PC: Identifikace struktury generativního systému

Důležitý problém v obecné teorii systémů.

1. Podsystém a nadsystém.
2. Definice dekompozice systému.
3. Problém rekonstrukce systému:
   a. lokální a globální konzistence systémů s chováním,
   b. jednoduchá a iterativní spojovací procedura.
4. Problém identifikace struktury:
   a. generátor rekonstrukčních hypotéz,
   b. kvalita rekonstrukční hypotézy,
   c. identifikační procedura.
5. Příklad identifikace na skutečném systému.

Podsystém a nadsystém generativního systému

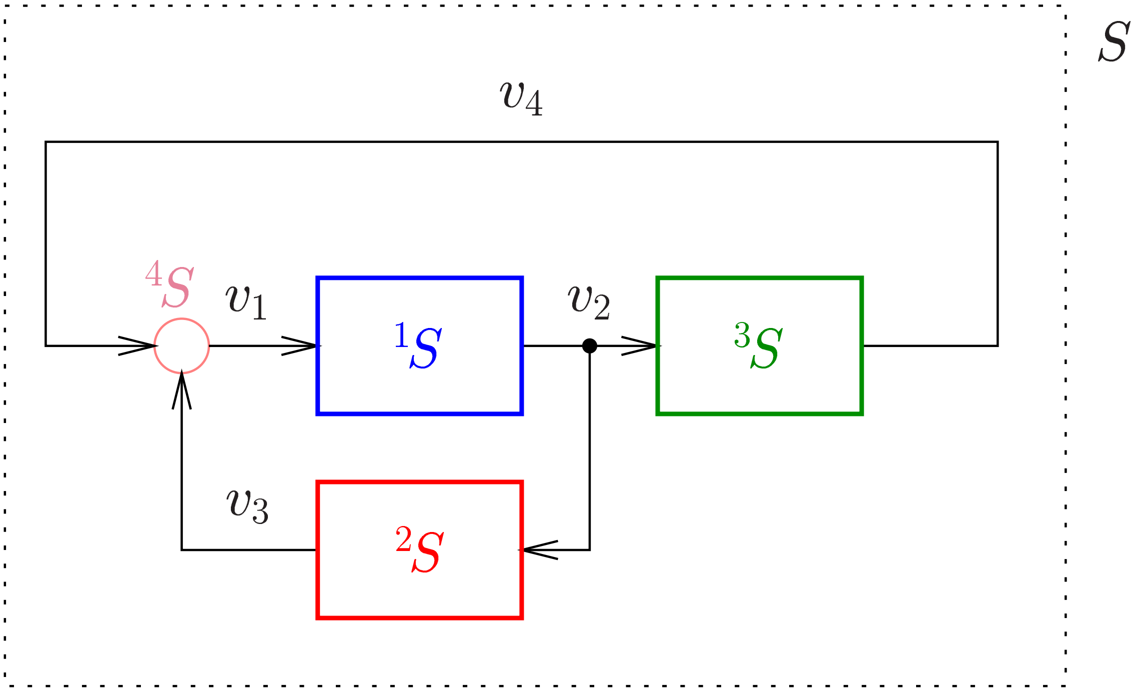
Def: ${}^iF = ({}^iA, {}^iB; {}^iM, {}^if_B)$ je podsystém systému $F = (A, B; M, f_B)$, když platí následující podmínky:

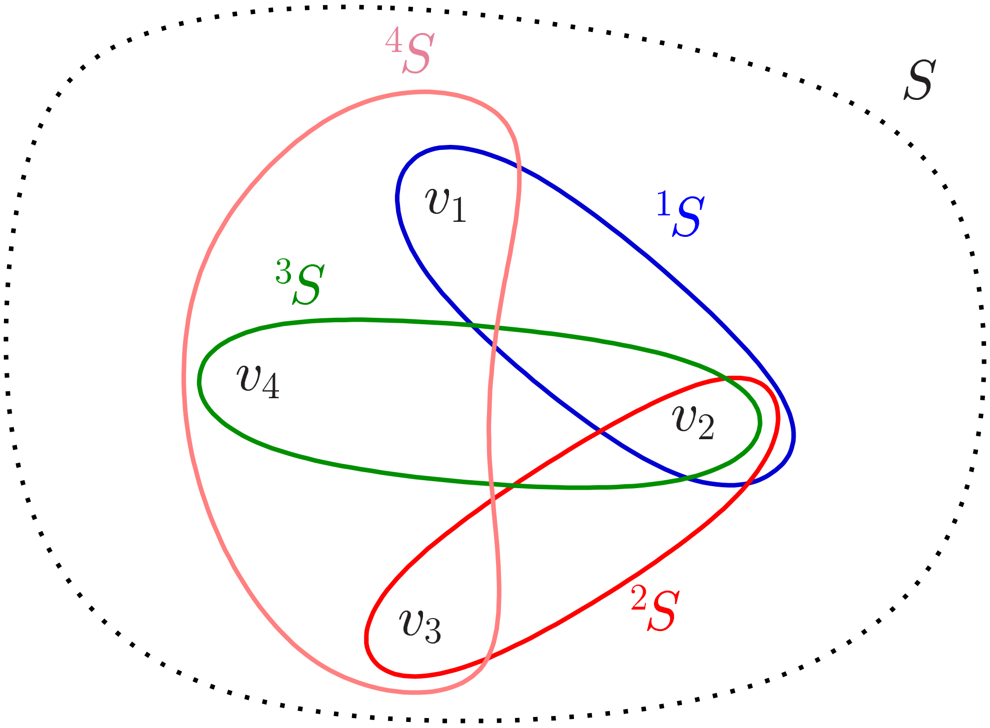
1. **kompatibilita s F**
   - má stejnou parametrickou množinu: ${}^iB = B$
   - obory hodnot proměnných V_j zachovány
2. **vnoření ${}^iF \sqsubseteq F$**
   a. množina vzorkovacích proměnných ${}^iS \subseteq S$
   b. data pro proměnné v ${}^iS$ jsou zachována
   c. maska ${}^iM \subseteq M$
   d. funkce chování ${}^if_B$ je marginální k f_B

$\Rightarrow$ **Hierarchie systémů**

Konvence: S značí dále pouze množinu(vzorkovacích) proměnných systému s chováním F.

