m p
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

Robotika

Popis polohy tělesa

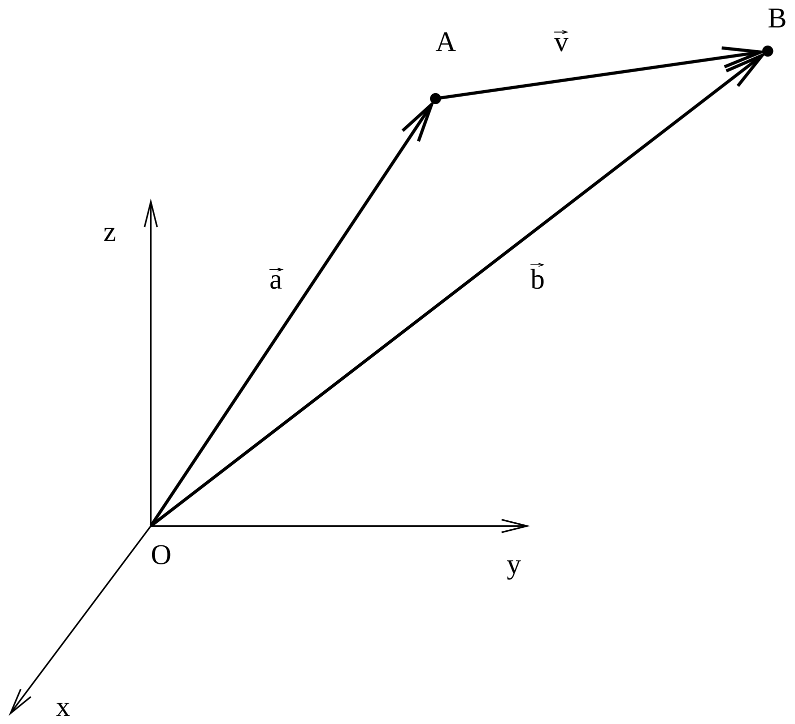
Vladimír Smutný

Centrum strojového vnímání

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky (CIIRC)

České vysoké učení technické v Praze

Body, vektory, geometrie, algebra



Body a vektory v geometrii a algebře

Pojem *bod* v geometrii považuji za dostatečně známý a protože jeho definice není matematicky snadná, nebudu ho definovat. Jen chci připomenout, že je dobré ho vnímat jako "místo v prostoru", které existuje nezávisle na nějakých číslech.

Pojem *vektor* v geometrii můžeme definovat jako uspořádanou dvojici bodů, počáteční a koncový bod. Značíme $\vec{AB}$.

V geometrii pak můžeme používat obraty jako "bod A je průsečíkem kružnice k se středem v bodě B, procházející bodem C a přímky procházející body D a E".

Naše problémy v robotice jsou svou podstatou geometrické problémy (přinejmenším v kinematice). Velmi často potřebujeme reprezentovat geometrii v počítači, který ale s geometrickými pojmy přímo pracovat neumí.

Matematická teorie lineárních prostorů nám umožňuje pracovat s matematickými objekty typu uspořádaná n-tice čísel. Lze ukázat, že pro geometrické a lineární prostory konečné dimenze existuje vzájemně jednoznačné zobrazení (isomorfismus) mezi geometrickými a algebraickými objekty. Abychom mohli zavést tento isomorfismus, musíme v geometrii zavést souřadnicovou soustavu. Geometrický bod v prostoru pak můžeme ztotožnit s uspořádanou trojicí (vektorem, zde algebraický pojem) reálných čísel, kde uvedená čísla popisují souřadnice geometrického bodu v dané souřadnicové soustavě. Takovému vektoru v geometrii říkáme polohový vektor bodu, jeho počáteční bod je počátek souřadnicového systému, jeho koncový bod je pak reprezentovaný geometrický bod.

Lineární prostor tak tvoří univerzální model geometrického prostoru a jeho pomocí můžeme reprezentovat všechny vlastnosti geometrického prostoru a naopak.

To, že geometrické pojmy můžeme považovat za základní, ospravedlňuje například to, že geometrie byla matematiky úspěšně pěstována přibližně 2000 let bez potřeby zavádění souřadnic. To, že existuje isomorfismus, ale zároveň ukazuje, že oba popisy jsou v principu ekvivalentní a můžeme libovolně přecházet z jednoho do druhého. Mezi body a vektory v geometrii můžeme zavést řadu operací:

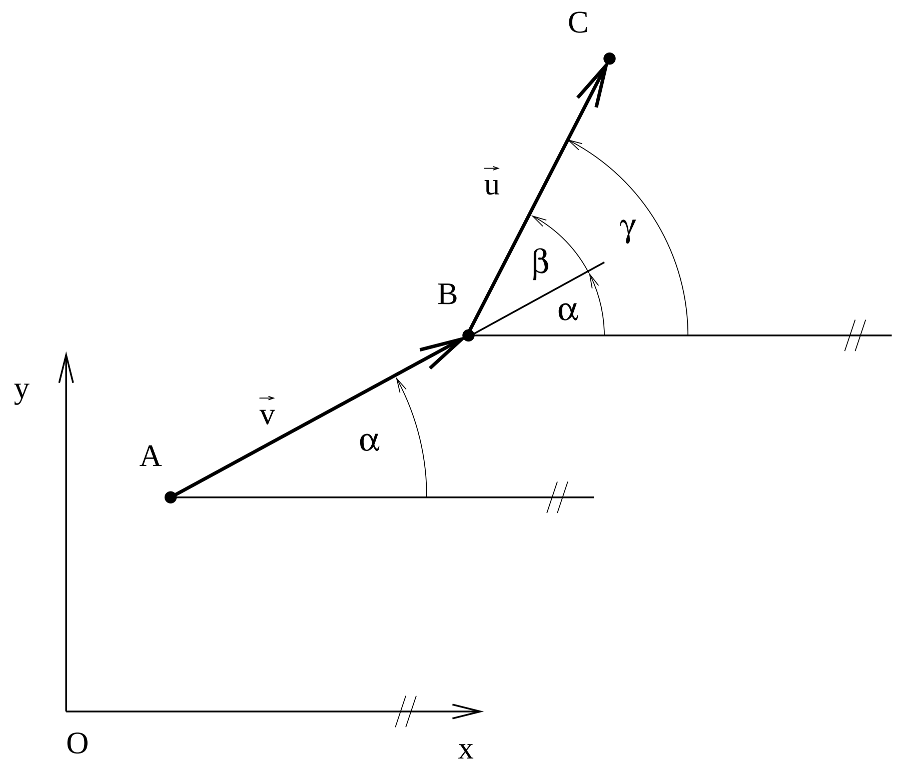
- dva body definují vektor $\vec{v} = \vec{AB}$,
- bod a vektor definují bod $A + \vec{v} = B$
- vektory lze sčítat a odčítat $\vec{b} = \vec{a} + \vec{v}$

Tyto operace platí bez zavedení souřadnicového systému.

