POČÍTAČOVÉ VIDĚNÍ

Tomáš Pajdla
pvi2006@cmp.felk.cvut.cz
pajdla@cmp.

Multiple View Geometry (Hartley, Zisserman)

vecerka@cmp ... konta

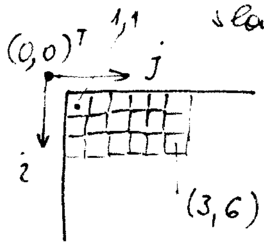
1. Konstrukce mozaiky ⇒ panoramatická fotografie
2. Rekonstrukce 3D scény z jejich obrazů

E. Krajník - Maticový počet

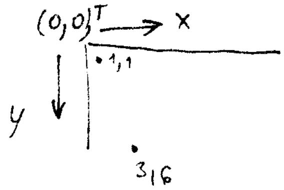
```
im = imread('nazev.jpg');
imagesc(im(1:10, 1:14, :));
axis image
```

První pixel matice je uložena po sloupcích.

Index: řádek×sloupec



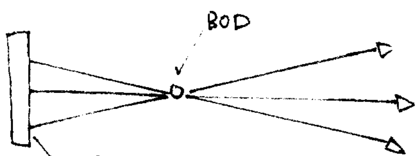
im(3,6,1)



axis image
plot(3,6,'.');

im(i, j, :) ↔ plot(j, i, '.');

Kamera



CCD - snímače
- body jsou v pravoúhlé pravidelné mřížce ⇒ lineární souřadnice
- affinní souřadný systém

Korespondence & matches [meče]
↳ podobné vlastnosti v obraze
↳ projekce jednoho obrazového bodu do víc obrazů

ÚLOHY
1. Panorama
   - otáčení kamery kolem bodu a snímkování
2. Rekonstrukce

$$(x_1, y_1, x_2, y_2)^T \rightarrow (x, y, z)^T \text{... kartézské souřadnice}$$

↑ PRVNÍ OBRAZ ↑ DRUHÝ OBRAZ

Lineární prostor – definice

Afinní prostor (geometrické vektory)

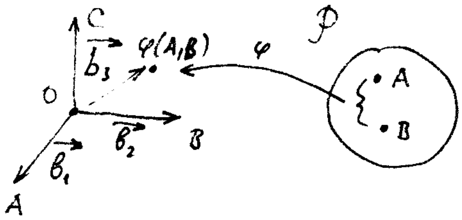
$A = (\mathcal{P}, \mathcal{V}, \varphi)$

$\mathcal{P}$ … množina bodů

$\mathcal{V}$ … lineární prostor $(\mathbb{R}^3, \mathbb{Q}^3, \mathbb{R}^4, \mathbb{Q}^4, \mathbb{C}^4, \dots)$

$\varphi \dots \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \underset{\text{VEKTOR}}{v}$ … dvojicím bodů to dává vektory

$\mathcal{V} \equiv (\mathbb{R}^3)$



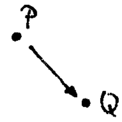
φ: 1. $\forall P, Q \in \mathcal{P} \ \exists! \vec{v} \in \mathcal{V} : \varphi(P,Q) = \vec{v}$

– pro každé dva body existuje 1 vektor

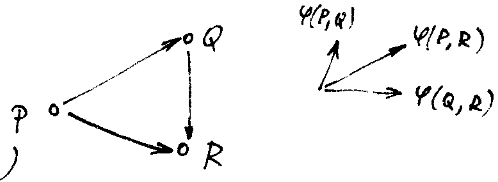
2. $\forall P \in \mathcal{P}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \ \exists! Q \in \mathcal{P} : \varphi(P,Q) = \vec{v}$

$\psi : \mathcal{P} \times \mathcal{V} \to \mathcal{P}, \ \psi(P, \vec{v}) = Q$

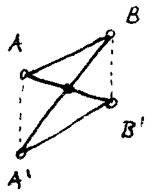
$(P + \vec{v} = Q)$



3. $\forall P, Q, R \in \mathcal{P} : \varphi(P,Q) + \varphi(Q,R) = \varphi(P,R)$



Geometrické vektory, volný vektor

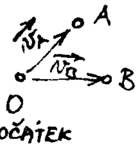


$(A,B) \approx (A',B')$

Dimenze $\dim A = \dim \mathcal{V}$ (počet bází prostoru)

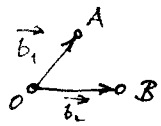
Bod ≡ Vektor

Souřadná soustava



$\varphi(O,A) = \vec{v_A}$

$\varphi(O,B) = \vec{v_B}$



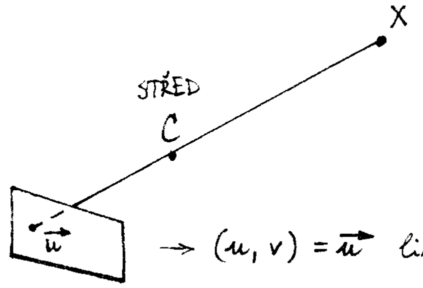
$\big(O, \overbrace{\varphi(O,A), \varphi(O,B)}^{\text{báze}}\big)$

$\vec{b_1}$ $\binom{0}{1}$ $\quad \vec{b_2}$ $\binom{1}{0}$

PROBLÉM:

$(1,0)\cdot(0,1) = 0 \dots \vec{b_1} \perp \vec{b_2}$

Kamera

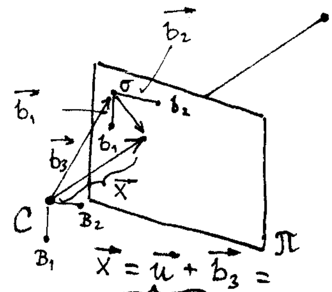


A^3

$\forall (u,v) \rightarrow$ směrový vektor paprsku, kterým se X promítne do $\vec{u}$ v nějaké souřadné soustavě

$\rightarrow (u,v) = \vec{u}$ lineární souř. (indexy pixelů)

$\hookrightarrow \exists$ souřadná soustava v π



a) $\vec{b_1} = \varphi(\sigma, b_1)$

b) $\vec{b_2} = \varphi(\sigma, b_2)$

c) $\vec{b_3} = \varphi(c, \sigma)$

a, b – báze v $\mathbb{R}^2$

a, b, c – c není v π

$(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$ jsou LN báze v $\mathbb{R}^3$

$\vec{u}_{(\vec{b_1}, \vec{b_2})} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$\vec{X} = \vec{u} + \vec{b_3} =$

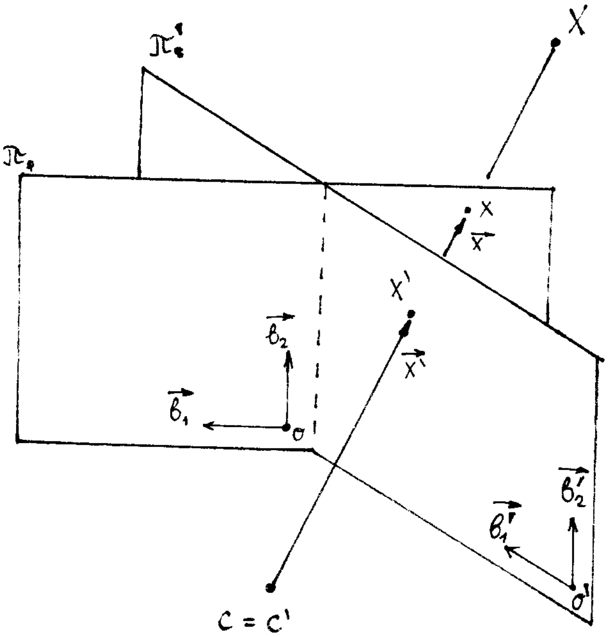
$= \overbrace{u\vec{b_1} + v\vec{b_2}} + 1 \cdot \vec{b_3}$

$\vec{X}_{(\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\sigma, (\vec{b_1}, \vec{b_2})) \xrightarrow{\text{"}+c\text{"}} (c, (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}))$

Nechť $(u,v)^T$ jsou lineární souřadnice bodu v obrazu, pak existuje 3D souřadná soustava s počátkem ve středu promítání ve které $(u,v,1)^T$ jsou souřadnice souřadného vektoru paprsku.

Máme dva obrazy se stejným středem promítání



$\forall$ korespondenci x, x':

$$\left.\begin{aligned}\vec{x} &= \varphi(c, x)\\ \vec{x'} &= \varphi(c', x') = \varphi(c, x')\end{aligned}\right\} \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}: \ \vec{x'} = \alpha \cdot \vec{x}$$

Měříme (u,v) v π a (u',v') v π'

$$(c, (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}))$$
$$(c', (\vec{b_1'}, \vec{b_2'}, \vec{b_3'}))$$

Vztah mezi $\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}u'\\v'\\1\end{pmatrix}$?

$$\vec{x} = u\vec{b_1} + v\vec{b_2} + \vec{b_3}$$
$$\vec{x'} = u'\vec{b_1'} + v'\vec{b_2'} + \vec{b_3'}$$

$$\vec{b_1'} = a_{11}\vec{b_1} + a_{21}\vec{b_2} + a_{31}\vec{b_3}$$
$$\vec{b_2'} = a_{12}\vec{b_1} + a_{22}\vec{b_2} + a_{32}\vec{b_3}$$
$$\vec{b_3'} = a_{13}\vec{b_1} + a_{23}\vec{b_2} + a_{33}\vec{b_3}$$

$$\vec{x'} = u'(a_{11}\vec{b_1} + \dots) + v'(a_{12}\vec{b_1} + \dots) + (a_{13}\vec{b_1} + \dots) =$$
$$= (a_{11}u' + a_{12}v' + a_{13})\vec{b_1} +$$
$$+ (a_{21}u' + a_{22}v' + a_{23})\vec{b_2} + (a_{31}u' + a_{32}v' + a_{33})\vec{b_3}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$\vec{b'_{2_\beta}}$, $\vec{b'_{1_\beta}}$

matice přechodu

$$\vec{x'_\beta} = A\vec{x'_{\beta'}} \longrightarrow \alpha \vec{x_\beta} = A\vec{x'_{\beta'}}$$

vztaženo k bázi β

$$A\vec{x'_{\beta'}} = \alpha\begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u'\\v'\\1\end{pmatrix}$$

