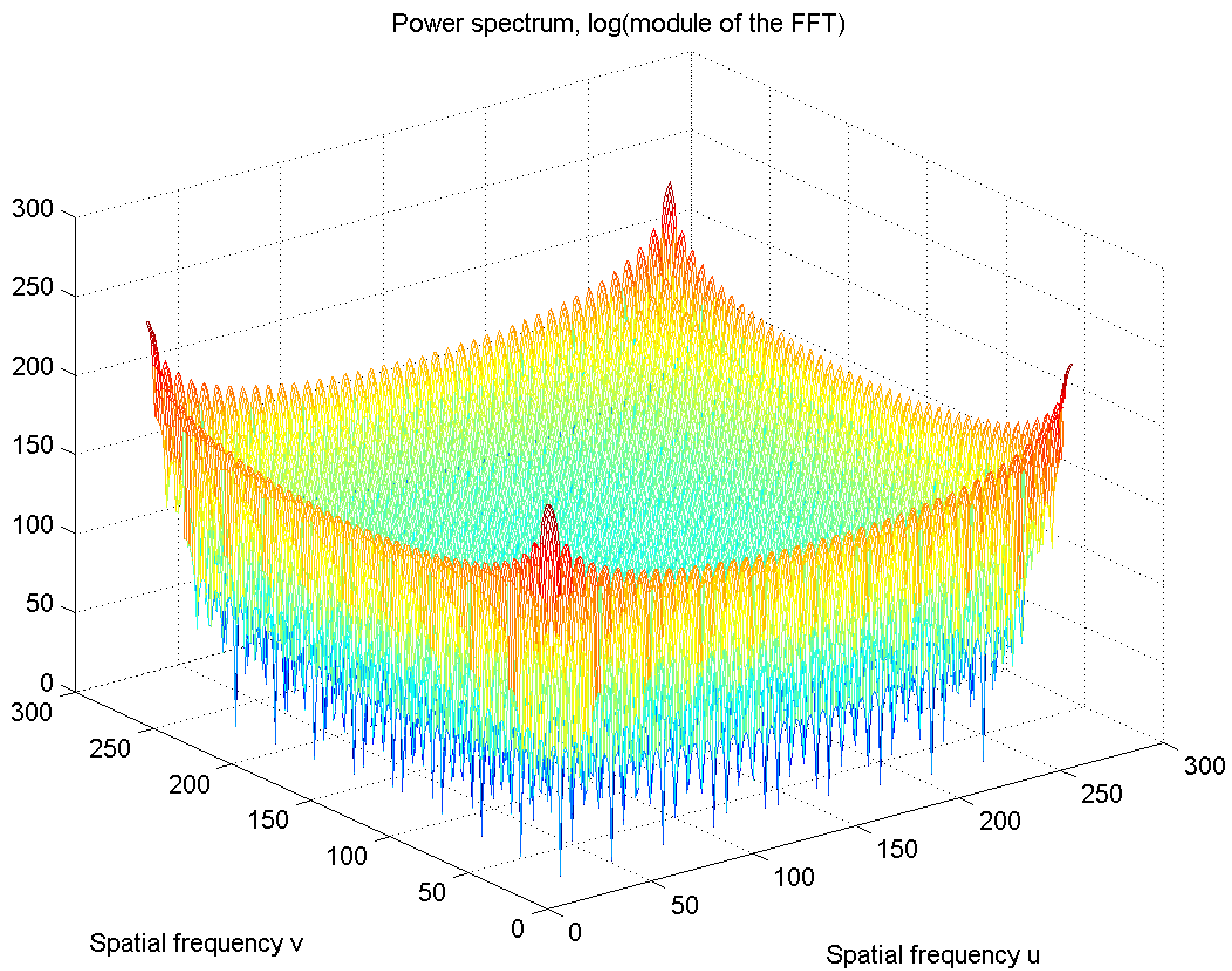
PŘÍKLAD ČTVEREC, REÁLNÁ SLOŽKA SPEKTRA



PŘÍKLAD ČTVEREC, IMAGINÁRNÍ SLOŽKA SPEKTRA



PŘÍKLAD ČTVEREC, LOGARITMUS VÝKONOVÉHO SPEKTRA



PŘÍKLAD ČTVEREC, VÝKONOVÉ SPEKTRUM JAKO OBRÁZEK