Stejné operace můžeme zavést v algebře mezi uspořádanými trojicemi (n-ticemi) reprezentující body a vektory. Zápis vzorců zástává stejný, jen operátory znamenají něco jiného. Algebraické objekty v rovnicích správně reprezentují geometrické objekty, pokud jsou všechny vyjádřeny ve stejné souřadnicové soustavě. Na volbě souřadnicové soustavy přitom nezáleží. Formálně budou popisy geometrie algebraickými rovnicemi vždy stejné, číselně se liší v závislosti na volbě souřadnicové soustavy.

K situaci, kdy máme různé souřadnicové systémy, se dostaneme dále.

Technická poznámka



Běžný přístup[1] pro určení parametrů trojúhelníku je používat kosinovou nebo sinovou větu, Pythagorovu větu a podobně. Tyto věty a podobné vzorce, jako například součet úhlů v trojúhelníku, je v analytické geometrii obtížné používat. Problém je v tom, že nalezené řešení musíme interpretovat do příslušných kvadrantů, uměle vyrábět další řešení, či nalezená řešení testovat na splnění vstupních podmínek. To může být pracné a zdrojem řady chyb, které se mohou projevit až při provozu zařízení.

Níže uvádím některá doporučení, jak se chybám vyhnout:

- Snažte se počítat souřadnice rohů trojúhelníků místo délek stran či velikostí úhlů v trojúhelníku.
- Používejte pro určení úhlů vzorec $\phi = \operatorname{atan2}(y, x)$ vždy, když je to možné. Vyhýbejte se použití funkce arccos a podobně.
- Když počítáte úhly a souřadnice, značte je do obrázků a interpretujte je vždy orientovaně. Takto spočítané úhly a souřadnice mohou být pak snadno sčítány a odčítány bez nutnosti analýzy příslušné situace.
- Pokud pracujete s analytickým tvarem přímky, používejte tvar $ax + by + c = 0$, který na rozdíl od směrnicového tvaru $y = kx + q$ bezchybně pracuje ve všech kvadrantech.

Výpočet úhlu mezi osou x a vektorem $\vec{AB}$ vyznačeným na obrázku. Orientovaný, čtyřkvadrantový úhel α lze spočítat $\alpha = \operatorname{atan2}(B_y - A_y, B_x - A_x)$.

Nejrychlejší a nejbezpečnější cesta, jak spočítat úhel β mezi vektory $\vec{v}$ a $\vec{u}$ je následující:

$$\alpha = \operatorname{atan2}(B_y - A_y, B_x - A_x), \quad (1)$$
$$\gamma = \operatorname{atan2}(C_y - B_y, C_x - B_x), \quad (2)$$
$$\beta = \gamma - \alpha. \quad (3)$$

V prostoru je situace složitější. Úhel mezi dvěma vektory nemá sám o sobě orientaci. Takový úhel ϕ můžeme snadno spočítat za pomoci skalárního součinu a tak ho můžeme spočítat v prostoru libovolné dimenze. Abychom v třírozměrném prostoru mohli definovat orientovaný úhel, musíme si předem určit směr, který budeme považovat za kladný. Ve 3–D prostoru tak mohou dva vektory definovat rovinu a volbou normálového vektoru $\vec{n}$ k rovině tak zvolíme orientaci. Výsledný orientovaný úhel θ spočítáme takto:

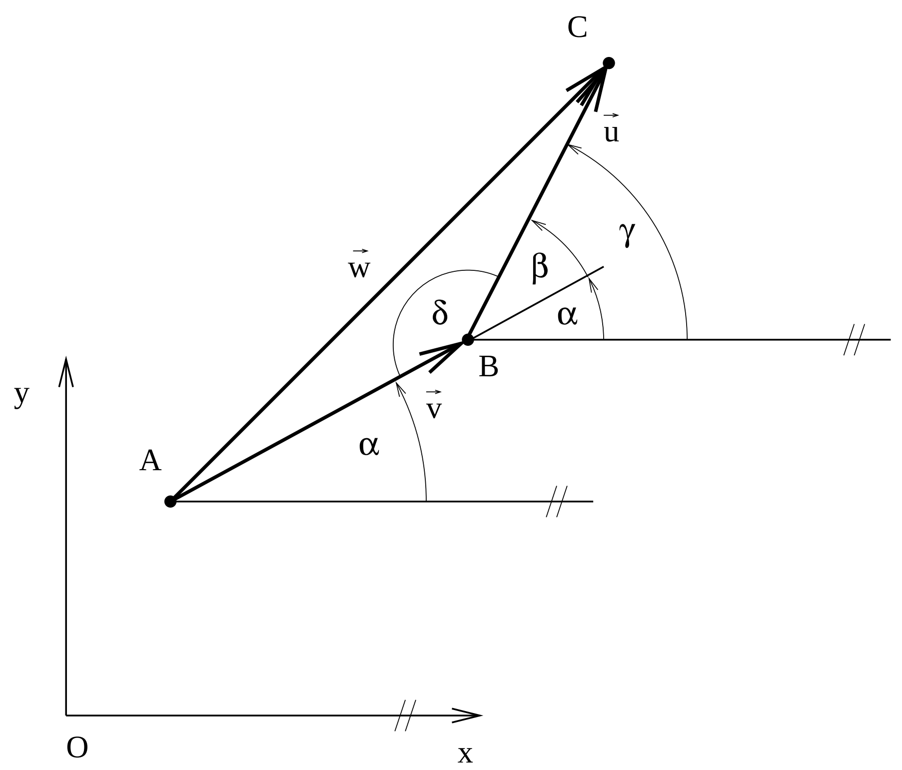
$$\phi = \arccos \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|}, \quad (4)$$
$$\theta = \arccos \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|} \text{ pro } \vec{n} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \geq 0 \quad (5)$$
$$\theta = -\arccos \frac{\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{|\vec{v_1}||\vec{v_2}|} \text{ pro } \vec{n} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) < 0 \quad (6)$$

Funkci sgn nelze použít, protože pro vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ opačné je jejich skalární součin nula, znaménko také nula a výsledek je také nula, zatímco správně je π.

Výše uvedený postup má ještě další problémy: normálový vektor $\vec{n}$ nesmí ležet v rovině určené vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ a žádný z vektorů nesmí mít nulovou délku. V těchto případech se ale singularity v uvedeném vzorci kryjí se singularitami ve skutečném světě, takže je zapotřebí se jim vyhnout především v realitě.