Dekompozice systému





Dekompozice systému

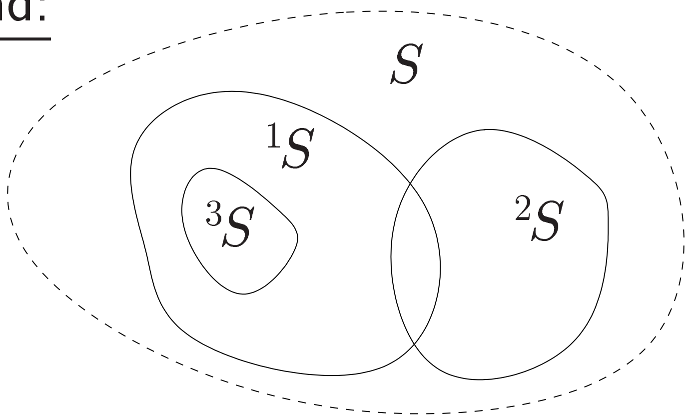
Celkový systém – obsahuje všechny proměnné.

Dekompozice: Množina podsystémů

$$\{{}^1S, {}^2S, \dots, {}^qS\}$$

celkového systému S, taková, že žádné dva ${}^jS$ a ${}^kS$ nejsou navzájem podsystémy: ${}^jS \not\sqsubseteq {}^kS$

Protipříklad:



Podmínka iredundance: podsystém ${}^3S \sqsubset {}^1S$ nenese žádnou novou informaci o S a nepatří tedy do dekompozice systému S.

- Vazební proměnné mezi podsystémy: $C_{k,l} = {}^kS \cap {}^lS$
- Orientované vazby: rozklad proměnných na vstupní a výstupní.
- Proměnná může být deklarována jako výstupní jen v jednom podsystému (jednoznačnost řízení)

Rekonstrukce a identifikace: úvod

Rekonstrukce systému

Konstrukce hypotézy o nejlepším celkovém systému S je-li dána jeho dekompozice $\{{}^1S, {}^2S, \dots, {}^qS\}$.

Aplikace:

1. inference celkového systému z dílčích
2. procedura nutná pro identifikaci

Identifikace struktury

Nejlepší dekompozice systému S na $\{{}^1S, {}^2S, \dots, {}^qS\}$.

Aplikace:

1. zjednodušení systému
   (např. rozpoznávání: jednodušší modely se odhadují lépe z dat)
2. nalezení struktury ve složitém systému
   (např. analýza kritických vazeb a závislostí)

Velikost reprezentace celkového a dekomponovaného systému

k — počet stavů jedné proměnné

n — počet proměnných v systému

$(1+n)\,k^n$	velikost reprezentace celkového systému funkcí chování
$\frac{3}{2}\,k^2 n\,(n-1)$	velikost reprezentace dekompozice, kde každý podsystém má jen dvě proměnné

Pro $k = 10$

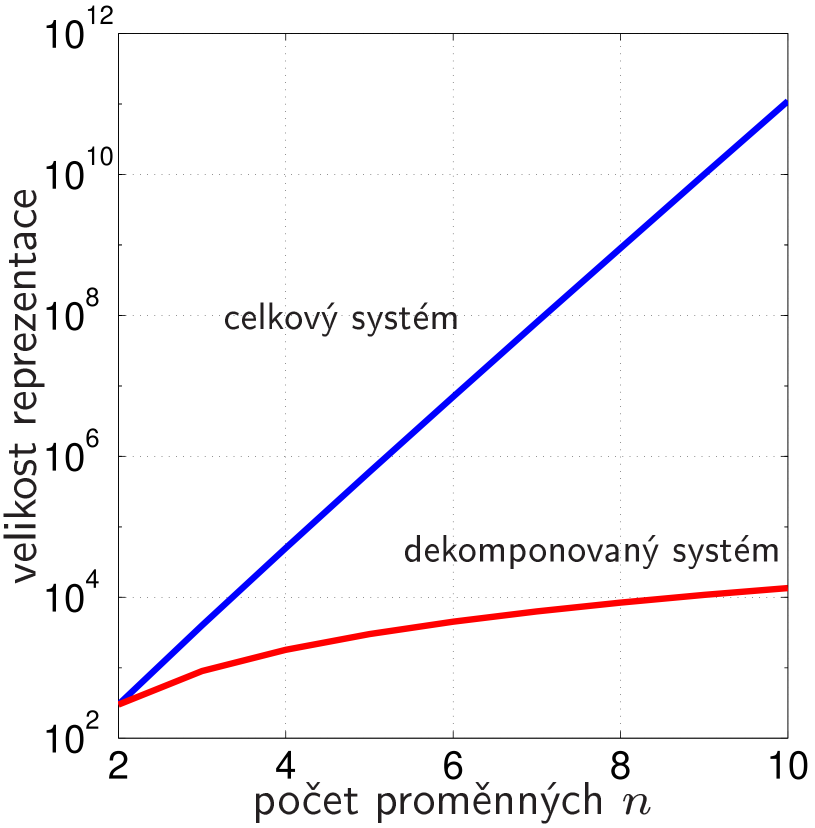
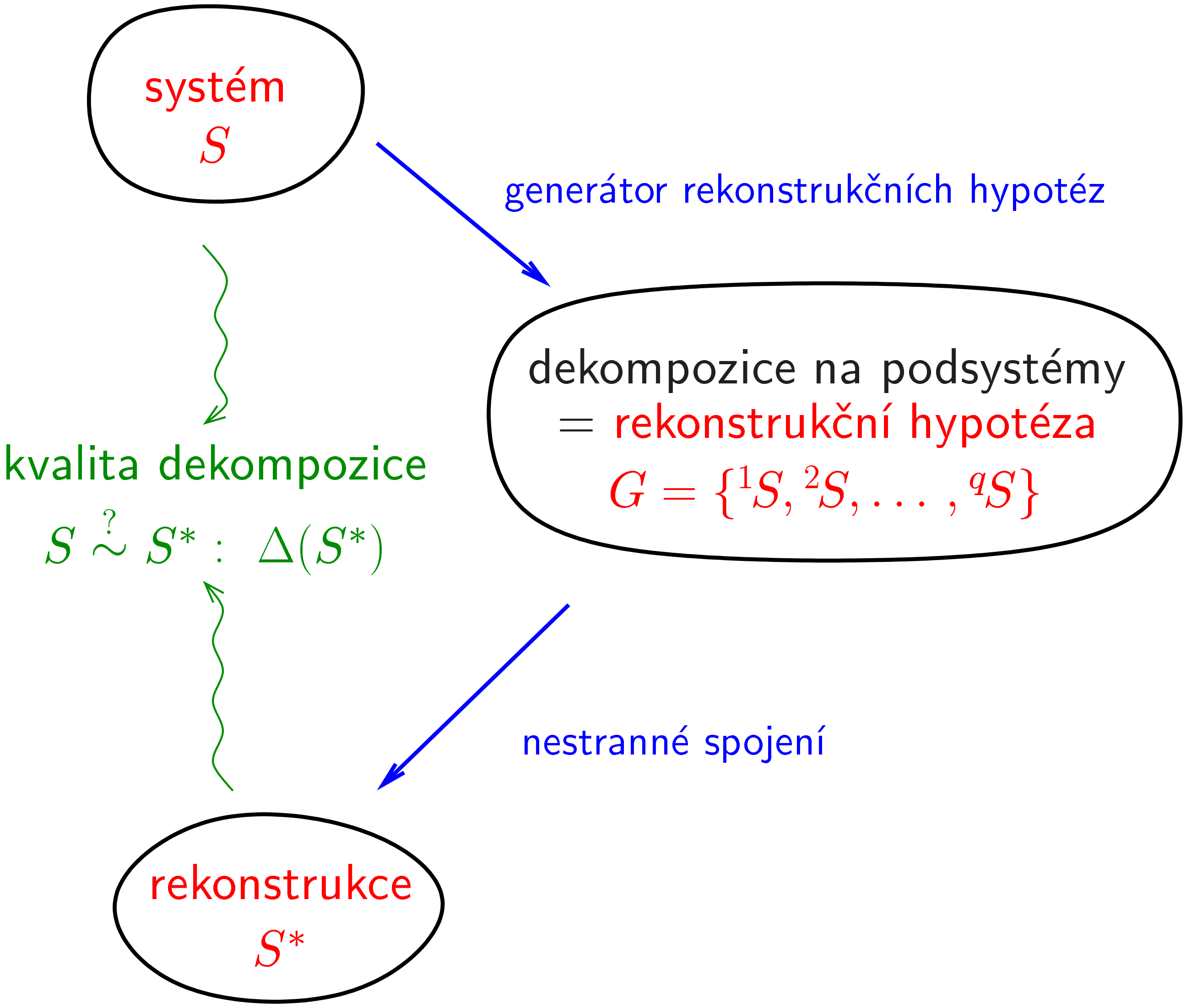