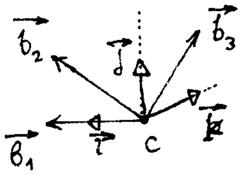
1. Získání meče
   - WBS, homografie

$$\alpha_i\begin{pmatrix}u_i'\\v_i'\\1\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}u_i\\v_i\\1\end{pmatrix}$$

H → matice homografie (vztah mezi obrázky)

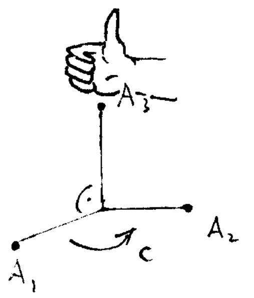
λH, $\lambda \neq 0$ Homografie → 1D prostor regulárních matic

Vektory báze na sebe nemusejí být kolmé



$$(c, \vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$$
$$(c, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\varphi(c, A_1) = \vec{i}$$
$$\varphi(c, A_2) = \vec{j}$$
$$\varphi(c, A_3) = \vec{k}$$



$$\vec{x_\beta} = K x_\gamma \qquad K = (k_{ij})$$

$$\vec{x_\beta} = K \cdot x_\gamma = \begin{pmatrix}\vec{i_\beta}, \vec{j_\beta}, \vec{k_\beta}\end{pmatrix} x_\gamma = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33}\end{pmatrix} x_\gamma$$

$$\vec{i} = k_{11}\cdot\vec{b_1}$$
$$\vec{j} = k_{12}\vec{b_1} + k_{22}\vec{b_2}$$
$$\vec{k} = k_{13}\vec{b_1} + k_{23}\vec{b_2} + k_{33}\vec{b_3}$$

$$\begin{tikzcd} \beta \arrow[r, "\text{rotace kamery}"] \arrow[d, "K^{-1}"] & \beta' \arrow[d, "K^{-1}"] \\ \gamma \arrow[r, "\gamma \cdot \gamma' \text{ orto} \Rightarrow R"] & \gamma \end{tikzcd}$$

$$A = KRK^{-1}, \quad K^{-1}AK = R$$

$$\vec{y_\beta} = A y_{\beta'}$$
$$\vec{x_\beta} = K x_\gamma \qquad x_\gamma = K^{-1}\vec{x_\beta}$$
$$x_{\gamma'} = K^{-1}\vec{x_{\beta'}}$$

Matice homografie H

hod 3 : $\alpha \cdot \vec{X'} = H \cdot \vec{X}$, $x = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$, $x' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

hod $H = 2$: $H = (h_1, h_2, h_3)$ – vektory jsou lineárně závislé

$$H \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = u \cdot h_1 + v \cdot h_2 + a_2 h_2 + a_3 h_3 = (u + a_2) h_2 + (v + a_3) \cdot h_3$$ – body leží na přímce

$\exists H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, hod $H = 3$

$\forall x, x'$ korespondující $\exists \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \cdot x' = H \cdot x$, $\alpha \neq 0$

$(h_3^T x) u' = h_1^T x$

$(h_3^T x) v' = h_2^T x$

$u'(h_2^T x) = v'(h_1^T x)$ – je to lineární kombinace předchozích

$$\begin{pmatrix} \alpha u' \\ \alpha v' \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \\ h_3^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha u' = h_1^T x$

$\alpha \cdot v' = h_2^T x$

$\alpha = h_3^T x$

$\left.\begin{matrix} a = b \\ c = d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ad = bc$

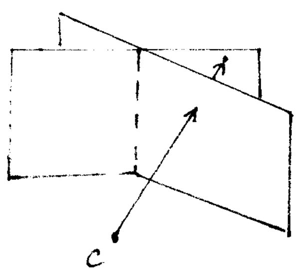
$x^T h_1 \quad - (u' x^T) h_3 = 0$

$x^T h_2 \quad - (v' x^T) h_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} u & v & 1 & 0 & 0 & 0 & -u'u & -u'v & -u' \\ 0 & 0 & 0 & u & v & 1 & -v'u & -v'v & -v' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ \vdots \\ h_{33} \end{pmatrix} = 0$$

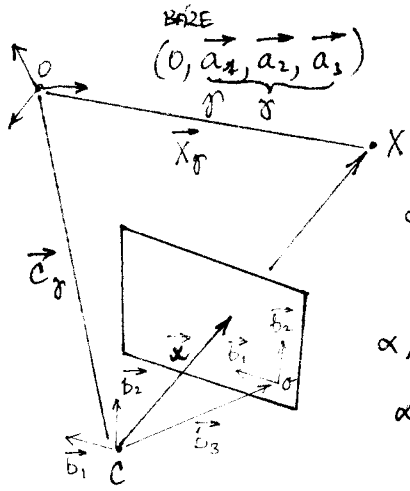
$$A \cdot h = 0$$

Rotující kamera



Model promítání

$X \in A^3 \xrightarrow{\text{promítání}} x \in A^2$



$\alpha x_\gamma = X_\gamma - c_\gamma$

$x_\gamma = A^{-1} x_\beta$

$\alpha A^{-1} x_\beta = X_\gamma - c_\gamma$

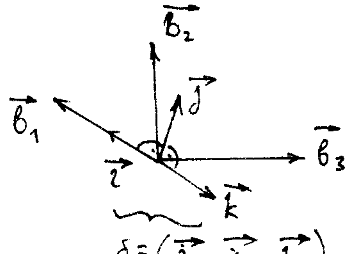
$\alpha x_\beta = A \, (X_\gamma - c_\gamma)$

$(c, \underbrace{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3}_{\beta})$ $\quad \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = x_\beta$

$$\alpha x_\beta = \underbrace{(A \mid -A c_\gamma)}_{P \in \mathbb{R}^{3\times 4}} \begin{pmatrix} X_\gamma \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \mathbb{R}^{4\times 1}$$

$\uparrow$ matice kamery

γ – ortonormální báze



$\delta = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\delta \to \beta$

$$x_\beta = K x_\delta = \begin{array}{c} \vec{i}_\beta \ \vec{j}_\beta \quad \leftarrow \text{obecný vektor} \\ \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix} \end{array} x_\delta$$

$\gamma \to \delta \to \beta$

$x_\beta = K x_\gamma$

$x_\delta = R x_\gamma$ $\leftarrow$ ROTACE

$R^T \cdot R = E$

$$\alpha x_\beta = (KR \mid -KRC) \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

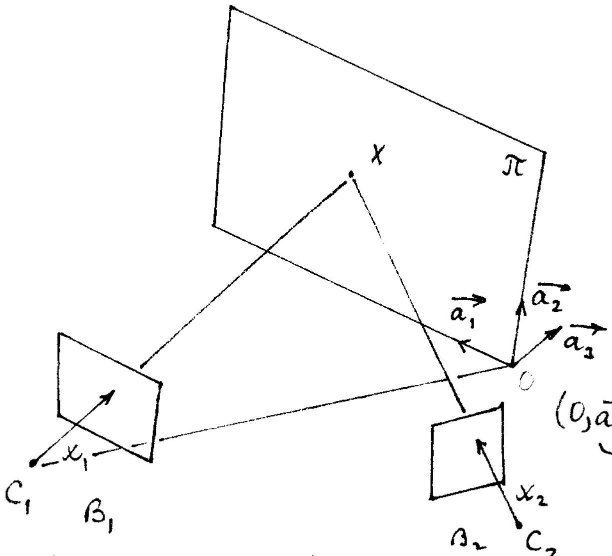
S rovinou focenou odkudkoli, lze dělat to samé jako se scénou focenou ze středu.

$$\alpha_1 x_1 = P_1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 x_2 = P_2 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\forall X$ o kterých uvažujeme leží ve stejné rovině π, zvolíme souř. soustavu se středem v π a $\vec{a_1}, \vec{a_2}$ generujícími π.

$$x_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\underbrace{(O, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})}_{\gamma} \qquad X_\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - souřadnice } X \text{ v rovině}$$

$$\alpha_1 x_1 = P_1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = (p_1^1 \; p_2^1 \; p_3^1 \; p_4^1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x p_1^1 + y p_2^1 + 0 \cdot p_3^1 + 1 \cdot p_4^1 = \overbrace{(p_1^1 \; p_2^1 \; p_4^1)}^{\text{hod } 3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = H_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 x_2 = P_2 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = (\underbrace{p_1^2 \; p_2^2 \; p_4^2}_{\text{hod } 3}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = (A \mid -AC)$$

$$X_{\beta_1} = (K_1, K_2, K_3) \; x_\gamma$$

$$\underbrace{(a_{1_\beta}, a_{2_\beta}, -c_{1_\beta})}_{\text{LN}}$$

$$\alpha_1 x_1 = H_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

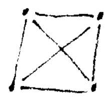
$$\alpha_2 x_2 = H_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 H_1^{-1} \cdot x_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_2 H_2^{-1} x_2$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 = H_2 H_1^{-1} x_1$$

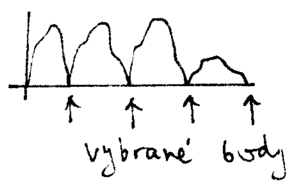
$$\alpha x_2 = H x_1$$

Výběr 4 bodů



čtveřice $\rightarrow H$

chyba



27. 3. 2006

$$\alpha x' = H x$$

$$Ah = 0$$

$$\text{hod } A = 8$$

nepřímá měření $\rightarrow$ $n > 4$, hod $A = 9$ $\qquad A \in \mathbb{R}^{2n \times 9}$ $\qquad$ hod $A \leq 9$

5 bodů $\quad A \in \mathbb{R}^{10 \times 9}$ $\quad$ hod $A = 9 \Rightarrow h = 0$

Aproximační úloha

$$Ah \Rightarrow 0 \longrightarrow \bar{A} \cdot h = 0$$

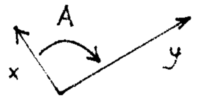
hod $A = 9 \Rightarrow h = 0$ $\qquad$ hod $\bar{A} = 8$ $\qquad$ $\bar{A}$ „blízko" k A

Norma matice indukovaná vektorovou normou

$x \in \mathbb{R}^n : \|x\|$ . . velikost $\quad x^T x = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

A je lineární zobrazení

vektory na „hyperkouli"



$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|=1} \|Ax\|$$

...aproximační úloha pokračuje:

$(A - \bar{A})x = 0$, hledáme takovou $\bar{A}$, aby se výsledek blížil co nejvíce 0.

$$\bar{A} = \arg \min_{\text{hod } B = k} \underbrace{\left(\max_{\|x\|=1} \|(A-B)x\| \right)}_{\|A-B\|} = \arg \min_{\text{hod } B = k} \|A - B\| \qquad (k = 8,\ \text{hod } A = 9)$$

Jak to řešit?