[1] Srovnej běžný prací prášek.

Technická poznámka II

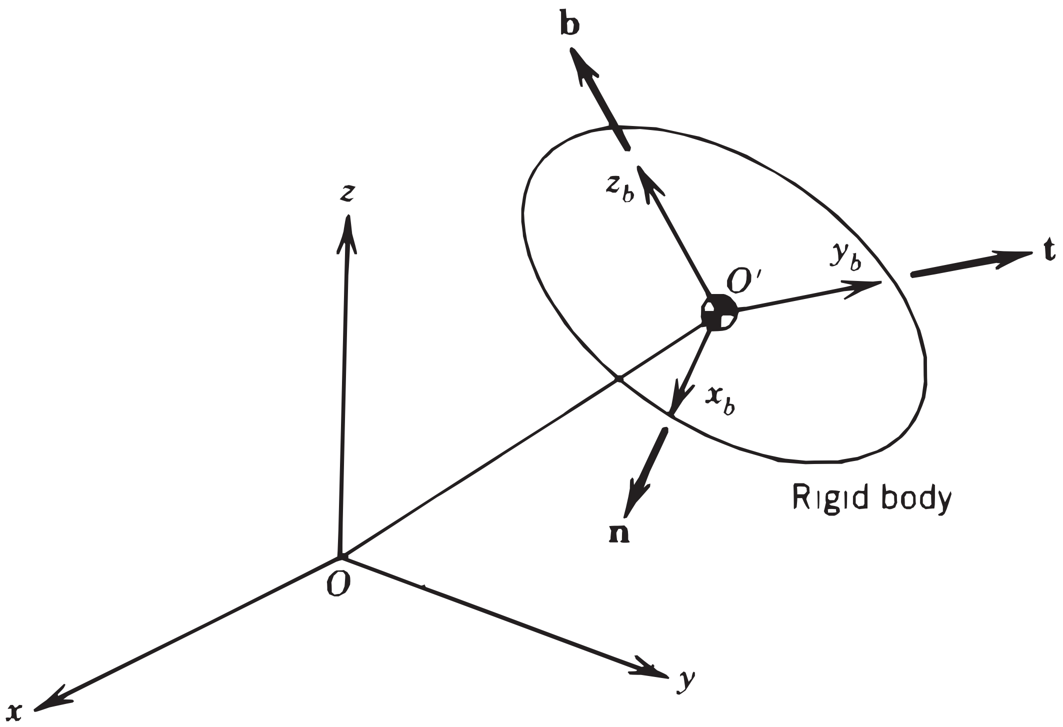


m p
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31

Nechť máme dány souřadnice bodů A a C a délky vektorů $\vec{v}$ a $\vec{u}$. Nejbezpečnější cesta, jak určit souřadnice bodu B a příslušné úhly je místo použití kosinové věty a boje s úhlem δ nalézt bod B jako průsečík dvou kružnic se středy v bodech A a C a příslušnými poloměry. Tím dostaneme pro bod B dvě řešení. Úhly pak spočítáme pomocí výše uvedených rovnic.

Těleso v souřadnicovém systému

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31



Těleso v rovině má 3 DOF.
Těleso v prostoru má 6 DOF.
Kontrolní otázky:
Kolik stupňů volnosti má skládací metr na stole?
Kolik stupňů volnosti má gumička?

Tuhé těleso – v našem výkladu uvažujeme jen tuhá tělesa. S tuhým tělesem můžeme svázat souřadnicový systém a polohu jednotlivých bodů tělesa v tomto souřadnicovém systému pak známe, např. z výkresu předmětu, kterým manipulujeme.

Aktuální poloha tělesa v čase – lze ji popsat polohou souřadnicového systému s tělesem svázaným v jiném, nepohyblivém, “světovém” souřadnicovém systému. Jak konkrétně popsat polohu tělesa bude ukázáno dále.

Pohyb tělesa v čase – můžeme popsat jako funkci aktuální polohy tělesa v závislosti na čase.

Vzájemná poloha dvou souřadnicových soustav lze vždy rozložit na posun a otočení.

Zvolíme souřadnicový systém rámu $O - xyz$. S tělesem svážeme souřadnicový systém $O' - x^b y^b z^b$. Popis souřadnicového systému $O'-x^b y^b z^b$ v souřadnicovém systému rámu je:

$$\vec{OO'} = \mathbf{x}_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \end{pmatrix} (\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}) \,.$$

Utvořme matici $\mathbf{R} = (\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b})$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$ jsou jednotkové a ortogonální vektory, matice $\mathbf{R}$ je ortonormální, tedy $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$.

Popis polohy tělesa

Bod v 3D prostoru – popsán třemi souřadnicemi.

Tuhé těleso v 3D prostoru – popsáno šesti souřadnicemi:

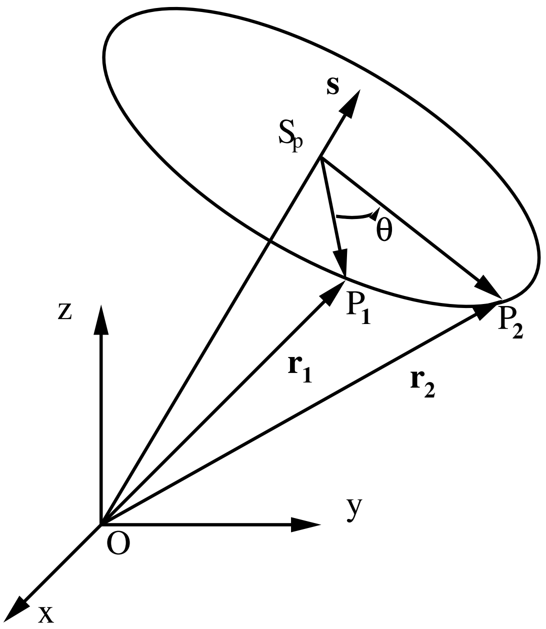
- 3 souřadnice referenčního bodu $\mathbf{t}_0^0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$,
- orientace může být popsána jedním ze způsobů:
  - souřadnicemi vektorů spojených s tělesem $(\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b})$,
  - Eulerovými úhly (ϕ, θ, ψ),
  - rotační maticí $\mathbf{R}$,
  - osou – úhlem,
  - kvaternionem,
  - rotačním vektorem.

Souřadnice referenčního bodu a rotační matice mohou být kombinovány do transformační matice.

Pro rotační matici srovnej heslo Eric W. Weisstein. "Rotation Matrix."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/RotationMatrix.html

Převodní vztahy jsou přehledně na stránce http://www.euclideanspace.com/maths/geometry /rotations/conversions/index.htm Je třeba dávat pozor na použité definice, aby se nesmíchali vzorce používající různou notaci.