Schéma identifikační procedury



- G a S nejsou porovnatelné nelze srovnat kvalitu G vůči S
- S^* a S jsou porovnatelné

Vzájemná konzistence systémů s chováním

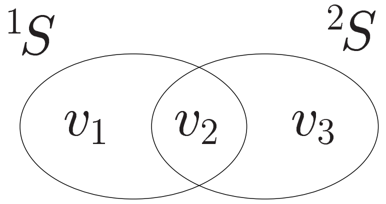
Lokální konzistence chování

Marginální funkce chování nad vazebními proměnnými musí být stejné

$$C_{i,j} = {}^iS \cap {}^jS$$

$$[{}^if_B \downarrow C_{i,j}] = [{}^jf_B \downarrow C_{i,j}]$$

Př: Lokálně *nekonzistentní* systémy:



v_1	v_2	${}^1f_B$
0	0	0.5
0	1	0.2
1	0	0.1
1	1	0.2

v_2	v_3	${}^2f_B$
0	0	0.4
0	1	0.25
1	0	0.15
1	1	0.2

v_2	$[{}^1f_B \downarrow \{v_2\}]$
0	0.6
1	0.4

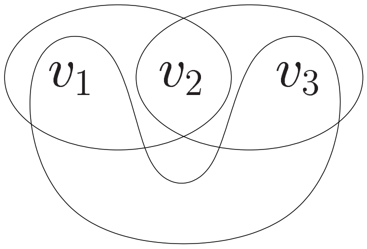
v_2	$[{}^3f_B \downarrow \{v_2\}]$
0	0.65
1	0.35

Pozn: podsystémy vzniklé rozkladem systému jsou lokálně konzistentní.

Globální konzistence chování

Sdruženou funkci chování f_B musí být možno zkonstruovat z marginálních funkcí chování ${}^i f_B,\ i \in N_q$.

Př: Globálně nekonzistentní systémy:



Lokálně konzistentní:

v_1	v_2	${}^1 f_B$
0	0	0 $(a+x)$
0	1	0.7
1	0	0.3

v_2	v_3	${}^2 f_B$
0	1	0.3
1	0	0.7
1	1	0 $(b+y)$

v_1	v_3	${}^3 f_B$
0	0	0.4
0	1	0.3 $(a+b)$
1	0	0.3

v_1	v_2	v_3	f_B
0	0	1	a
0	1	1	b

$$a + x = 0 \Rightarrow a = x = 0 \qquad (a, x \geq 0)$$

$$b + y = 0 \Rightarrow b = y = 0 \qquad (y \geq 0)$$

$$a + b = 0.3$$

To je ve sporu.

Rekonstrukce systému

Dáno: Dekompozice systému $\{{}^1S, {}^2S, \dots, {}^qS\}$.

Cíl: Nejlepší hypotéza o celkovém systému S.

Postup:

1. **Určit množinu možných rekonstrukcí.**

$$
\begin{array}{lll}
{}^if({}^is) = \sum_{{}^is \prec s} f(s) & \sum_{i=1}^{q} |{}^i\mathbf{S}| & \text{rovnic} \\
f(s) \geq 0 & |\mathbf{S}| & \text{nerovnic}
\end{array}
$$

2. **Vybrat nejlepší z nich.**

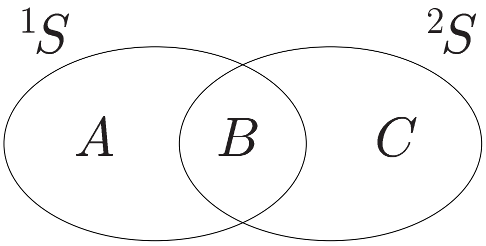
   Volba: (nestranná rekonstrukce)
   S neobsahuje jinou informaci než tu obsaženou v množině $\{{}^iS,\ i = 1, 2, \dots, q\}$.

Implementace: Spojovací procedura.