Singulární rozklad matice

(Singular Value Decomposition – S.V.D)

Matlab: >> svd(A)

Literatura: Golub & Van Loan: Matrix computation

Krajník: Maticový počet

Věta: (Krajník, 7.6)

A je matice $\in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak existuje ortogonální matice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a ortogonální matice $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální matice $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tak, že

$$A = UDV^T,$$

kde

$$D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & & \sigma_{nn} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{s} \quad \sigma_{11} \geq \sigma_{22} \geq \ldots \geq \sigma_{nn} \geq 0$$

$V^T V = E \quad V^{-1} = V^T$

$U^T U = E \quad U^{-1} = U^T$

ortogonální matice – vektory stejné mají násobek 1, různé vektory mají součin 0.

Příklad $m = n = 2$, hod $A = 2$

$$y = A \cdot x$$
$$y = UDV^T x$$
$$U^T y = D \cdot V^T x$$
$$y' = D \cdot x'$$

Dovoluje to konstrukci matice $\bar{A}$

V^T vlastní vektory $A^T A$

V^T musí být báze $\mathbb{R}^n$

Př.: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad A = UDV^T$ $\qquad$ >> $[U, D, V] = svd(A)$

$m > n$

$$\underset{n}{m\boxed{A}} = \underset{m}{m\boxed{U}}\ \underset{n}{\boxed{D}}\ \underset{n}{n\boxed{V^T}}$$

- tento rozklad nám hodně říká o A (např.: jaká je norma)
- numerická stabilita matice D

např.: $\begin{pmatrix} 10^5 & & \\ & 2 & \\ & & 0{,}01 \\ & & & 10^{-6} \end{pmatrix}$

VYŘÍZNU ZAJÍMAVOU ČÁST

$A = UDV^T$ $\qquad UDV^T \xrightarrow{k}$

$\bar{A} = U\bar{D}V^T$

$$D = \begin{pmatrix} \delta_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & \delta_{nn} \end{pmatrix} \to \bar{D} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{kk} & \\ & & & \boxed{\ddots} \end{pmatrix}$$

číslo podmíněnosti (condition number) $\dfrac{\sigma_{11}}{\sigma_{nn}} = \mathcal{K}$ (minimálně 1)

$A h = 0$

$$UDV^T h = U\begin{pmatrix} \delta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{77} & \\ & & & 0 \ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_8^T \\ v_9^T \end{pmatrix} h = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{77} & \\ & & & 0 \ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^T h \\ \vdots \\ v_8^T h \\ v_9^T h \end{pmatrix} = 0, \quad h \neq 0 \Rightarrow \|h\| = 1$$

h musí být kolmý na v_i^T

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} v_1^T h \\ \vdots \\ \delta_{77} v_7^T h \\ 0\ v_8^T h \\ 0\ v_9^T h \end{pmatrix} = 0 \ \dots\ h = a_8 v_8 + a_9 v_9$$

$\bar{A} = U\bar{D}V^T$

$\bar{A} \cdot h = 0, \ h =$

$$\frac{\delta_{11}}{\delta_{nn}} \ ; \ \frac{\delta_{nn}}{\delta_{n-1}\sigma_{n-1}}$$

$$\cdot U^{-1} /\ 0 = U\begin{pmatrix} \delta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{n-1,n-1} & \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{n-1}^T \\ v_{nn}^T \end{pmatrix} h$$

$$0 = \begin{pmatrix} \delta_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \delta_{n-1,n-1} & \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} h = \bar{D}\begin{pmatrix} v_1^T h \\ \vdots \\ v_n^T h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} v_1^T h \\ \vdots \\ \delta_{n-1} v_{n-1}^T h \\ 0 \cdot v_n^T h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow h \perp (v_1, \dots, v_{n-1})$$

$h = \alpha \cdot v_n$

$\alpha = 1: \ \boxed{h = v_n}$

Otázky:

1. Existence SVD
2. Oprávněnost konstrukce $\bar{A}$

Vlastnosti normy matice

$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad R^T R = E$ $\qquad \|RA\| = \|A\|$; $\quad \max\limits_{\|x\|=1} \|\underbrace{RAx}_{y}\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$, $\quad \sqrt{y^T y}$

$y^T y = x^T A^T R^T R A x = x^T A^T A x$; $\quad \|UDV^T\| = \|DV^T\|$ $\quad U^T U = E$

$\|UDV^T\| \leq \max(D) \quad (= \delta_{11})$

$$\|UDV^T\| = \|DV^T\|; \quad \|DV^T x\| = (x^T V D^T D V^T x)^{\frac{1}{2}} = (x^T V D^2 V^T x)^{\frac{1}{2}} = \left(x^T \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{ii}^2 (v_i \cdot v_i^T)\right) x\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$D^T = D$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{11}^2 \underbrace{(x^T v_i)}_{x^T \to v_i} \underbrace{(v_i^T x)}_{v_i^T \to x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{ii}^2 (v_i^T x)^3\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$\underbrace{x^T v_i}_{a} = \underbrace{v_i^T x}_{a^T}$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{11}^2 (v_i^T x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{11} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} (v_i^T x)^2 \right)^{1/2}}_{\|x\|} \underset{\|x\|=1}{=} \sigma_{11}$$

Vhodná aproximace matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s hodností r (hod $r \leq \min(m,n)$) maticí $\bar{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s hodností $k \leq r$. Hledáme:

$$\bar{A} = \min_{\substack{B \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \text{hod } B = k}} \underbrace{\max_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ \|y\|=1}} \|Ay - By\|}_{\substack{\text{norma matice } (A-B) \\ \|A-B\|}} = \min_{\substack{B \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \text{hod } B = k}} \|A - B\|$$

velikost vektoru

– hledáme minimální odchylku ze všech matic

$\bar{A}$ lze snadno získat z SVD matice A.

Věta: Buď $A = UDV^T$ SVD rozklad matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A_k = \min_{\substack{B \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \text{hod } B = k}} \|A - B\| \text{ je dáno předpisem } A_k = UD_kV^T,$$

$$D_k = \operatorname{diag}([\sigma_{11}, \sigma_{22}, \ldots, \sigma_{kk}, 0, \ldots])$$

Důkaz: L1) $R^TR = E \Rightarrow \|RA\| = \|A\|$

$$D: \|RA\| = \max_{\|x\|=1} \|RAx\| = \max_{\|x\|=1} (x^TA^T \underbrace{R^TR}_{E} Ax)^{\frac{1}{2}} = \max_{\|x\|=1} (x^TA^TAx)^{1/2} = \|A\|$$

L2) $R^TR = E \Rightarrow \|AR\| = \|A\|$

$$D: \|AR\| = \max_{\|x\|=1} \|A\underbrace{Rx}_{y}\| = \max_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|$$

$(R$ - regulární $x = R^{-1}y)$

$$\|y\| = \|Rx\| = (x^TR^TRx)^{\frac{1}{2}} = (x^Tx)^{\frac{1}{2}} = \|x\| = 1$$

L3) $\|A - A_k\| = \sigma_{k+1} \quad (= \sigma_{k+1,k+1})$

$$D: \|A - A_k\| = \|UDV^T - UD_kV^T\| = \|U(D-D_k)V^T\| = \|D - D_k\| =$$

$$= \max_{\|x\|=1} \left\| \begin{pmatrix} \underbrace{\sigma_1 - \sigma_1}_{0} & & & & \\ & \underbrace{\sigma_2 - \sigma_2}_{0} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \underbrace{\sigma_k - \sigma_k}_{0} & \\ & & & & \sigma_{k+1} \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} x \right\| = \max_{\|x\|=1} (\sigma_{k+1}^2 x_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_n^2 x_n^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \max_{\|x\|=1} (0 \cdot x_1^2 + \ldots + \sigma_{k+1}^2 x_{k+1}^2 + \ldots)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{\|x\|=1} (\sigma_{k+1}^2 x_1^2 + \ldots + \sigma_{k+1}^2 x_n^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \max_{\|x\|=1} \sigma_{k+1} \underbrace{(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}}_{1} = \sigma_{k+1}$$

$$\|(A - A_k) v_{k+1}\| = \|(D - D_k) V^T v_{k+1}\| = \left\| (D - D_k) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\| = \sigma_{k+1}$$

$$V = (v_1, \ldots, v_{k+1}, \ldots, v_n) \qquad V^T = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{k+1}^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} v_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Důkaz věty: Sporem. Předpokládejme, že existuje $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s hodností k, tak že $\|A - B\| < \|A - A_k\| = \sigma_{k+1}$

$\operatorname{hod} B = k \Rightarrow \overbrace{\text{nulový prostor } B}^{N}$ má dimenzi $n - k$ $\begin{cases} k = n \Rightarrow A_k = A \\ k < n \Rightarrow \dim N > 0 \Rightarrow \exists x \in N : \|x\| = 1 \end{cases}$

$(Bx = 0$

1. Pro všechny $x \in N$, $\|x\| = 1$ platí $\|Ax\| = \|(A - B)x\| = \|Ax - \underbrace{Bx}_{\substack{0 \\ x \in N}}\| \leq \|A - B\| \cdot \underbrace{\|x\|}_{1} =$
$= \|A - B\| \underset{\substack{\text{Podle} \\ \text{předpokladu}}}{<} \sigma_{k+1}$