Osa–úhel, kvaterniony a rotační vektor



Eulerova věta o rotaci říká, že každá rotace ve 3–D lze reprezentovat jako rotace okolo určité osy $\mathbf{s}$ o určitý úhel θ. Tuto dvojici $(\mathbf{s}, \theta)$ nazýváme osa–úhel. Kvaterniony popisují rotaci pomocí polohy osy rotace $\mathbf{s}$ a úhlu otočení θ takto:

$$\mathbf{q} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\mathbf{s}^T) =$$
$$(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)s_x, \sin(\theta/2)s_y, \sin(\theta/2)s_z)$$

Rotační vektor využívá skutečnosti, že směrový vektor $\mathbf{s}$ definující osu rotace je jednotkový a má tedy jen dva stupně volnosti. Rotaci tedy můžeme vyjádřit vektorem délky tři: $\mathbf{v} = (\theta\mathbf{s})$.

Kvaterniony jsou zajímavý matematický nástroj. Mezi jejich důležité vlastnosti patří

- všechny 4 souřadnice mají ekvivalentní postavení,
- $\mathbf{q}$ a $-\mathbf{q}$ popisují stejnou rotaci,
- v kvaternionech je relativně jednoduché interpolovat rotaci.

Úlohu interpolovat rotaci (např. pro manipulaci v robotice nebo pro vizualizaci v počítačové grafice) lze snadno řešit pomocí kvaternionů. Metoda se nazývá Spherical linear interpolation (SLERP). Interpolujeme z $\mathbf{q}_1$ do $\mathbf{q}_2$ a dostáváme $\mathbf{q}$, interpolační parametr je t, α reprezentuje celkový úhel, o který rotujeme (úhel mezi kvaterniony je polovina tohoto úhlu, absolutní hodnota skalárního součinu nám garantuje kratší rotaci):

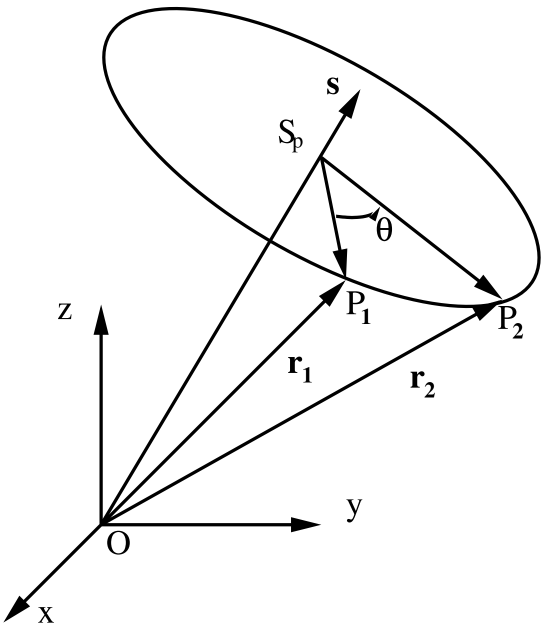
$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1^{-1})^t \mathbf{q}_1\,, && (7)\\
\mathbf{q} &= \frac{\sin((1-t)\alpha)}{\sin(\alpha)}\mathbf{q}_1 + \frac{\sin(t\alpha)}{\sin(\alpha)}\mathbf{q}_2\,, && (8)\\
\cos(\alpha/2) &= \|\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2\|\,, && (9)\\
t &\in \;<0, 1>\,. && (10)
\end{aligned}$$

Srovnej Eric W. Weisstein. "Quaternion."From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Quaternion.html

Interpolace v soustavě osa-úhel je rotace okolo dané osy, přičemž úhel se mění lineárně od 0 do θ.

Rotační vektor je neredundantní a má dobrou topologii takže je hodně používán například v počítačovém vidění při odhadování rotace. Dobrá topologie znamená, že blízké vektory (jejich rozdíl je malý) reprezentují podobné rotace. Rotační vektor spojitě reprezentuje rotaci i v okolí nuly, zatímco reprezentaci malých rotací odpovídají silně nespojité Eulerovy úhly.

Rodriguesův vzorec pro rotaci



Rodriguesův vzorec pro rotaci vektoru:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 \cos\theta + (\mathbf{s} \times \mathbf{r}_1)\sin\theta + \mathbf{s}(\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}_1)(1-\cos\theta)$$

Rotační matice z reprezentace osa-úhel:

$$R = I\cos\theta + [\mathbf{s}]_x \sin\theta + \mathbf{s}\mathbf{s}^T(1-\cos\theta)$$

kde $[\mathbf{s}]_x$ je skew symmetric (antisymetrická) matice:

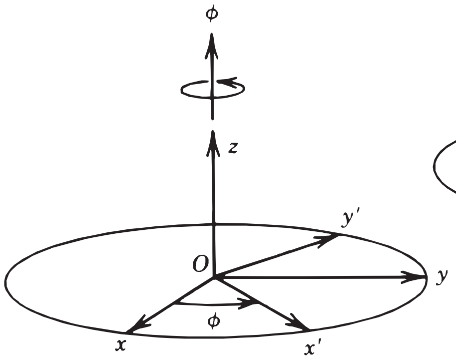
$$[\mathbf{s}]_x = \begin{pmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{pmatrix}$$

Rodriguesův vzorec umožňuje vypočítat otočený vektor r_2 nebo jeho koncový bod P_2 při znalosti reprezentace osa-úhel. Upravený vzorec pak dává návod na výpočet rotační matice z reprezentace osa-úhel. Opačnou transformace je:

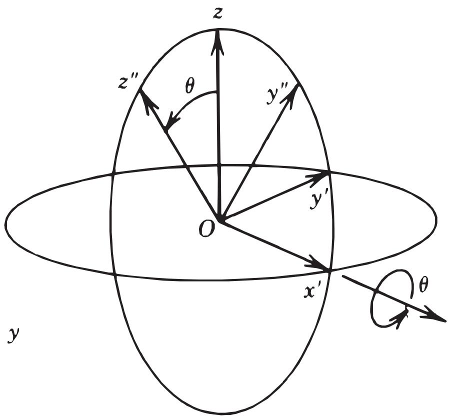
$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathrm{trace}(\mathbf{R})-1}{2}\right) \tag{11}$$

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{3,2}-r_{2,3} \\ r_{1,3}-r_{3,1} \\ r_{2,1}-r_{1,2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