Spojení dvou marginálních funkcí chování

Marginální funkce chování:

rozklad množiny proměnných:



$$^1f_B\colon\ A \times B \to \langle 0, 1\rangle$$
$$^2f_B\colon\ B \times C \to \langle 0, 1\rangle$$

Nestranné spojení (o maximální entropii):

$$({}^1f_B * {}^2f_B)(a, b, c) = {}^1f_B(a, b) \cdot {}^2f_B(c \mid b)$$

Pozn: ${}^1f_B(b) = {}^2f_B(b)$ (kompatibilita)

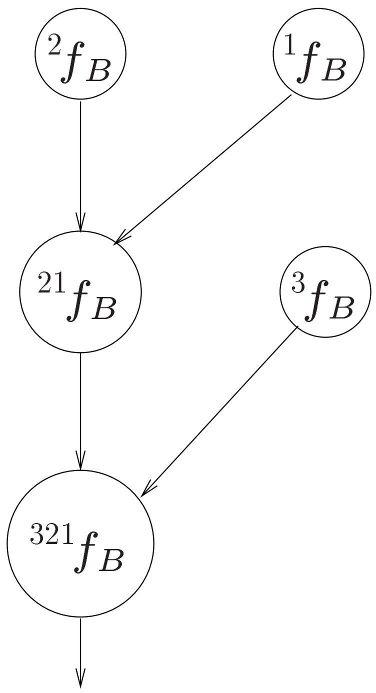
Speciální případy:

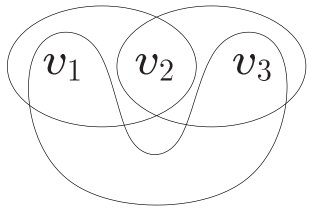
$$\mathbf{A} = \emptyset: \quad ({}^1f_B * {}^2f_B)(b, c) = {}^1f_B(b) \cdot {}^2f_B(c \mid b)$$
$$\mathbf{B} = \emptyset: \quad ({}^1f_B * {}^2f_B)(a, c) = {}^1f_B(a) \cdot {}^2f_B(c)$$

Spojovací procedura

Jednoduchá procedura pro $\{{}^1S, {}^2S, \ldots, {}^qS\}$:

$$f_B = {}^q f_B * \left({}^{q-1} f_B * \left(\cdots * \left({}^2 f_B * {}^1 f_B\right)\right)\right)$$



Problém: cyklické vazby mezi proměnnými 

Iterativní spojovací procedura

Odstraní vliv cyklických vazeb.

Iterativní spojovací procedura $S^*({}^1S, {}^2S, \dots, {}^qS; \varepsilon)$

1. $k := 0,$ $\quad F_0 := {}^qf_B * {}^{q-1}f_B * \cdots * {}^1f_B$
2. $k := k + 1,$ $\quad F_k := {}^qf_B * {}^{q-1}f_B * \cdots * {}^1f_B * F_{k-1}$
3. jestliže $\max |F_k - F_{k-1}| < \varepsilon$ stop, jinak opakuj 2.

Jestliže $\sum f_B(s) = 1$, pak řešení nalezeno s chybou $\pm\varepsilon$, jinak $\{{}^1S, {}^2S, \dots, {}^qS\}$ není globálně konzistentní.

Výsledkem je nestranná rekonstrukce s chybou ε.

Rekonstrukční nejistota

Pozorování:

$H(S^*) \geq H(S)$ (S^* má větší množství stavů o menší psti)

$$\boxed{\Delta(S^*) = H(S^*) - H(S)}$$

Identifikace struktury

Identifikace struktury

Nejlepší dekompozice systému S na množinu podsystémů $G = \{{}^1S, {}^2S, \ldots, {}^qS\}$

Podproblémy

1. systematické generování rekonstrukčních hypotéz G
   - neredundance
     $$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, q\} \colon {}^iS \not\subseteq {}^jS$$
   - pokrytí
     $$\bigcup_i {}^iS = S \qquad (S \ \ldots \ \text{množina proměnných systému})$$
2. Rekonstrukce celkového systému S^* z G.
3. Vyhodnocení relativní neurčitosti rekonstrukční hypotézy

$$\Delta(S^*) = H(\mathbf{S}^*) - H(\mathbf{S}) \qquad \text{nebo}$$

$$\Delta(S^*) = H(\mathbf{G}^* \mid \bar{\mathbf{G}}^*) - H(\mathbf{G} \mid \bar{\mathbf{G}})$$

Zjemnění rekonstrukční hypotézy

Rekonstrukční hypotéza $G = \{{}^1S, {}^2S, \ldots, {}^qS\}$

Zjemnění rekonstrukční hypotézy $\prec$

G_i je zjemněním G_j když pro každé ${}^xS \in G_i$ existuje ${}^yS \in G_j$ takové, že ${}^xS \sqsubseteq {}^yS$. Značíme

$$G_i \prec G_j$$

Bezprostřední zjemnění $\stackrel{*}{\prec}$

G_i je bezprostředním zjemněním G_j jestliže neexistuje G_k takové, že

$$G_i \prec G_k \quad \text{a} \quad G_k \prec G_j$$

Relace bezprostředního zjemnění tvoří svaz na množině všech rekonstrukčních hypotéz.

Pozn: nejde o zjemňování rozkladu, rekonstrukční hypotézy netvoří rozklad (proměnné se opakují).

Generátor rekonstrukčních hypotéz

Vstup: Rekonstrukční hypotéza $G = \{{}^1S, {}^2S, \ldots, {}^qS\}$

Výstup: Všechna bezprostřední zjemnění G

Procedura (prohledávání svazu $(G, \overset{*}{\prec})$)

1. Pro $i = 1, 2, \ldots, q$ dělej kroky 2,3.
2. Jestliže $|{}^iS| \geq 2$ potom nahraď ${}^iS$ množinou všech podmnožin ${}^iS$ o velikosti $|{}^iS| - 1$.
3. Po odstranění redundancí dostaneme bezprostřední zjemnění G.

   Pozn: může se opakovat na stejné úrovni zjemnění.