$\left(\max_{\|y\|=1} \|(A-B)y\| \geq \|(A-B)x\| \right)$

2. Pro všechny $x \in M = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{k+1})$ takové, že $\|x\| = 1$ platí
$\|Ax\| = \|UDV^T x\| = \left\|D^T \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{k+1}^T \end{pmatrix} x \right\| = \left\| D \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{k+1}^T \end{pmatrix} \sum_{i=1}^{k+1} a_i v_i \right\| = \left\| D \cdot \left(a_1 V^T v_1 + \dots + a_{k+1} V^T v_{k+1} \right) \right\| =$

$x \in M \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k+1} a_i v_i$

$= \left\| D \cdot \left(a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + a_{k+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \right) \right\| = \left\| D \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{k+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left(\sigma_1^2 a_1^2 + \dots \sigma_{k+1}^2 a_{k+1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$

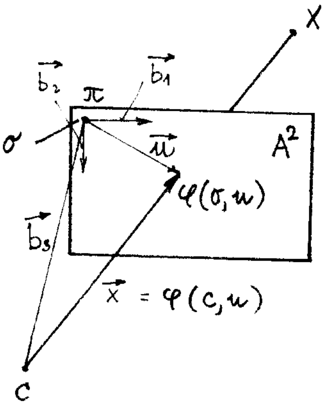
$= \geq \sigma_{k+1} \left(\underbrace{a_1^2 + \dots + a_{k+1}^2}_{\|x\| = 1} \right)^{1/2} = \sigma_{k+1}$

$M \cap N \neq \{\vec{o}\}$ $\left. \begin{matrix} \dim M = k + 1 \\ \dim N = n - k \end{matrix} \right\} k + 1 + (n - k) = n + 1 > n \Rightarrow \exists x \in M, x \in N$

$\|x\| = 1 : \left. \begin{matrix} \|Ax\| < \sigma_{k+1} \,\& \\ \& \, \|Ax\| \geq \sigma_{k+1} \end{matrix} \right\}$ SPOR

Reálná projektivní rovina

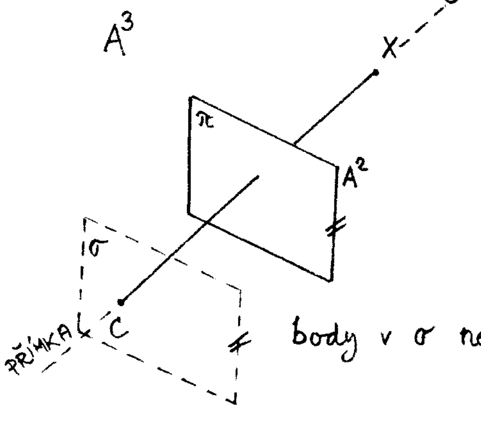
Souřadná soustava kamery



$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = u_1 \vec{b_1} + u_2 \vec{b_2}$

$\vec{x} = u_1 \vec{b_1} + u_2 \vec{b_2} + \vec{b_3}$

$c, (\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3})$

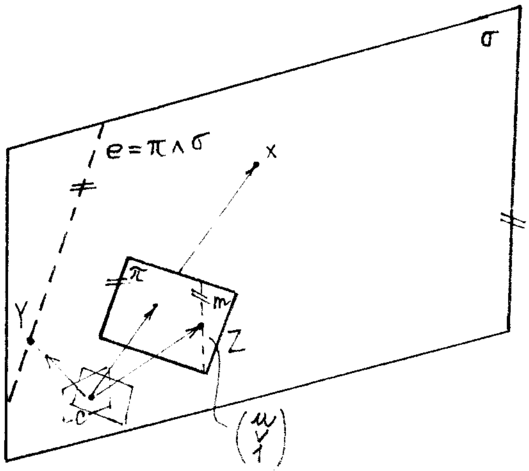


$x \to \underbrace{cx}_{e} \to \underbrace{cx}_{(c \vee x)} \wedge \pi = u$

PRŮSEČÍK

↳ spojení

body v σ nemají obraz $\begin{cases} z = c & c \vee z \text{ není jedna přímka} \\ z \neq c & \text{existuje právě jedna přímka } c \vee z, \text{ ale } c \vee z \text{ neprotíná } \pi \end{cases}$ ↳ Lze odstranit „vylepšením" A^2

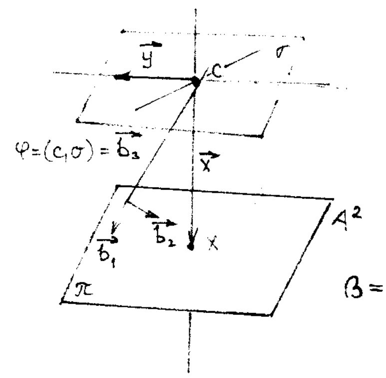


- body na e (např.: Y) nemají obraz v π
- body na m (např. Z) nemají předobraz v σ

$m = \delta \wedge \pi$, kde δ je rovina rovnoběžná s σ a obsahuje c

$e = \rho \wedge \sigma$, kde $\rho \parallel \pi$ a obsahuje c

A^3



$A^2 \to$ je v $A^3 \to$ vezmeme $c \in A^3$, $c \notin A^2$,

$x \in A^2 \to c \vee x$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}_B$ ... vlastní bod

$\vec{y} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}_B$ ... nevlastní bod (nulová třetí souřadnice)

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

$(u, v) \to \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$x \equiv \langle \vec{x} \rangle$

Lineární obal $\vec{x} \neq 0$

$\lambda \neq 0$ $\vec{x}$ a $\vec{y}$

$\vec{y} = \lambda \vec{x}$

reprezentují stejný bod neboť zaměřují stejnou přímku skrz c

$\downarrow$

bod $\equiv$ 1D podprostor $\mathbb{R}^3$

Reálná projektivní rovina $\equiv$ systém podprostorů v $\mathbb{R}^3$ a operace (spojení $\vee$, průsečík $\wedge$).

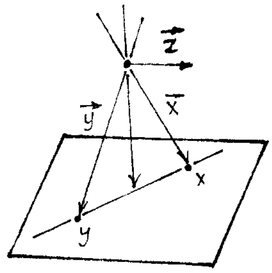
Bod $\equiv$ 1D podprostor

Přímka 2D podprostor $\equiv$

$\equiv \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \longrightarrow$ ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^3$ $\exists!$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^{\perp} = \{ \vec{z} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{z} \cdot \vec{x} = \vec{z} \cdot \vec{y} = 0 \}$

1D podprostor $\mathbb{R}^3$ $(3 - 2 = 1)$



Množina všech nevlastních bodů tvoří

Vzorce pro operace spojení a průsečík

Spojení: $\vec{x}, \vec{y}$ reprezentují dva různé body P^2 (reálná projektivní rovina),

$\overline{P} \to \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}_{2D} \to \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^{\perp}}_{1D} = \langle \vec{z} \rangle$, $\vec{z} = \left\langle \begin{matrix} \vec{z} \cdot \vec{x} = 0 \\ \vec{z} \cdot \vec{y} = 0 \end{matrix} \right\} \vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$

Průsečík: $\vec{e}, \vec{m}$ reprezentují dvě různé přímky v $P^2 \to \langle \vec{e}, \vec{m} \rangle \to \langle \vec{e}, \vec{m} \rangle^{\perp} = \langle \vec{x} \rangle$

$\vec{x} = \left\langle \begin{matrix} \vec{e} \cdot \vec{x} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{x} = 0 \end{matrix} \right\} \vec{x} = \vec{e} \times \vec{m}$

Homografie projektivní roviny

$$\alpha \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad w', w \text{ může být } 0$$

$$\alpha x' = H x$$
$$\Downarrow$$
$$x' \times (\alpha x') = x' \times (H x)$$
$$0 = x' \times (Hx)$$

$$\alpha \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 0 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \text{ – nelze spočítat } \alpha$$

$$\alpha\, 0 = h_3^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha u' = h_1^T x \quad / \cdot v'$$
$$\alpha v' = h_2^T x \quad / \cdot u'$$

$$\underbrace{\begin{aligned} v' h_1^T x - u' h_2^T x &= 0 \\ h_3^T x &= 0 \end{aligned}}_{\alpha w' = h_3^T x}$$

$$x' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} \qquad x' \times y = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -w' & v' \\ w' & 0 & -u' \\ -v' & u' & 0 \end{pmatrix}}_{[x']_\times} \cdot y$$

$$0 = [x']_\times H x$$

Homografie pro přímky

x, y reprezentují body $\boxed{\exists \alpha \neq 0 \;\; \alpha y = Hx}$, mějme různé body x_1, x_2 a jimi procházející přímku $\ell : \begin{cases} \ell^T x_1 = 0 \\ \ell^T x_2 = 0 \end{cases}$

y_1, y_2 jsou různé body, protože H je regulární a $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, $\begin{matrix} \alpha_1 y_1 = H x_1 \\ \alpha_2 y_2 = H x_2 \end{matrix}$, takže

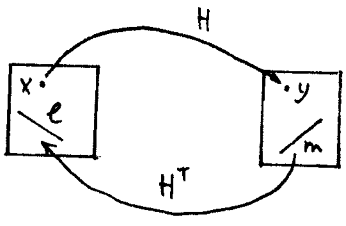
$\exists !$ přímka $m : \begin{matrix} m^T y_1 = 0 \\ m^T y_2 = 0 \end{matrix}$.

$$0 = m^T(\alpha_1 y_1) = (m^T \cdot H) \cdot x_1$$
$$0 = m^T(\alpha_2 y_2) = (m^T H) \cdot x_2$$

Protože x_1 LN x_2 $\Rightarrow m \in \langle H x_1, H x_2 \rangle^\perp$

$(m^T H)^T \in \langle x_1, x_2 \rangle^\perp$ a $\ell \in \langle x_1, x_2 \rangle^\perp$, $\begin{matrix} (m^T \cdot H)^T \neq 0 \\ \ell \neq 0 \end{matrix}$

$$\exists \lambda \neq 0 \quad \boxed{\lambda \ell = H^T m}$$



Opakování:

Lin. prostor $\mathbb{R}^n$

Lin. podprostor $A \subseteq \mathbb{R}^n$: $(\forall a, b \in A)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\alpha a + \beta b \in A)$

Lin. obal $a_1, \ldots, a_n$ je nejmenší lin. podprostor je obsahující. Značíme $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$

Báze A je lib. nejmenší množina vektorů $a_1 \ldots a_k$, tak že $\langle a_1 \ldots a_k \rangle = A$, $k = \dim A$

Báze v matici $\langle [a_1, \ldots, a_k] \cdot M \rangle = \langle [a_1 \ldots a_k] \rangle$

$$n \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}}_{k} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{k} \right\} k$$

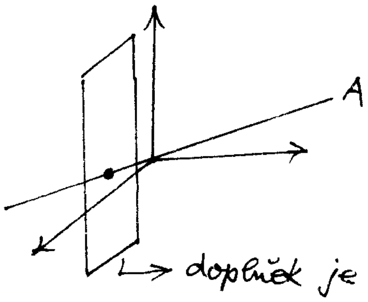
Speciální případy lineárních podprostorů $\mathbb{R}^n$:

- 0-dimenzionální podprostor = počátek $\{0\}$
- 1-dim. podprostor = přímky
- $(n-1)$-dim. podprostor = nadroviny
- n-dim. podprostor = $\mathbb{R}^n$

Kolmost podprostorů : $A \perp B$ když $(a \in A)(b \in B)\underbrace{(a \perp b)}_{a^T \cdot b = 0,\ a \cdot b = 0}$

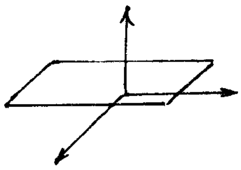
Ortogonální doplněk A je největší podprostor $\mathbb{R}^n$ kolmý na A. Značíme $A^\perp$.
Dán jednoznačně

Př.: $n = 3$, $\mathbb{R}^3$



↳ doplněk je rovina kolmá na A.