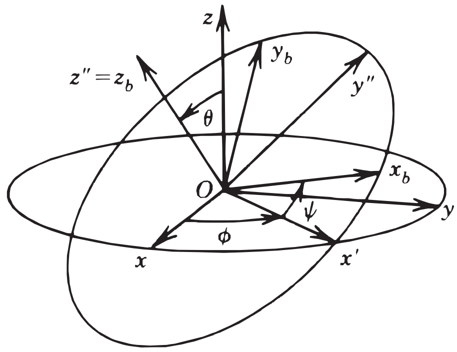
Definice Eulerových úhlů



1 – precese



2 – nutace



3 – rotace

Eulerovy úhly

Matice $\mathbf{R}$ má devět koeficientů, ale má hodnost pouze tři. Je tedy redundantní reprezentací, omezující podmínky jsou právě jednotkovost a kolmost vektorů $\mathbf{n}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{n}^T\mathbf{t} = 0 \quad \mathbf{t}^T\mathbf{b} = 0 \quad \mathbf{b}^T\mathbf{n} = 0$$
$$|\mathbf{n}| = 1 \qquad |\mathbf{t}| = 1 \qquad |\mathbf{b}| = 1$$

Matici $\mathbf{R}$ lze snadno zkonstruovat pomocí Eulerových úhlů

1. Otočme souřadnicový systém $O - xyz$ okolo osy z o úhel ϕ. Dostaneme $O - x'y'z$.
2. Otočme souřadnicový systém $O - x'y'z$ okolo osy x' o úhel θ. Dostaneme $O - x'y''z''$.
3. Otočme souřadnicový systém $O - x'y''z''$okolo osy z'' o úhel ψ. Dostaneme $O - x^b y^b z^b$.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\phi)\mathbf{R}_{x'}(\theta)\mathbf{R}_{z''}(\psi)$$

$$\mathbf{R}_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\mathbf{R}_{x'}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\mathbf{R}_{z''}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & -\cos\theta\cos\psi\sin\phi - \cos\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta \\ \cos\psi\sin\phi + \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\theta\cos\psi - \sin\phi\sin\psi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\psi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{16}$$

Trojice Eulerových úhlů dává jednoznačně otočení v prostoru, poloha v prostoru nedává jednoznačně trojici úhlů. Existují další podobné definice, které mají podobné vlastnosti, ale jiné rovnice. Jestliže je dána matice $\mathbf{R}$, lze Eulerovy úhly vypočítat z porovnání prvků r_{33}, r_{32}, r_{23}.

Rotation Matrix Resulting from Euler Angles

Eulerovy úhly podle definice v těchto přednáškách (Asada, Slotine):

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi & -\cos\vartheta\cos\psi\sin\varphi - \cos\varphi\sin\psi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi & \cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\psi & \cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Rotační matice definována úhly Yaw, Pitch, Roll použitými například v robotu CRS, tedy rotujeme postupně okolo z, y, x':

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\gamma\sin\alpha & \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta + \sin\alpha\sin\gamma \\ \cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix}$$

Jak vypočítat ze známé rotační matice Eulerovy úhly

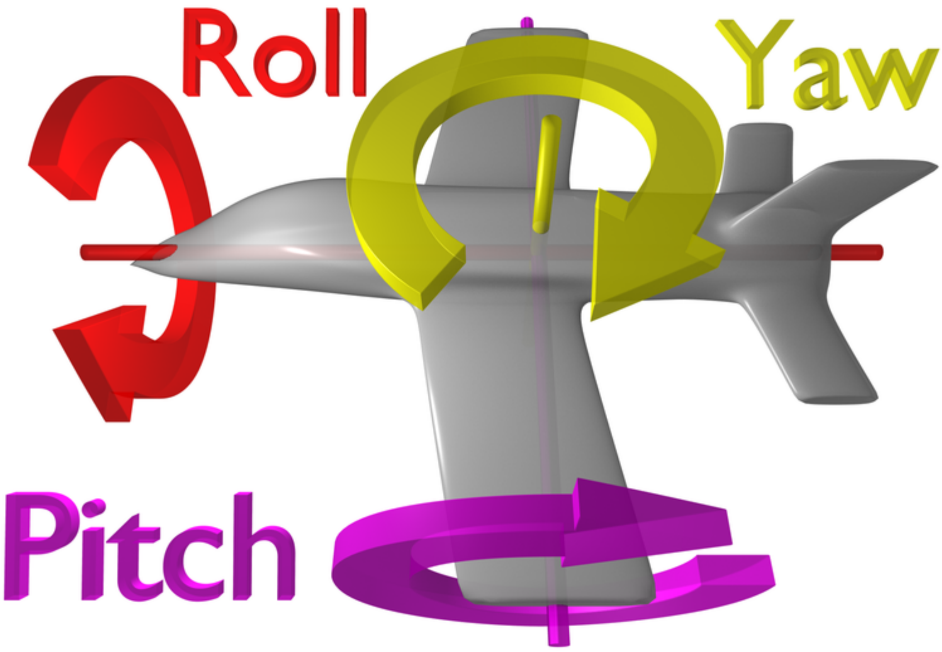
- Mějme známou matici $\mathbf{R}$ (3×3) a symbolickou matici, která vznikla složením tří rotací definovaných třemi úhly. Máme najít tyto tři úhly. Symbolická matice, která vznikla rotacemi okolo kolmých os má zvláštní tvar, podobný maticím na výše uvedeném slidu. Máme tedy řešit rovnici podobnou (ne nutně stejnou) jako rovnice (16) se třemi neznámými ϕ, θ, ψ.

- Nejdříve je nutné najít v symbolické matici prvek, který je funkcí jen jedné proměnné (v našem případe je to monom). Tento prvek (v příkladu na třetím řádku ve třetím sloupci) je ve tvaru buď $\pm\cos$ nebo $\pm\sin$. Tento prvek může být přímo použit k nalezení hodnoty první neznámé. Poznamenejme, že obecně jsou v každém intervalu délky 2π dvě řešení.

- Když je určen první úhel, další mohou být určeny pomocí funkce `atan2` porovnáním elementů v řádku a sloupci, v kterém se nachází pivot.

- Je nutné ošetřit situaci, kdy pivot v konstantní matici má hodnotu blízkou ± 1. Jedná se o degenerovaný případ, kdy v každém intervalu délky 2π máme jen jedno řešení. Dalším problémem v této situaci je, že prvky ve sloupci a řádku pivota nelze použít pro určení dalších neznámých, protože konstantní matice obsahuje nuly. Soustředíme se tedy na zbylou podmatici a dosadíme již vypočtenou proměnnou. Zjistíme, že daná podmatice je funkcí součtu nebo rozdílu neznámých a tak dostáváme obecně jednodimenzionální množinu řešení. Při symbolickém řešení můžeme vyjádřit tuto množinu. Pokud úlohu řešíme numericky, můžeme například jeden úhel zafixovat (např. 0). Obecně bychom měli využít další omezení daná úlohou. V robotice tato situace typicky indikuje singulární řešení, např. požadavek kontinuity trajektorie nám napovídá, že máme zjistit polohu ramene před daným bodem a požadovaný pohyb po průchodu daným bodem.