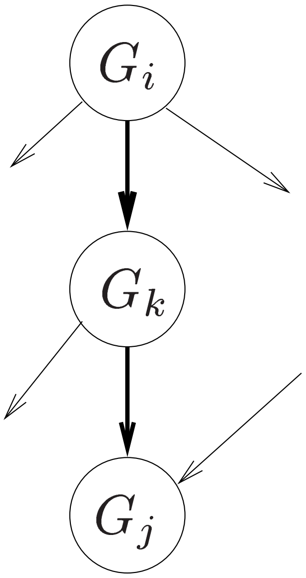
$$
\begin{aligned}
G &= \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,4\}\} = \{{}^1S, {}^2S, {}^3S\} \\
G_1 &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3,4\},\{1,4\}\} \\
G_2 &= \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1,4\}\} \\
G_3 &= \{\{1,2,3\},\{2,3,4\}\} \\
G_4 &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\},\{2,4\},\{1,4\}\} \\
G_5 &= \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3,4\}\} \\
G_6 &= \{\{1,2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}
\end{aligned}
$$

Monotonnost cest ve svazu zjemnění

Je-li $G_i \succ G_k \succ G_j$ potom

$$\Delta(G_i) \leq \Delta(G_k) \leq \Delta(G_j)$$

1. Relativní neurčitost Δ monotonně roste podél každé větve svazu zjemnění.



2. Není nutno expandovat všechny větve: postačí metoda branch-and-bound [Narenda&Fukunaga 1977]

   Nejmenší hodnota Δ_{k+1} na úrovni zjemnění $k+1$ definuje práh T, podle kterého se odřezávají ty větve na úrovni k, které mají hodnotu $\Delta_k > T$.

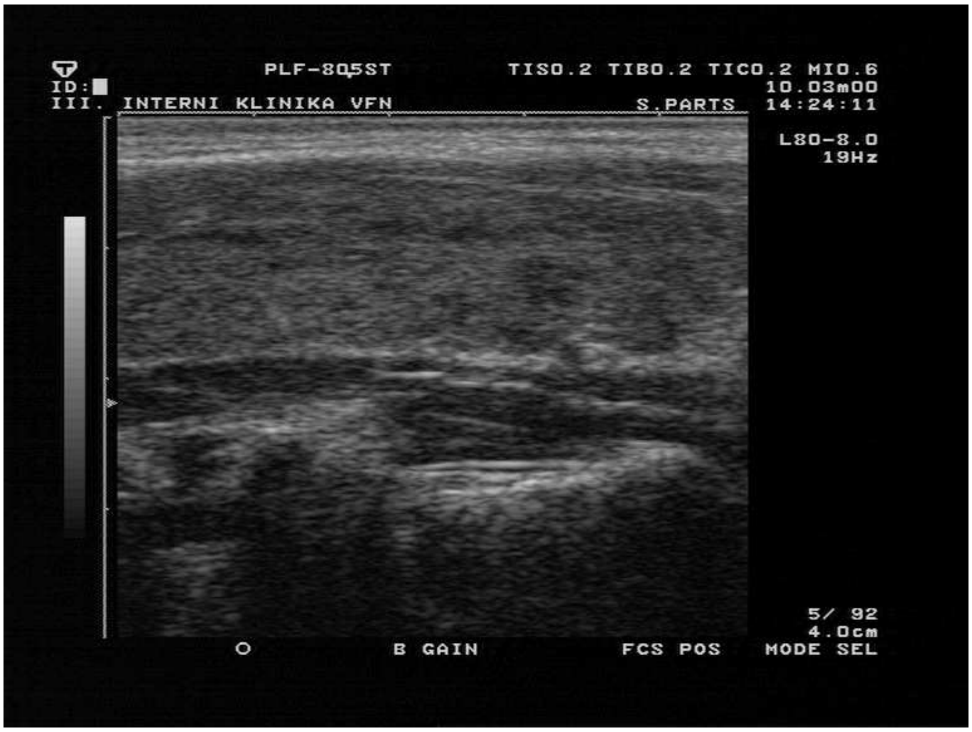
Identifikační procedura

1. Identifikuj systém s chováním S z datového systému D.
2. Vytvoř rekonstrukční hypotézu $G_0 = \{S\}$.
3. Prohledej svaz zjemnění hypotézy G_0, na každé úrovni zjemnění zaznamenej hypotézu G_k o nejmenší hodnotě $\Delta(G_k)$.
4. Výsledkem je soubor nejlepších dekompozičních hypotéz klesajícího stupně strukturní složitosti.

Sonogram štítné žlázy v podélném řezu

zdravá

lymfocitická thyroitida



Příklad: Klasifikace textury

Aplikace

Diagnóza difůzních změn ve štítné žláze.

Pracovní hypotéza

Klasifikace je možná na základě textury.

Volba

Model založený na funkci chování (kookurenční matici).

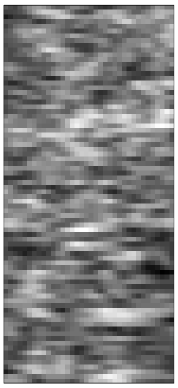
Základní problém

Zvolit co nejmenší model textury založený na funkci chování.

Důvody:

1. klasifikace je jednodušší
2. klasifikátor je mnohem snadnější naučit

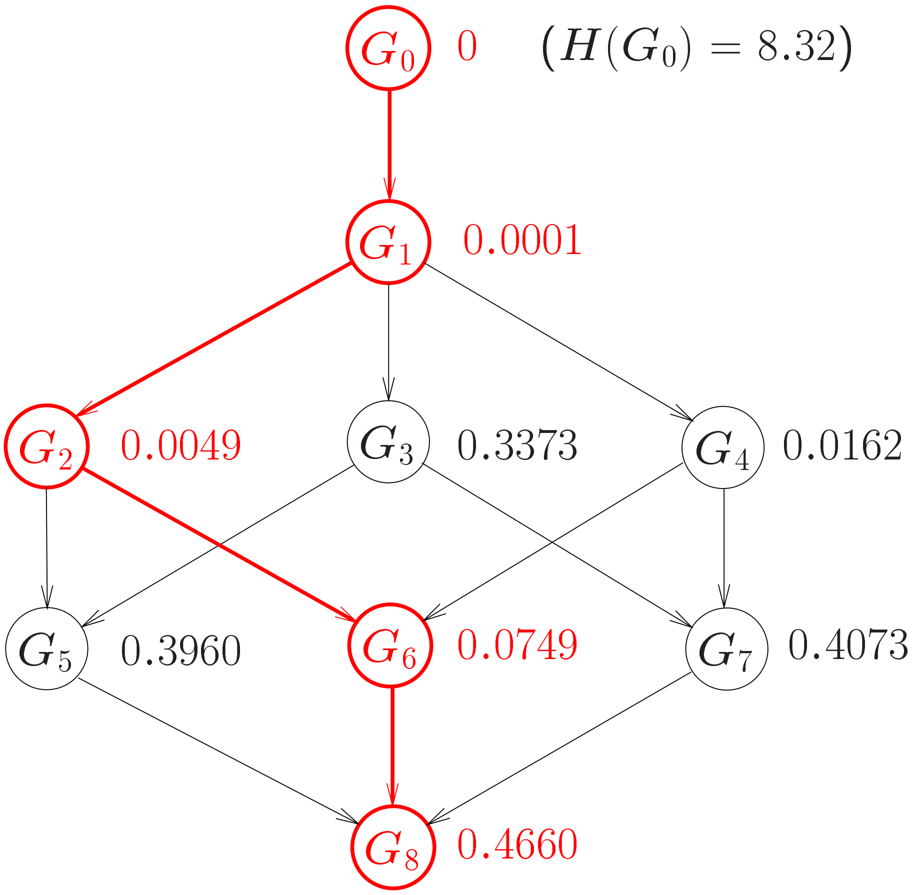
Rekonstrukční analýza

vzorek textury: 

maska:

1	2
3	

svaz zjemnění



rekonstrukční hypotézy

$G_0 = 123$

$G_1 = 12|13|23$

$G_2 = 12|13$

$G_3 = 12|23$

$G_4 = 13|23$

$G_5 = 12|3$

$G_6 = 13|2$

$G_7 = 1|23$

$G_8 = 1|2|3$

Závěr

- kookurenční matici má smysl počítat pouze ve svislém směru

Infanticida u myší

Test hypotézy sexuálního soutěžení: samec zvyšuje svůj sexuální úspěch na úkor konkurentů tím, že zabíjí jeho potomstvo a páří se s jejich matkou.

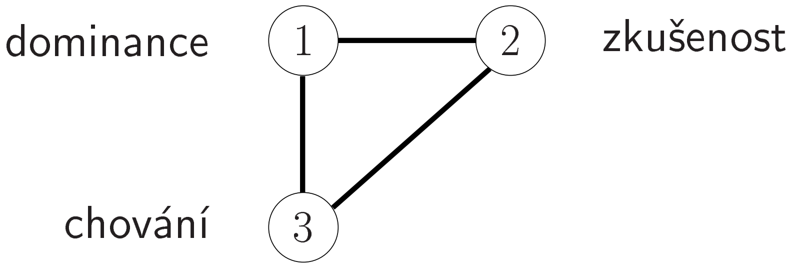
Studie: 114 jedinců 90-denních myší

Funkce chování

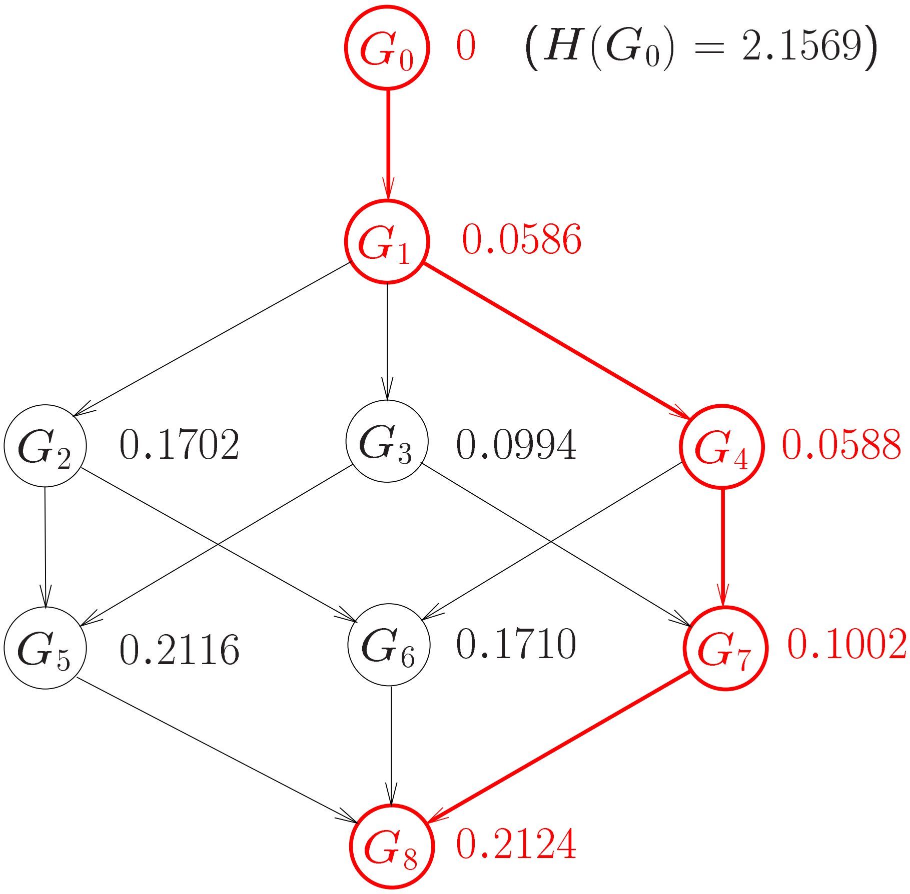
v_1	dominance	0	dominantní
		1	podřízený
v_2	sexuální zkušenost	0	nemá
		1	má
v_3	chování vůči potomstvu	0	infanticidní
		1	rodičovské
		2	nevšímavé

v_1	v_2	v_3	N
0	0	0	28
0	0	1	4
0	0	2	2
0	1	0	5
0	1	1	25
0	1	2	3
1	0	0	5
1	0	1	9
1	0	2	8
1	1	0	7
1	1	1	15
1	1	2	3

Infanticida u myší: rekonstrukční analýza



svaz zjemnění



rekonstrukční hypotézy

$G_0 = 123$

$G_1 = 12|13|23$

$G_2 = 12|13$

$G_3 = 12|23$

$G_4 = 13|23$

$G_5 = 12|3$

$G_6 = 13|2$

$G_7 = 1|23$

$G_8 = 1|2|3$

Závěry

- chování je ovlivněno oběma faktory, ale zkušenost je dvakrát významnější než dominance (ΔG_6, ΔG_7)
- dominance a zkušenost jsou nezávislé ($\Delta G_3 \sim \Delta G_7$, první vazba, která se rozpadne)