$(B \subseteq A) \Leftrightarrow (A^\perp \subseteq B^\perp)$



Zavedu operace – průsečík $A \wedge B = A \cap B$
– spojení $A \vee B = \langle A, B \rangle$ – nejmenší l. podprostor ve kterém jsou podprostory A, B obsaženy

Platí : $(A \wedge B)^\perp = A^\perp \vee B^\perp$
$(A \vee B)^\perp = A^\perp \wedge B^\perp$
$(A^\perp \quad B^\perp)^\perp =$

Platí : $A^{\perp\perp} = A$

A je incidentní s B (značíme $A \circ B$) když $A \wedge B \neq \{0\}$

$(A \circ B) \Leftrightarrow$ (báze A a báze B jsou lineárně závislé), tj. $[\underbrace{a_1 \dots a_k}_{\text{báze } A}, \underbrace{b_1 \dots b_k}_{\text{báze } B}]$ nemá plnou hodnost.

Dualita : (platí)
libovolný pravdivý výrok zůstane pravdivý, když nahradím výskyt symbolů $A, \wedge, \vee, \subseteq$ po řadě $A^\perp, \vee, \wedge, \supseteq$.

$A^\perp \vee B^\perp = (A \wedge B)^\perp$
$(A \wedge B)^\perp = A^\perp \vee B^\perp$

Příklady v $\mathbb{R}^3$

2 přímky $\langle a \rangle, \langle b \rangle$
$\langle a \rangle \vee \langle b \rangle = \langle a, b \rangle$
$\langle a \rangle \wedge \langle b \rangle = (\langle a \rangle^\perp \vee \langle b \rangle^\perp)^\perp$

2 roviny $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle$
$\langle a, b \rangle \vee \langle c, d \rangle = \langle a, b, c, d \rangle$ (různé roviny $\Rightarrow \mathbb{R}^3$) (lin. záv. roviny – to samé)

přímka $\langle a \rangle$, rovina $\langle b, c \rangle$
$\langle a \rangle \vee \langle b, c \rangle = \langle a, b, c \rangle = \langle b, c \rangle$ (přímka leží v rovině $\Rightarrow$ rovina) (neleží $\Rightarrow \mathbb{R}^3$)

V $\mathbb{R}^3$ rovina $\langle a, b \rangle$ ... v počítači matice $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$

$$\langle a, b \rangle^\perp = \left\{ x \;\middle|\; x^T \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \langle a \times b \rangle$$

(Vektorový součin $a \times b$: $a^\perp (a \times b) = b^\perp (a \times b) = 0$)

Lineární zobrazení podprostorů v $\mathbb{R}^n$

Lin. zobrazení bodu $x \in \mathbb{R}^n$ je $x' = H(x) = H \cdot x$

$$n\{(\vdots) \overset{n}{=} \{(\underbrace{\quad\quad}_{n})(\;)\}n$$

$H(A) = \{Ha \mid a \in A\}$ je lineární podprostor.

$\{a_i\}$ lin. závislé $\Leftrightarrow$

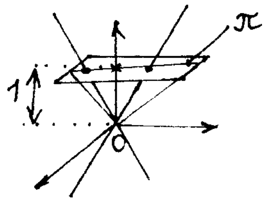
Pozor: $[H(A)]^\perp \neq H(A^\perp)$
$= H^{-T}(A^\perp)$

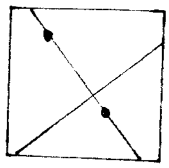
Důkaz:

$$[H(A)]^\perp = \{b \in \mathbb{R}^n \mid b^T H a = 0 \ \forall a \in A\} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{substituce} \\ b' = b^T H \\ b = H^{-T} b' \end{matrix} \right| = \{H^{-T} b' \mid b'^T a = 0 \ \forall a \in A\} = H^{-T}(A^\perp)$$

Do $\mathbb{R}^n$ vložíme nadrovinu π, která <u>neprochází</u> počátkem O.





Zmatení názorů: přímka v $\mathbb{R}^n$ x přímka v π

Přímky v $\mathbb{R}^n \parallel \pi$ nemají průnik s π

Roviny v $\mathbb{R}^n \parallel \pi$ nemají průnik s π

$\longrightarrow$ nevlastní body, přímky v π

Je zvykem klást $\pi \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 1\}$

Bod $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ v π odpovídá $\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$ v $\mathbb{R}^3$

Báze $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$ jsou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \lambda$ homogenní souřadnice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \pi$

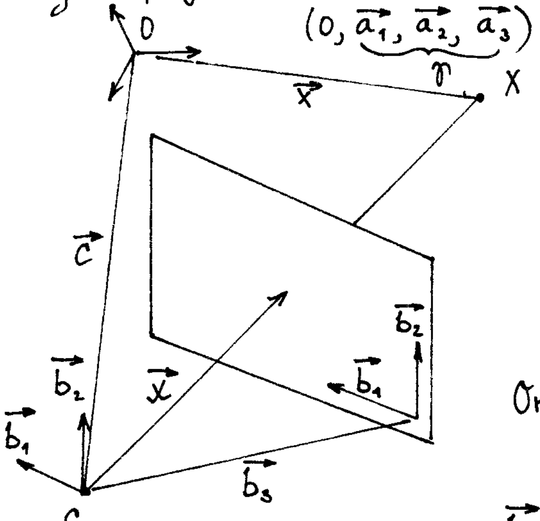
$\forall \lambda \neq 0$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \lambda \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

REKONSTRUKCE 3D OBRAZŮ

Matice kamery – projekční matice

$(0, \underbrace{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}}_{\gamma})$ – ortonormální báze γ



$(c, \underbrace{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}}_{\mathcal{B}})$

$$\alpha \cdot \vec{x_\gamma} = \vec{X_\gamma} - \vec{c_\gamma}$$

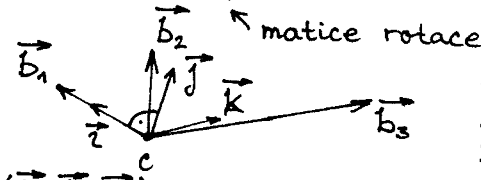
$$\vec{x_\gamma} = A \cdot x_{\mathcal{B}}, \quad A \in \mathbb{R}^{3\times3} \text{ regulární}$$

$$\alpha A^{-1} x_{\mathcal{B}} = \vec{X_\gamma} - \vec{C_\gamma}$$

$$\alpha x_{\mathcal{B}} = (A \mid -AC_\gamma) \begin{pmatrix} X_\gamma \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortonormální báze spojená s kamerou

$A = KR$ ← matice rotace



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ortonormální báze

$$\vec{i_{\mathcal{B}}} = k_{11} \vec{b_1} + 0 \vec{b_2} + 0 \vec{b_3}$$

$$\vec{j_{\mathcal{B}}} = k_{12} \cdot \vec{b_1} + k_{22} \vec{b_2} + 0 \cdot \vec{b_3}$$

$$\vec{k_{\mathcal{B}}} = k_{13} \cdot \vec{b_1} + k_{23} \vec{b_2} + k_{33} \vec{b_3}$$

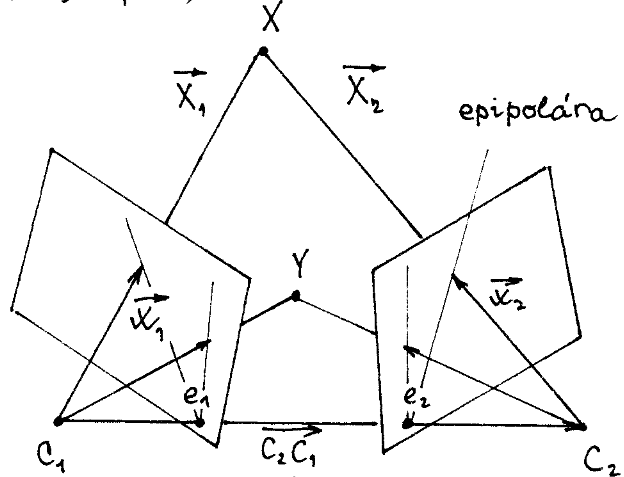
$$x_\beta = K \cdot x_\delta$$

$$x_\beta = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix} x_\delta$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{i_\beta} & \vec{j_\beta} & \vec{k_\beta} \end{array}$$

Epipolární geometrie

$(0, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$



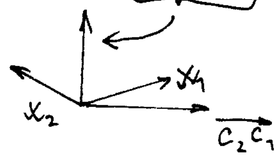
Body c_1, c_2, x jsou v rovině

Vektory $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \overrightarrow{C_2C_1}$ jsou lineárně závislé