- Jinou situací, kterou je nutné ošetřit, jsou problémy spojené s nepřesností měření nebo výpočtů. Ty mohou například způsobit, že prvky v konstantní matici budou větší než 1 a podobně.

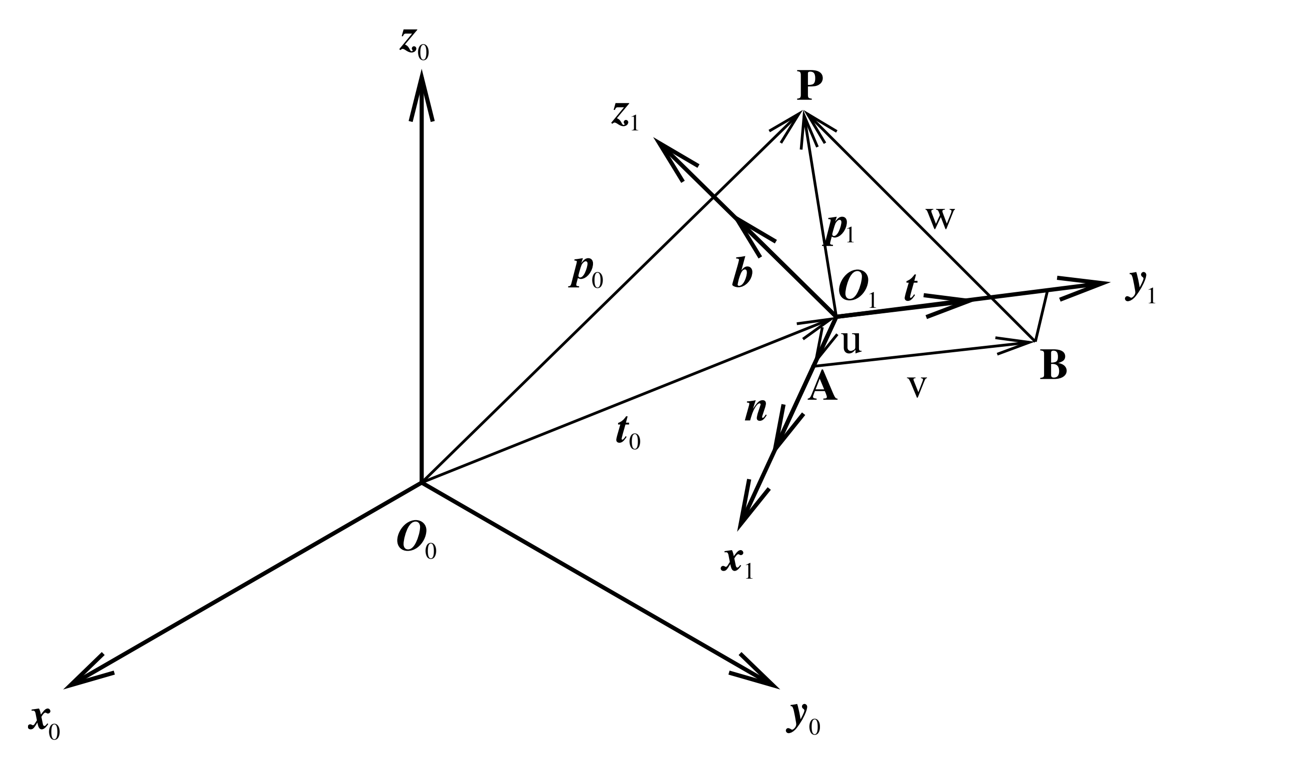

Roll
Yaw
Pitch

Srovnání popisů rotace

Systém	Symbol	Ekvivalent	Par.	Podmínky
Matice rotace	$\mathbf{R}$		9	orthonormální
Vektory os	$\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}$	$\mathbf{R}$	9	vektory jednotkové, kolmé
Eulerovy úhly	ϕ, θ, ψ	yaw, pitch, roll,...	3	
Osa, úhel	$\mathbf{s}, \theta$		4	jednotkový vektor
Kvaternion	$\mathbf{q}$	osa, úhel	4	jednotkový vektor
Vektor rotace	$\mathbf{v}$	osa, úhel	3	

Systém	Výhody	Nevýhody	Užíván
$\mathbf{R}$	snadné výpočty poloh	redundantní	Matlab toolbox
$\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}$	srozumitelný	redundantní	
ϕ, θ, ψ	neredundantní	složitá topologie	Mitsubishi, Staubli, CRS
$\mathbf{s}, \theta$	srozumitelný snadná interpolace	redundantní	
$\mathbf{q}$	snadná interpolace	redundantní	ABB
$\mathbf{v}$	dobrá topologie neredundantní		odhadování rotace

Transformace souřadnic



Známe souřadnice (polohu) bodu P v souřadnicovém systému $O_1 - x_1y_1z_1$: $P^1 = \mathbf{p}_1^1 = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ a hledáme polohu v souřadnicovém systému $O_0 - x_0y_0z_0$: $P^1 = \mathbf{p}_0^0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Pravý dolní index se většinou vztahuje k souřadnicovému systému, ke kterému daný element patří. Pravý horní index říká, v kterém souřadnicovém systému jsou souřadnice elementu vyjádřeny. Například počátek souřadnicového systému 1 (bod) O_1 má souřadnice v souřadnicovém systému 1: $O_1^1 = (0,0,0)^T$, ale v souřadnicovém systému 0 má souřadnice $O_1^0 = O_0^0 + \mathbf{t}_0^0$.