Posibilistická funkce chování

- posibilita π: stupeň možnosti
- $\pi = 1 \;\ldots$ událost je možná

x_i elementární jevy, $x_i \in S$

posibilita	pravděpodobnost
definiční vlastnosti	
$\pi: \ \exp S \to \langle 0, 1 \rangle$	$p: \ \exp S \to \langle 0, 1 \rangle$
$\pi(\{\}) = 0$	$p(\{\}) = 0$
$\pi(S) = 1$	$p(S) = 1$
$\pi\left(\bigcup_i x_i\right) = \max_i \pi(x_i)$	$p\left(\bigcup_i x_i\right) = \sum_i \pi(x_i)$
odhad z dat	
$\pi(x_i) \approx \dfrac{N(x_i)}{\max\limits_j N(x_j)}$	$\pi(x_i) \approx \dfrac{N(x_i)}{\sum\limits_j N(x_j)}$

Posibilistická míra neurčitosti

$$X_\alpha = \{x_i,\, \pi(x_i) \geq \alpha\} \qquad \alpha\text{-řez}$$

$$L = \{\alpha,\, \exists x_i \colon \pi(x_i) = \alpha\} \cup \{0\} \qquad \text{množina } \alpha\text{-hladin}$$

U-míra

$$U(\pi) = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=2}^{k} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) \log |X_{\alpha_k}|$$

příklad

x_i	1	2	3	4	5	6
$\pi(x_i)$	0.1	0.0	0.3	1.0	0.3	0.2

α	X_α						$\lvert X_\alpha \rvert$
0.0	×	×	×	×	×	×	6
0.1	×		×	×	×	×	5
0.2			×	×	×	×	4
0.3			×	×	×		3
1.0				×			1

$$U = \frac{1}{1.0}\left(\underbrace{0.1 \cdot \log 5}_{j=2} + \underbrace{0.1 \cdot \log 4}_{j=3} + \underbrace{0.1 \cdot \log 3}_{j=4} + \underbrace{0.7 \cdot \log 1}_{j=5}\right)$$

Posibilistické spojení

Posibilistická marginální funkce

$$\pi(x) = \max_y \pi(x, y)$$

Posibilistická generativní neurčitost

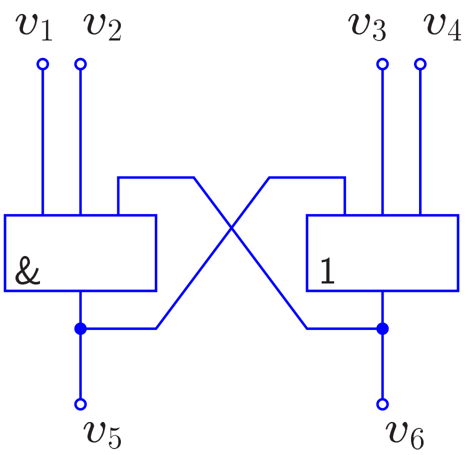
$$U(\mathbf{G} \mid \bar{\mathbf{G}}) = U(\mathbf{G}, \bar{\mathbf{G}}) - U(\bar{\mathbf{G}})$$

Posibilistické spojení

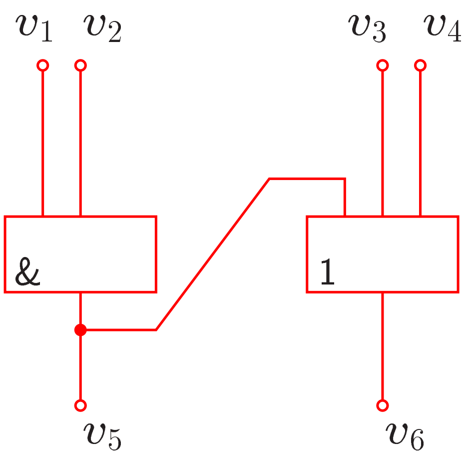
$$({}^1f * {}^2f)(a, b, c) = \min\left({}^1f(a, b),\ {}^2f(b, c)\right)$$

není nutná iterativní spojovací procedura

Diagnostika obvodů



předpokládaný systém



diagnostifikovaný systém

není pozorován stav a

pozorované stavy

	$\bar{g}$				g	
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	1
	0	0	1	0	0	1
	0	0	1	1	0	1
	0	1	0	0	0	0
	0	1	0	1	0	1
	0	1	1	0	0	1
	0	1	1	1	0	1
	1	0	0	0	0	0
	1	0	0	1	0	1
	1	0	1	0	0	1
	1	0	1	1	0	1
$a =$	1	1	0	0	0	0
$b =$	1	1	0	0	1	1
	1	1	0	1	1	1
	1	1	1	0	1	1
	1	1	1	1	1	1