$\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ pro $X \neq C_1, C_2$

$$\vec{X_1}, \vec{X_2}, \overrightarrow{C_2C_1} \text{ LZ} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \overrightarrow{C_2C_1} \text{ LZ}}$$

$$\vec{x_1} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{C_2C_1} \times \vec{x_2}}) = 0$$



$$\overrightarrow{C_2C_1} \times x_2 = [\overrightarrow{C_2C_1}]_\times \cdot x_2$$

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right]_\times = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

matice kamery

$$P_1 = K_1 (R_1 | -R_1 C_1) \qquad P_2 = K_2 (R_2 | -R_2 C_2)$$

$$\alpha_1 x_1 = P_1 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 x_2 = P_2 \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x_1} \cdot (\overrightarrow{C_2C_1} \times x_2) = 0$$

$$\alpha_1 x_{1_{\beta_1}} = K_1 (R_1 | -R_1 C_{1\gamma}) \begin{pmatrix} X_\gamma \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_2 x_{2_{\beta_2}} = K_2 (R_2 | -R_2 C_{2\gamma}) \begin{pmatrix} X_\gamma \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 \underbrace{R_1^{-1} K_1^{-1} x_{1_{\beta_1}}}_{X_{1\gamma}} = X_\gamma - C_{1\gamma} \qquad \alpha_2 \underbrace{R_2^{-1} K_2^{-1} x_{2_{\beta_2}}}_{X_{2\gamma}} = X_\gamma - C_{2\gamma}$$

MÍSTO $\overrightarrow{C_2C_{1\gamma}}$ PSÁT $C_{2\gamma} - C_{1\gamma}$

$$\vec{x_1} \cdot (\overrightarrow{C_2C_1} \times x_2) = 0 \equiv X_{1\gamma}^T [\overrightarrow{C_2C_{1\gamma}}]_\times X_{2\gamma} = 0 \rightarrow (R_1^{-1} K_1^{-1} x_{1_{\beta_1}})^T [\overrightarrow{C_2C_{1\gamma}}]_\times R_2^{-1} K_2^{-1} x_{2_{\beta_2}} = 0$$

$$x_{1_{\beta_1}}^T \underbrace{K_1^{-T} R_1^{-T} [\overrightarrow{C_2C_{1\gamma}}]_\times R_2^{-1} K_2^{-1}}_{F\text{... fundamentální matice}} x_{2_{\beta_2}} = 0$$

zkráceně: $x_1^T F x_2 = 0$

Zjednodušení: souřadná soustava se ztotožní se kartézskou soustavou první kamery

$$\left.\begin{array}{l} \text{souřadná soustava se ztotožní se kartézskou soustavou první kamery} \\ \underbrace{(0, \vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})}_{\gamma} = \underbrace{(c_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}_{\delta_1} \end{array}\right\} \Rightarrow *$$

$$* \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_{1\gamma} = 0 \\ R_1 = I \end{array}\right\} \Rightarrow x_{1_{\beta_1}} K_1^{-T} [C_{2\gamma}]_\times R_2^{-1} K_2^{-1} x_{2_{\beta_2}} = 0$$

Hodnost F $\quad F = K_1^{-1}[C_{2\beta}]_\times R_2^{-1} K_2^{-1}$

$$\text{hod } F = \text{hod } [C_{2\beta}]_\times$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cb + bc \\ ca - ac \\ -ba + ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(a\ b\ c)\left(- // - \right) = \qquad = (0\ 0\ 0)$$

$$\text{hod}([Z]_\times) = 2 \quad \text{pro} \quad Z \neq 0$$

$$\underbrace{x_1^T \cdot F}_{} \cdot x_2 = 0, \qquad \overbrace{F \cdot x_2}^{e_1}$$

$$e_2^T \cdot x_2 = 0$$

$$x_1^T \cdot e_1 = 0$$

$$F e_2 = 0$$

$$e_1^T F = 0$$

---

e_2 – EPIPÓL … obraz C_1 v kameře 2

e_1 … obraz C_2 v kameře 1

$$F = K_1^{-1}[C_{2\beta}] R_2^{-1} K_2^{-1}$$

$$F \cdot \underbrace{K_2 R_2 C_{2\beta}}_{=\alpha e_2,\ \alpha \neq 0} = K_1^{-1}[C_{2\beta}]_\times R_2^{-1} K_2^{-1} K_2 R_2 C_{2\beta} =$$

$$= K_1^{-1}[C_{2\beta}]_\times C_{2\beta} = K_1^{-1} 0 = 0$$

Projekce C_1 do C_2

$$P_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= C_{1\beta}} = K_2 (R_2 | -R_2 C_{2\beta}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -K_2 R_2 C_{2\beta}$$

Výpočet F

$$x_i^T F x_i' = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{indexuje meče}$$

$x_1 \to x$

$x_2 \to x'$

$$(u\ v\ 1)\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overbrace{u u' \quad u v' \quad u}^{u\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix}^T} \quad \overbrace{v u' \quad v v' \quad v}^{v\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{pmatrix}^T} \quad \overbrace{u' \quad v' \quad 1}^{1 \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}^T} \begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ \vdots \\ F_{33} \end{pmatrix} = 0$$

$$\vdots$$

$$A \cdot f = 0$$

$$A \in \mathbb{R}^{N \times 9} \qquad N \geq 8 \Rightarrow$$

jeden 1D prostor řešení

$x_i \leftrightarrow x_i'$ meče $\Rightarrow$ typická hod $F = 3$

$$F = UDV^T \to D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & & \\ & \sigma_{22} & \\ & & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

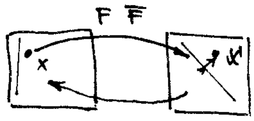
$$\bar{F} = U\bar{D}V^T \leftarrow \bar{D} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & & \\ & \sigma_{22} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

hod $\bar{F} = 2$

Výpočet:
1. normalizovat
2. $A \cdot f = 0 \to F \to \bar{F}$
3. denormalizovat $\bar{F}$
4. kreslit epipoláry pro F i $\bar{F}$
5. epipóly pro $\bar{F}$, grafy rezidua

Rezidua

$F\ \bar{F}$



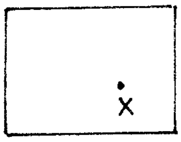
$$d, d'$$

$$\frac{d + d'}{2} \qquad \max(d, d')$$

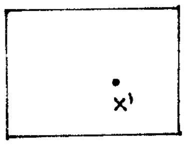
$\alpha x = PX$

$\alpha' x' = P'X$

OBR1



OBR2



P, P' – matice kamery (známe)

6 rovnic, 6 neznámých

soustava lin. rovnic – přeurčená

Neznáme matice kamery P, P'

Máme množinu dvojic bodů $\{x_n, x_n' \mid n = 1 \dots N\}$

Chceme najít P, P' a body $\{X_n\}$, tak aby platilo $\alpha_n x_n = PX_n$, $\alpha_n' x_n' = P'X_n$.

Počet rovnic $6 \cdot N$, neznámých $2N + 4N + 24 = \underbrace{6N + 24}_{\text{podurčené, řešení není jednoznačné}}$ ↑Nelineární rovnice!

Nejednoznačnost řešení:

1. Násobení skalárem
2. Nejednoznačnost až na homografii

Věta: Buď H libovolná 4×4 matice plné hodnosti. Pak projekce bodů $\{X_n\}$ kamerami P, P' je stejná jako projekce bodů $\{HX_n\}$ kamerami $P \cdot H^{-1}$, $P'H^{-1}$.

Důkaz:
$$\alpha_n \cdot x_n = PX_n = (PH^{-1})(H \cdot X_n)$$
$$\alpha_n' \cdot x_n' = P'X_n = (P'H^{-1})(H \cdot X_n)$$

H – matice homografie $X' = HX$

(colineace, projektivní transformace, ...)

(zachovává přímky)

Změněná úloha: Najdeme nějaké P, P', $\{X_n\}$ splňující rovnice $\alpha_n x_n = PX_n$, $\alpha_n' x_n' = P'X_n$.

Věta: Pro libovolné P existuje H plné hodnosti, že $P \cdot H^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [E\,O]$, kde E jsou první tři sloupce a $\vec{o}$ poslední sloupec.

Důkaz: $PH^{-1} = [E\,O]$

$P = [E\,O]H$ Zvolím $H = \begin{array}{c} \\ 1\{ \end{array}\underbrace{\begin{bmatrix} P \\ \pi^T \end{bmatrix}}_{4}\}^3$ – ztransponovaný řádkový vektor (libovolný), ovšem π musí být lineárně nezávislé s horními třemi řádky matice

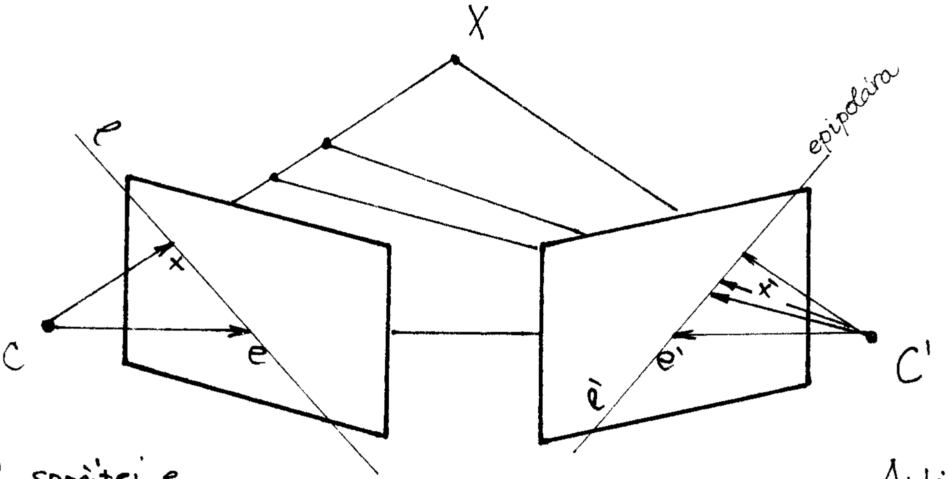
$$P = [E\,O] \cdot \begin{bmatrix} P \\ \pi^T \end{bmatrix} = EP + O\pi^T$$

Pohodlná volba: $\pi = c$, kde $P \cdot C = 0$.