Geometricky:

$$\vec{OP} = \vec{O_0O_1} + \vec{O_1A} + \vec{AB} + \vec{BP}.$$

Algebraicky:

$$P^0 = \mathbf{p}_0^0 = \mathbf{t}_0^0 + u\mathbf{n}^0 + v\mathbf{t}^0 + w\mathbf{b}^0.$$

Přepsáno:

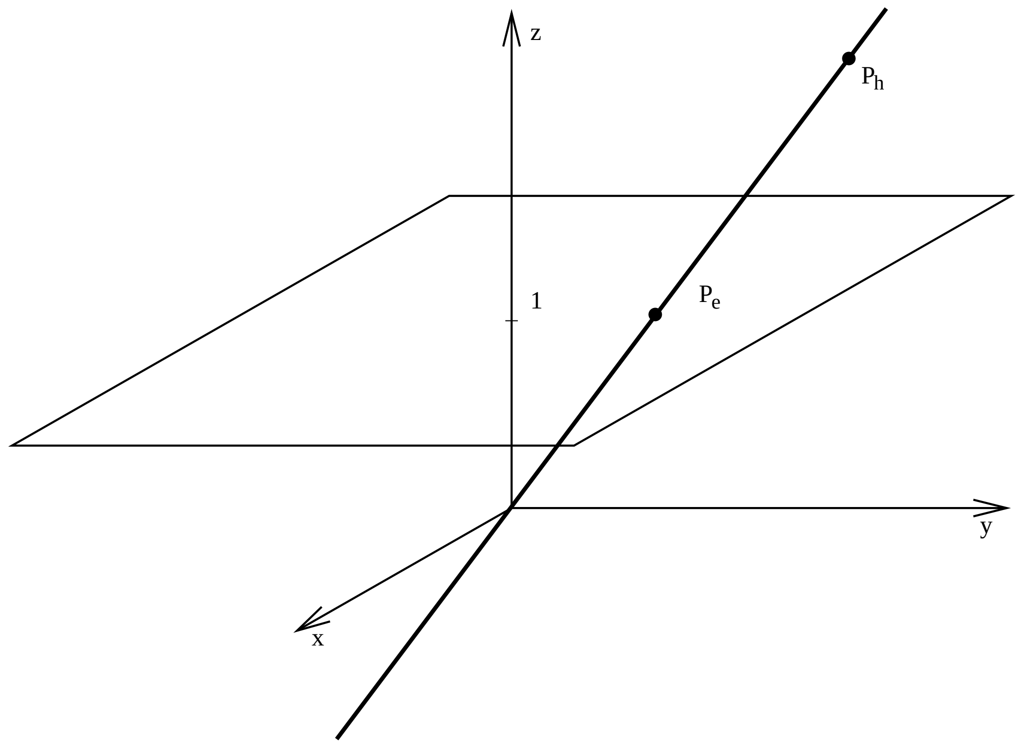
$$\mathbf{p}_0^0 = \mathbf{t}_0^0 + \mathbf{R}_1^0\mathbf{p}_1^1.$$

Obrácená transformace:

$$\mathbf{p}_1^1 = -\mathbf{R}_1^{0T}\mathbf{t}_0^0 + \mathbf{R}_1^{0T}\mathbf{p}_0^0.$$

Homogenní souřadnice

m p
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31



Homogenní souřadnice

Zaveďme homogenní souřadnice takto:

Euklidovské (metrické)		Homogenní - projektivní
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\Rightarrow$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$
$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x/w \\ y/w \\ z/w \end{pmatrix}$	$\Leftarrow$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \wedge w \neq 0$
neexistuje (nevlastní bod)	$\Leftarrow$	$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$

Lze snadno ukázat, že v homogenních souřadnicích:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}^b,$$

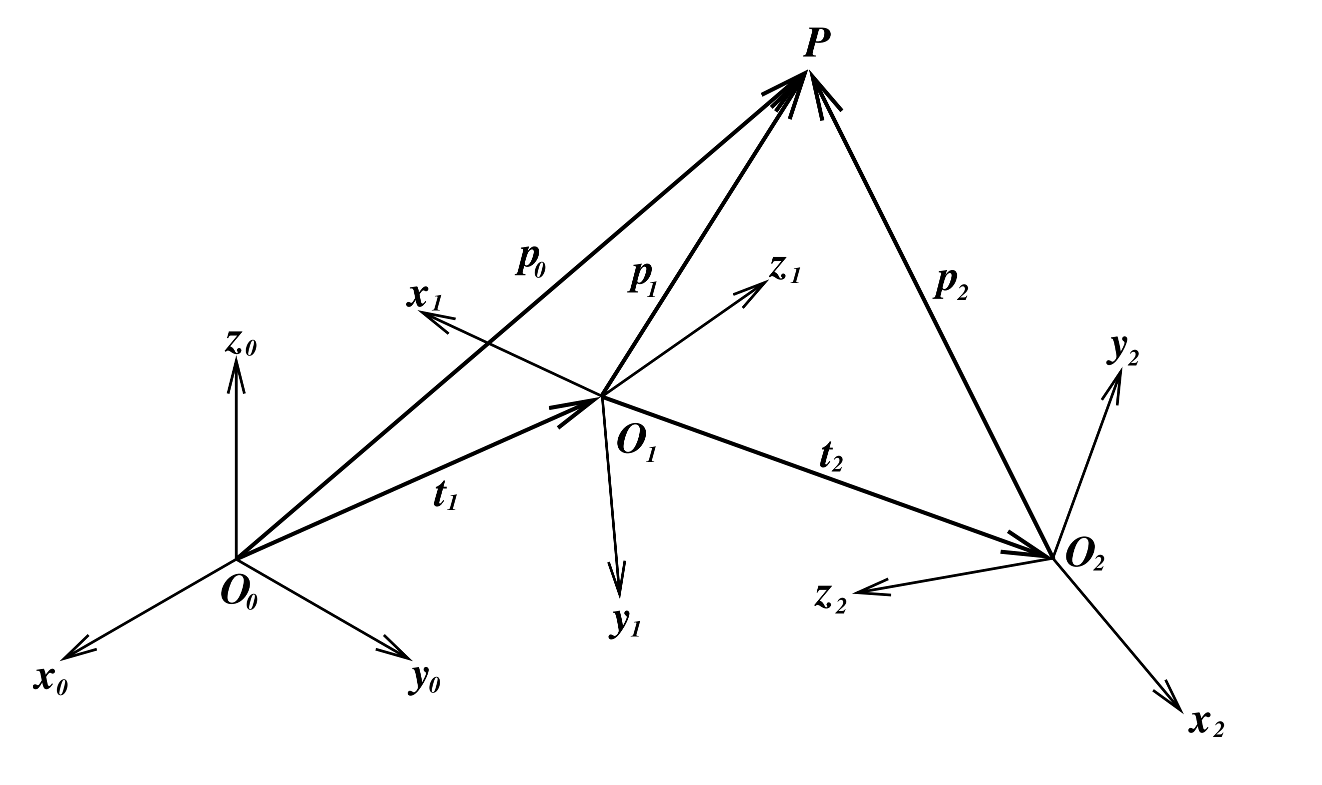
kde $\mathbf{A}$ je matice 4x4:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t}_0^0 \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzní matice:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t}_0^0 \\ 0\,0\,0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posloupnost transformací souřadnic