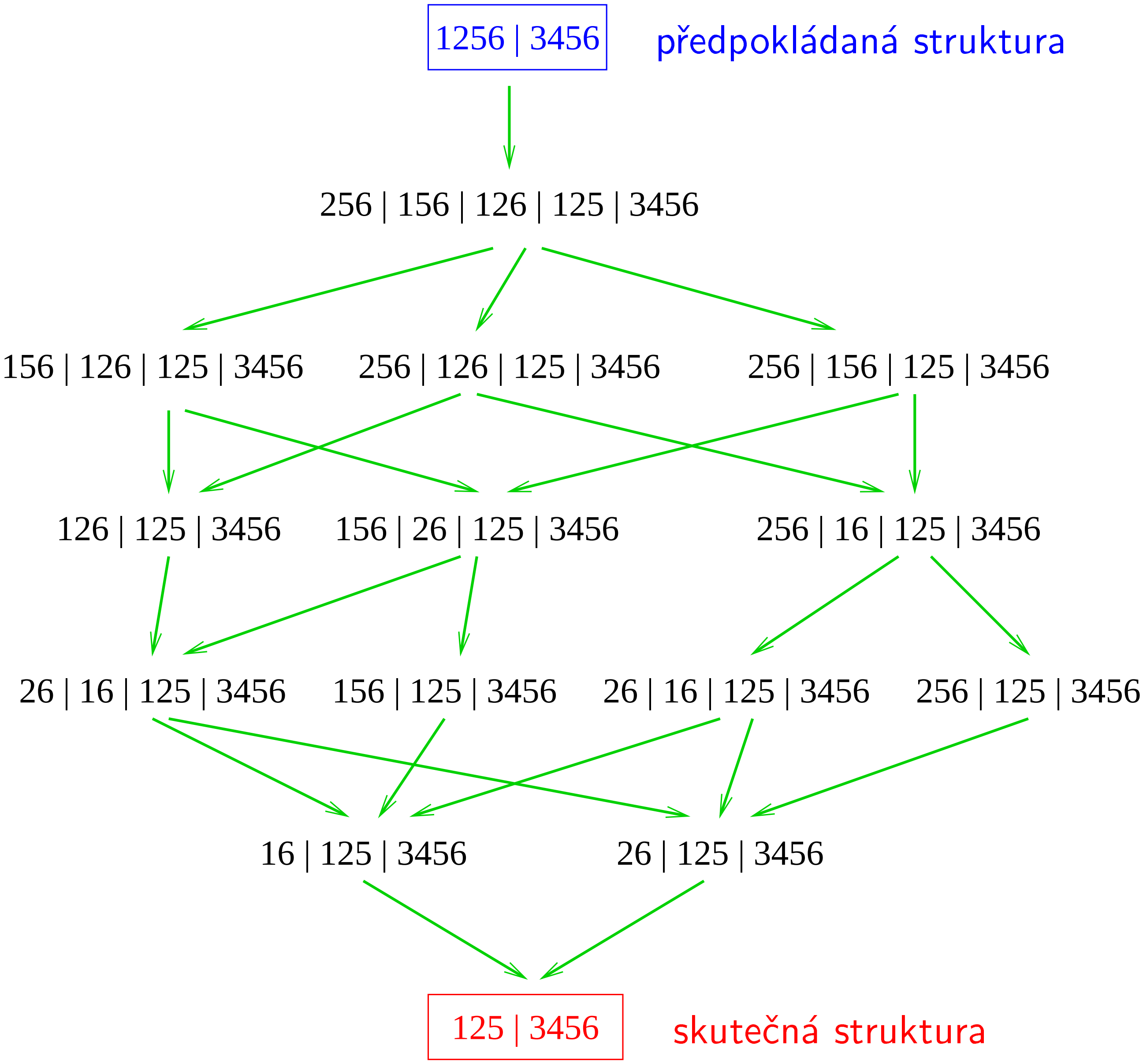
správná rekonstrukční hypotéza $1256 \mid 3456 = G_A$

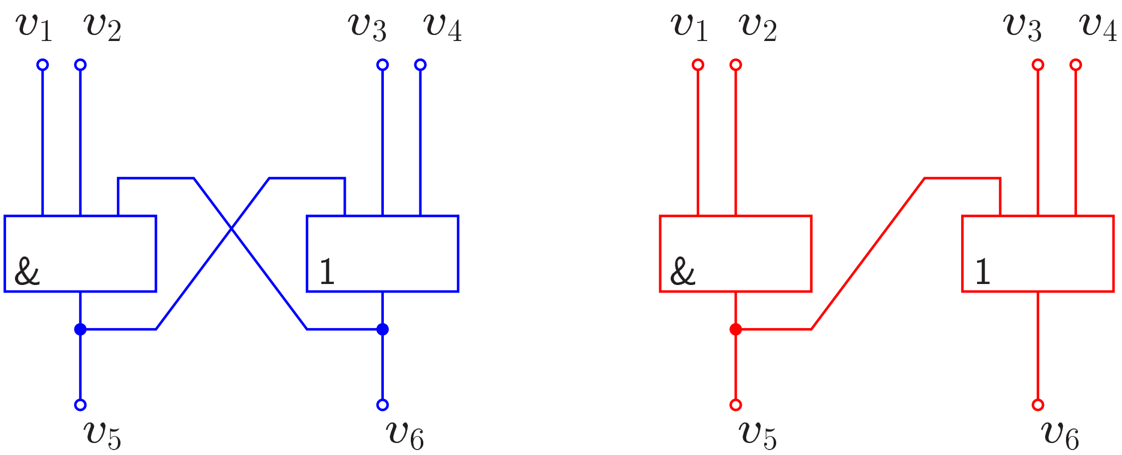
1. $\Delta G_A > 0 \Rightarrow$ obvod je vadný

   nutná rekonstrukční analýza pro předchůdce G_A

2. $\Delta G_A = 0$ nedokazuje plnou funkcionalitu

   rekonstrukční analýza pro zjemnění G_A





Pozn: $\Delta(1256 \mid 346) = 3$

Shrnutí přednášek

PA Identifikace parametrů generativního systému z datového systému.

$\boxed{\bullet \text{ volbou masky}}$

kritéria

1. generativní neurčitost
   = jak dobře systém generuje generované proměnné

$$H(\mathbf{G} \mid \bar{\mathbf{G}}) = H(\mathbf{S}) - H(\bar{\mathbf{G}}), \quad H(\mathbf{S}) = H(\mathbf{G}, \bar{\mathbf{G}})$$

2. složitost = počet vzorkovacích proměnných

použití a vlastnosti

- nutná fáze modelování dynamických systémů
- existuje celá množina řešení

poznámky

- neparametrická metoda odhadu hustoty psti
- další možnosti: směs gausiánů, N nejbližších sousedů

Shrnutí

PB Zjednodušení modelu generativního systému.

- vylučováním proměnných
- redukcí rozlišení

kritéria

1. generativní neurčitost (jako v **PA**)
2. složitost
   = počet stavů s nenulovou pravděpodobností

použití a vlastnosti

- redukce velikosti modelu před identifikací struktury
- konstrukce příznaků pro rozpoznávání
- existuje celá množina řešení

Shrnutí

PC Identifikace struktury systému.

- postupným zjemňováním dekompozice

kritéria

1. rekonstrukční neurčitost

$$\Delta(\mathbf{S}^*) = H(\mathbf{S}^*) - H(\mathbf{S})$$

$\mathbf{S}^*$ – rekonstrukce ze zvolených podsystémů
$\mathbf{S}$ – původní systém

2. míra dekompozice = počet podsystémů

použití a vlastnosti

- redukce dimenze popisu
- analýza kritických vazeb a závislostí
- dolování znalostí z dat
- diagnostika systémů
- volba deskriptivních příznaků pro rozpoznávání
- existuje celá množina řešení