Úloha teď zní: Najdi P' a $\{X_n\}$ tak, že $\alpha_n x_n = [E\,O]\,X_n$, $\alpha_n' x_n' = P' \cdot X_n$

Řešení: Pomocí F

Geometrie dvou kamer



Mám P, P'; spočítej e
Mám P, P', x; spočítej ℓ'

Antisymetrie matice:
$A + A^T = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & \\ -y & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Transformujme P, P' tak, že $P = [E0]$

$$PC = 0 = [E0]C \Rightarrow C = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$ – volbou $E0$ dáváme střed souřadné soustavy do bodu **C**.

Paprsek promítající se do x bude $\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \right\rangle$

$$\alpha x = [E0]\cdot X$$
$$\alpha = 1 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ \beta \end{bmatrix}$$

Promítnu paprsek do 2. obrázku $\left\langle \underbrace{P' \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{m = e'}, \underbrace{P' \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}}_{Mx} \right\rangle = \langle e', Mx \rangle$

$$P' = [\underbrace{M}_{3}\ \underbrace{m}_{1}]$$

$a \times b = [a]_\times b$

Průmět paprsku do druhého obrázku je $\langle e', Mx \rangle \Rightarrow \ell' = e' \times (Mx) = \underbrace{[e']_\times M}_{F^T} x$

hod $[e']_\times = 2 \Rightarrow$ hod $F = 2$

$$\ell'^T x = 0 == x^T \cdot F x'$$

Matice F jde spočítat z korespondencí x_n, x_n' řešením $x_n^T F x_n' = 0$,
N rovnic, 9 neznámých, ale 1 neznámá = násobení F skalárem. $(\cdots)\begin{pmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$
Potřebujeme 8 nebo víc bodů

Máme F, chceme spočítat P, P'

1. Zvolíme $P = [E0]$
2. víme, že $x^T F x' = 0 \Rightarrow (\forall X)\ (PX)^T \cdot F (P'X) = 0 = X^T \underbrace{P^T F P'}_{A} X$

$(\forall X)\ X^T A X = 0 \Rightarrow A + A^T = 0$ (A antisymetrická)

$$X = \begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ & \vdots & \\ & & A_{44}\end{pmatrix} \qquad X^T A X = \sum_i A_{ii} X_i^2 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (A_{ij} + A_{ji}) X_i X_j = 0$$

$$\Rightarrow A_{ii} = 0, \quad A_{ij} + A_{ji} = 0$$

$P^T F P'$ je antisymetrická

$P^T F P'$ antisymetrická

$P = [E O]$ $\quad P^T F P' = \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} F [M m] = \begin{bmatrix} E \\ O \end{bmatrix} [FM \; Fm] = \begin{array}{c} \overbrace{}^{3} \\ \begin{bmatrix} FM & Fm \\ 000 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \}3 \\ \}1 \end{array}$ $\quad Fm = 0 \Rightarrow m = e'$

$P' = [M m]$

epipóly splňují:

$Fe' = F^T e = 0$

Zvolíme $M = SF^T$, kde S lib. antisymetrická

$$FSF^T + (FSF^T)^T = FSF^T + FS^TF^T = F(S+S^T)F^T = 0$$

Pohodlně zvolíme $S = [e']_\times$

Výsledek $P = [[e']_\times F^T \; e']$

Matice kamer P, P' konzistentní z F

Máme korespondence $\{x_i, x_i'\}_{i=1}^n$ (známe)

$$\{x_i, x_i'\}_{i=1}^n \xrightarrow{F} P, P' \rightarrow \oplus \rightarrow \{X\}_{i=1}^n \; : \; \exists \alpha, \alpha' \quad \begin{array}{l} \alpha_i x_i = P \cdot X_i \\ \alpha_i' x_i' = P' \cdot X_i \end{array} \quad \alpha_i, \alpha_i' \neq 0$$

$$\alpha \cdot x = \underbrace{P \cdot H^{-1}}_{\bar{P}} \overbrace{HX}^{\bar{X}}, \quad \underbrace{H^{-1} H}_{E}$$

$\alpha_i, \alpha_i', P, P', X_i$ nejsou určeny jednoznačně

$$P \cdot H^{-1} = (E \,|\, 0)$$

$P \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, hod $P = 3$

doplníme na čtvercovou vektorem π $\begin{pmatrix} P \\ \pi^T \end{pmatrix}$ tak, aby hodnost vzniklé matice byla 4.

$\begin{pmatrix} P \\ C^T \end{pmatrix}$, $P \cdot C = 0$ ... dobré doplnění řádkem, který je lin. nezávislý na P. $(c \neq 0)$

$$\left. \begin{array}{l} p_1^T \cdot c = 0 \\ p_2^T \cdot c = 0 \\ p_3^T \cdot c = 0 \end{array} \right\} c \perp \begin{pmatrix} p_1^T \\ p_2^T \\ p_3^T \end{pmatrix}$$

Získání P' z $\{x_i, x_i'\}_{i=1}^n$ $\quad (P = (E|0))$

$x^T \cdot F \cdot x' = 0$, $\quad \alpha x^T \cdot F \cdot \alpha' x' = 0$, $\quad (PX)^T \cdot F \cdot (P'X) = 0$, $\quad \forall X \in \mathbb{R}^4$

$X^T \cdot \underbrace{P^T \cdot F \cdot P'}_{A} X = 0$, $\quad A^T = -A$ (je antisymetrická)

Důkaz antisymetričnosti A:

$$(1 \; 0 \; 0 \; 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow A_{11} = 0, \; A_{22} = 0, \; A_{33} = 0, \; A_{44} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdot & \cdot \\ A_{21} & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{(1 \; 1 \; 0 \; 0) \cdot A}_{(A_{21} \; A_{12} \; \cdot \; \cdot)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad A_{21} + A_{12} = 0$$

$(P^T F \cdot P')^T = -P^T F P'$

$P = (E|0), \quad P' = (M\ m)$

$P'^T F^T P = -P^T F P' \qquad \begin{pmatrix} M^T \\ m^T \end{pmatrix} F^T (E\ 0) = -\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \cdot F \cdot (M\ m)$

$\begin{pmatrix} M^T F^T & 0 \\ m^T F^T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -FM & -Fm \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} Fm = 0 \\ m = \beta \cdot e' \end{matrix}$

$M^T F^T = -FM$

$(FM)^T = -FM \quad (1)$

Pozorování:

$\forall S : S^T = -S \qquad M = SF^T$ platí (1)

Jak volit S ?

hod $P' \overset{!}{=} 3$, $P' = (SF^T\ \beta e')$

Příklad špatného S

$F^T_{BÚNO} = (f_1\ \ f_2\ \ a_1 f_1 + a_2 f_2) \quad$ (hod F)

$S = [f_1]_\times$

$SF^T = ([f_1]_\times f_1\ \ [f_1]_\times f_2\ \ [f_1](a_1 f_1 + a_2 f_2)) = \underbrace{(0\ \ [f_1]_\times f_2\ \ a_2 [f_1]_\times f_2)}_{\text{hod} = 1}$

$S = [Z]_\times$ a potřebujeme, aby $Z \notin \langle F^T \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow S = [e']_\times$ je dobrá volba, $F \cdot e' = 0 \qquad P' = \underbrace{(\underbrace{[e']_\times F^T}_{\text{hod} = 2}\ \beta e')}_{\text{hod} = 3}$

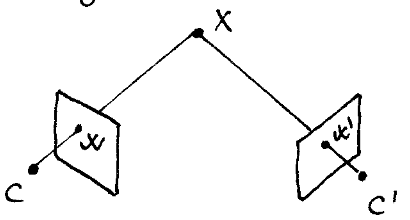
$P'C' = 0$

$P' \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow c_4 = 0 \Rightarrow c'$ je nevlastní bod

$\left.\begin{matrix} M = [e']_\times F^T \ \text{(získáno z (1))} \\ FM = F(M + \underbrace{e' v^T}_{\mathbb{R}^{3\times 3}}) \\ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} (v_1\ v_2\ v_3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad P' = ([e']_\times F^T + e' v^T \mid \beta e')$

Triangulace



c, c', x, x'

$\exists\, \alpha, \alpha' \qquad \alpha x = PX$

$\qquad\qquad\quad\ \alpha' x' = P'X$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P & -x & 0 \\ P' & 0 & -x' \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} X \\ \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix}}_{q = 0} = 0$$

1. $x, x' = 0 \Rightarrow$ hod $\begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & -x' \end{pmatrix} = 2$
2. hod $P, P' = 3$

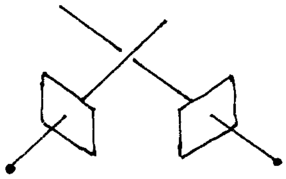
$PC = 0$ středy různé $\equiv$ C, C' LN $\}$ hod $\begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix} = 4$

$PC' = 0$ $\in \mathbb{R}^{6\times 4}$

1. hod $A = 6$ (meče)

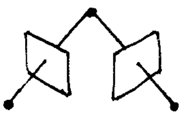
   paprsky x, x' se neprotínají $\Rightarrow$ řešíme přeurčenou soustavu

   $A \cdot q = 0 \qquad [U, D, V] = \mathrm{svd}(A), \quad q = V(:, \mathrm{end})$



2. hod $A = 5$ (korespondence)

   rekonstrukce je jednoznačná



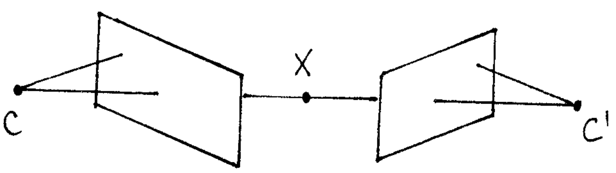
3. hod $A = 4$

$$\begin{pmatrix} P & -x & 0 \\ \underbrace{P'}_{\text{hod}=4} & 0 & -x' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ \alpha \\ \alpha' \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} P & -x \\ P' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} P'X = 0 \\ \underbrace{\alpha \cdot x}_{\sim e} = P \cdot C' \quad \rightarrow \ \alpha = 1,\ x = e \end{cases}$$