Transformace přes více souřadnicových systémů v euklidovských souřadnicích

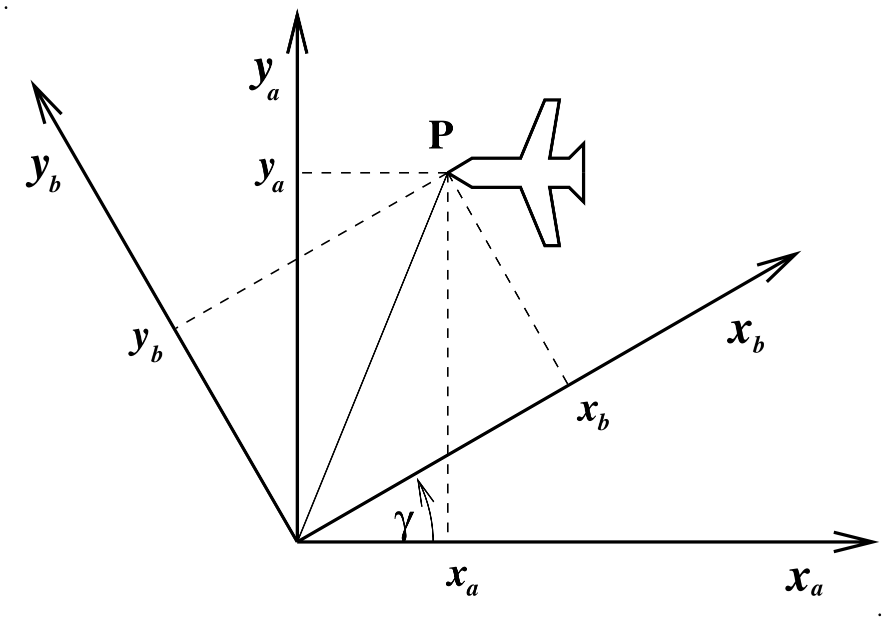
$$P^0 = \mathbf{p}_0^0 = \mathbf{t}_1^0 + \mathbf{R}_1^0\mathbf{p}_1^1 = \mathbf{t}_1^0 + \mathbf{R}_1^0(\mathbf{t}_2^1 + \mathbf{R}_2^1\mathbf{p}_2^2)$$

a v homogenních souřadnicích:

$$P^0 = \mathbf{p}_0^0 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{p}_2^2 = \mathbf{A}_b^0\mathbf{A}_2^b P^2$$

$$P^0 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{A}_3^2\mathbf{A}_4^3\ldots\mathbf{A}_n^{n-1}P^n. \tag{17}$$

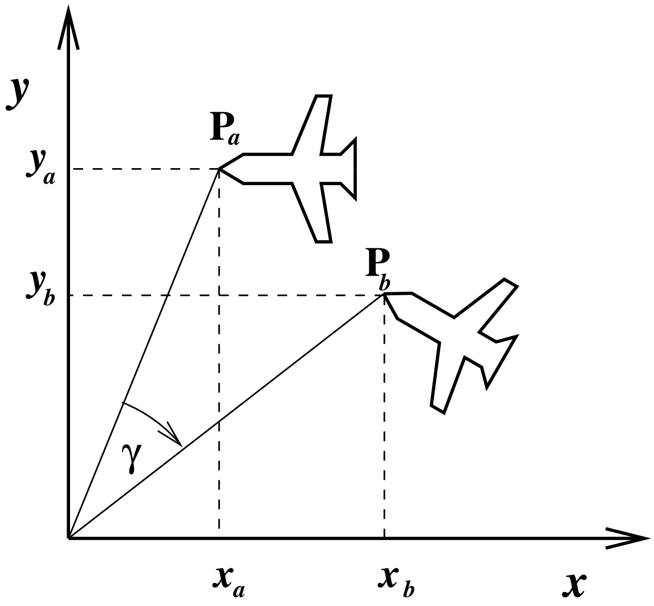
Pasivní versus aktivní transformace — Pasivní



$$\vec{x}_a = \mathbf{R}_b^a(\gamma)\vec{x}_b$$

Pasivní transformace reprezentuje změnu souřadnic.

Pasivní versus aktivní transformace - Aktivní

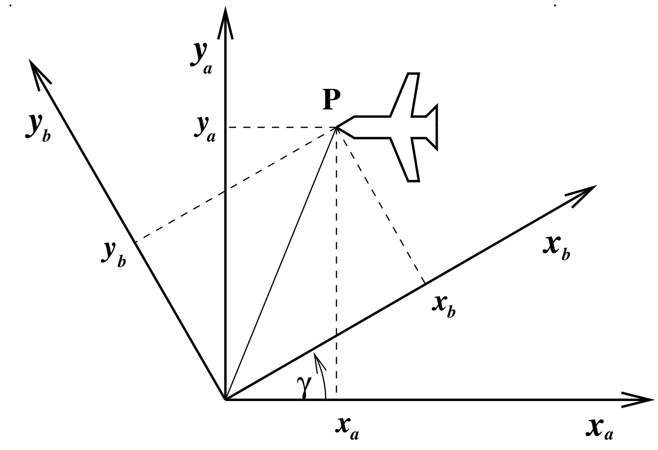


$$\vec{x}_b = \mathbf{R}_b^a(-\gamma)\vec{x}_a = \mathbf{R}_b^a(\gamma)^{-1}\vec{x}_a = \mathbf{R}_a^b(\gamma)\vec{x}_a$$

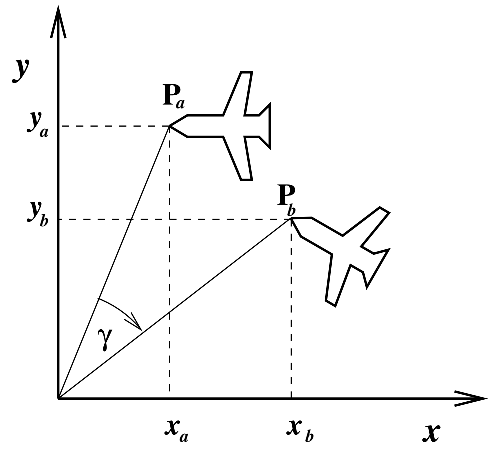
Aktivní transformace reprezentuje pohyb tuhého tělesa v nepohyblivém souřadnicovém systému.

Pasivní versus aktivní transformace - Srovnání

Pasivní



Aktivní



$$\vec{x}_a = \mathbf{R}_b^a(\gamma)\vec{x}_b$$

$$\vec{x}_b = \mathbf{R}_b^a(-\gamma)\vec{x}_a = \mathbf{R}_b^a(\gamma)^{-1}\vec{x}_a = \mathbf{R}_a^b(\gamma)\vec{x}_a$$

Srovnejte pasivní a aktivní transformaci. Povšimněte si orientace úhlu γ. V robotice budeme nadále používat pasivní transformaci. Povšimněte si indexů u rotační matice.