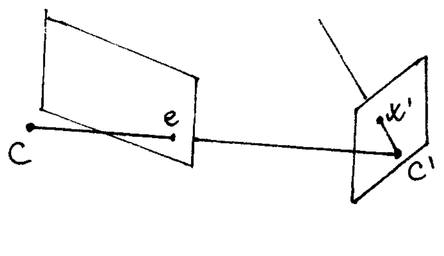
$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ P' & -x' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ \alpha' \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} PX = 0 : X = C \\ \underbrace{\alpha x'}_{\sim e'} = P'C \quad \rightarrow \ \alpha' = 1,\ x' = e' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P & -e & 0 \\ P' & 0 & -e' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C' & C \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

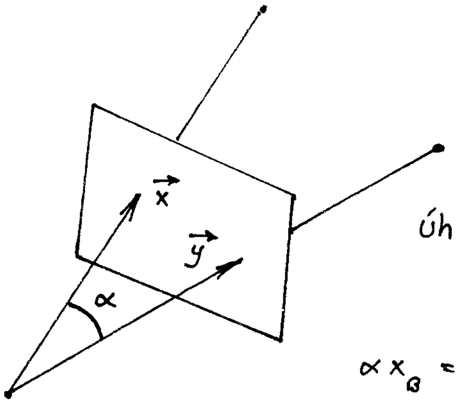


z $x^T \cdot F \cdot x' = 0$ nevyplývá, že x, x' jsou projekcemi jednoho bodu

$e^T \cdot F \cdot x' = 0 \quad \forall x'$



Kamera měří úhly mezi paprsky



$$\vec{x}_\beta = \begin{pmatrix}u\\v\\1\end{pmatrix}$$

$\vec{x}_\gamma, \vec{y}_\gamma$, γ ... ortonormální báze

úhel $\sphericalangle(\vec{x}_\gamma, \vec{y}_\gamma) : \dfrac{\vec{x}_\gamma \cdot \vec{y}_\gamma}{\|\vec{x}_\gamma\| \cdot \|\vec{y}_\gamma\|} = \cos\alpha$

$$\alpha x_\beta = PX_\gamma = KR\underbrace{(E|\ )\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix}}_{\vec{x}_\gamma}$$

K → přechod od γ k β

$K \equiv$ horní trojúhelníková

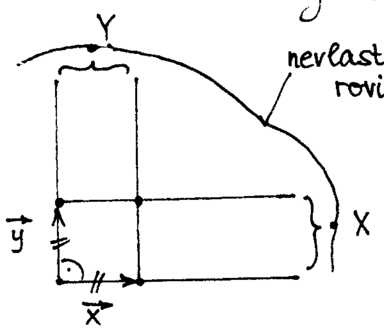
$\Downarrow$

γ ... speciální ortonormální báze „nasazená" na β.

$$\cos\alpha = \frac{y_\gamma^T \cdot x_\gamma}{\sqrt{y_\gamma^T \cdot y_\gamma}\sqrt{x_\gamma^T \cdot x_\gamma}} = \frac{y_\beta K^{-T}K^{-1}x_\beta}{\sqrt{y_\beta^T \cdot K^{-T}K^{-1}y_\beta}\sqrt{x_\beta^T \cdot K^{-T}K^{-1}x_\beta}}$$

$$\Omega = K^{-T}K^{-1}$$

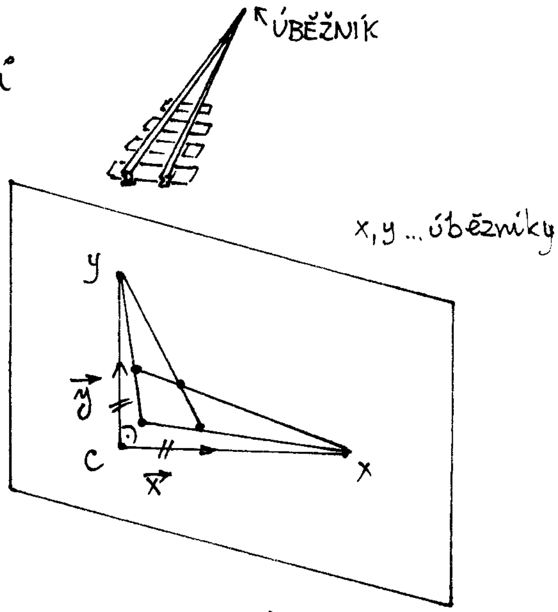
Kalibrace kamery (výpočet K) z úběžníků



$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\0\end{pmatrix}$ ... nevlastní bod

$\vec{x}$ kolmý na $\vec{y}$: $\vec{x}_\gamma \cdot \vec{y}_\gamma = 0$

γ - ortonormální báze



$\vec{x}$ kolmé na $\vec{y}$ $\Rightarrow$ $y_\gamma^T \cdot x_\gamma = 0 \Rightarrow y_\beta^T K^{-T}K^{-1}x_\beta = 0$

$K \equiv$ horní trojúhelníková $\Big\} \Rightarrow K^{-1} \equiv$ horní trojúhelníková ...

... volím $K^{-1} = \begin{pmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ 0 & k_{22} & k_{23}\\ 0 & 0 & k_{33}\end{pmatrix}$; $K^{-T} \cdot K^{-1} = \begin{pmatrix}k_{11}^2 & k_{11}k_{12} & k_{11}k_{13}\\ k_{11}k_{12} & k_{12}^2 + k_{22}^2 & k_{12}k_{13} + k_{22} \cdot k_{23}\\ k_{11}k_{13} & \cdot & k_{13}^2 + k_{23}^2 + k_{33}^2\end{pmatrix}$

$y_\beta^T \Omega x_\beta = 0$

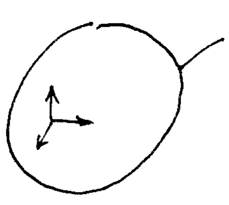
$$\Omega = \begin{pmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13}\\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23}\\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33}\end{pmatrix} \qquad x_\beta = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \qquad y_\beta = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

$$x_1y_1 + \omega_{11} + (x_1y_1 + x_2y_1)\omega_{12} + (x_1y_3 + x_3y_1)\omega_{13} + x_2y_2\omega_{22} + (x_2y_3 + x_3y_2)\omega_{23} + x_3y_3\omega_{33} = 0$$

Soustava hom. lin. rovnic o 6 neznámých $\Rightarrow$ 5 rovnic $\Rightarrow$ 5 dvojic kolmých směrů z Ω

$\Omega \Rightarrow K^{-1} \Rightarrow K$

Nalezení nevlastní roviny (měřeno v kartézské souřadné soustavě)



$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \equiv$ nevlastní body tvoří nevlastní rovinu

$H = \begin{pmatrix} R & -RT \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$ … přechod mezi kartézskými soustavami

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & -RT \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w' = 0^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 \cdot 0 = 0 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_R} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\equiv$ nechová nevlastní rovinu v sobě

Rekonstrukce z obrazů : X… body

$$\alpha_1 x_1 = P_1 X$$
$$\alpha_2 x_2 = P_2 X$$

$$X = \beta H^{-1} Y$$

z obrazů; homografie $H \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, hod $H = 4$; měřeno v kartézské s.s.

hledáme H tak, aby se zachovala nevlastní

$$H^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \\ h_3^T \\ h_4^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} --- \\ --- \\ --- \\ \underbrace{h_4^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \end{pmatrix}$$

$$\beta Y = H \cdot X$$

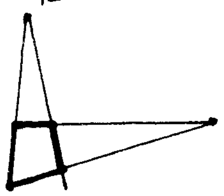
$$\beta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = H \cdot X = \begin{pmatrix} h_1^{-T} \\ h_2^{-T} \\ h_3^{-T} \\ h_4^{-T} \end{pmatrix} X$$

$$0 = h_4^{-T} \cdot X_\infty$$

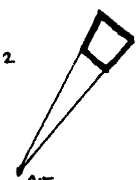
nevlastní body transformované H^{-1}

soustava hom. rovnic, 4 neznámé h_4 $\Rightarrow$ 3 neznámé rovnice $\Rightarrow$ 3 body

$X_\infty \equiv$ rekonstruované korespondence úběžníků



3 úběžníky ve 2 obrazech



meče

$$\left.\begin{matrix} u_1 \leftrightarrow u_2 \\ v_1 \leftrightarrow v_2 \\ w_1 \leftrightarrow w_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} X_{1\infty} \\ X_{2\infty} \\ X_{3\infty} \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 = h_4^{-T} X_{1\infty} \\ 0 = h_4^{-T} X_{2\infty} \\ 0 = h_4^{-T} X_{3\infty} \end{matrix}\right\} \Rightarrow h_4^{-T} \text{ … 4. řádek } H$$

Výpočet 1. – 3. řádku H

$$P = (KR \mid -KRT)$$

$$P' = P \underbrace{\begin{pmatrix} R' & -R'T' \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}}_{\text{přechod mezi Kartézskými soustavami}} = (KRR' - KRR'T' - KRT) = (K(RR') - KRR'(T' - R'^{-1}T)) =$$
$$= (KR'' - KR''T'')$$

$$\left.\begin{matrix} P_1 = (E \mid 0) \\ P_2 = (A \mid a) \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{potřebuji}} \begin{matrix} P_1' = (K \;\; 0) \\ P_2' = (A' \;\; a') \end{matrix}$$

$$ß\, Y = HX$$
$$P' = P \cdot H^{-1}$$
$$P'H = P$$

$$(K\, 0)H = (E \mid 0)$$
$$(A'a')H = (A \mid a)$$
$$H = \begin{pmatrix} H_1 & h_1 \\ & h_4^{-T} \end{pmatrix}$$

$$KH_1 = E$$
$$Kh_1 = 0 \;\; \& \text{ hod } K = 3$$
$$\Rightarrow h_1 = 0$$
$$H_1 = K^{-1}$$

$$H = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ \bar{h}_4^T & \end{pmatrix} \Leftarrow$$

Cvičení:

1. Úběžníky
2. Nevlastní body z úběžníků ... $X_{i\infty}$
3. $\bar{h}_4^T$ z $X_{i\infty}$
4. Ω z úběžníků $\to K$
5. $H = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ \bar{h}_4^T & \end{pmatrix}$: $Y = H \cdot X$