Robotika

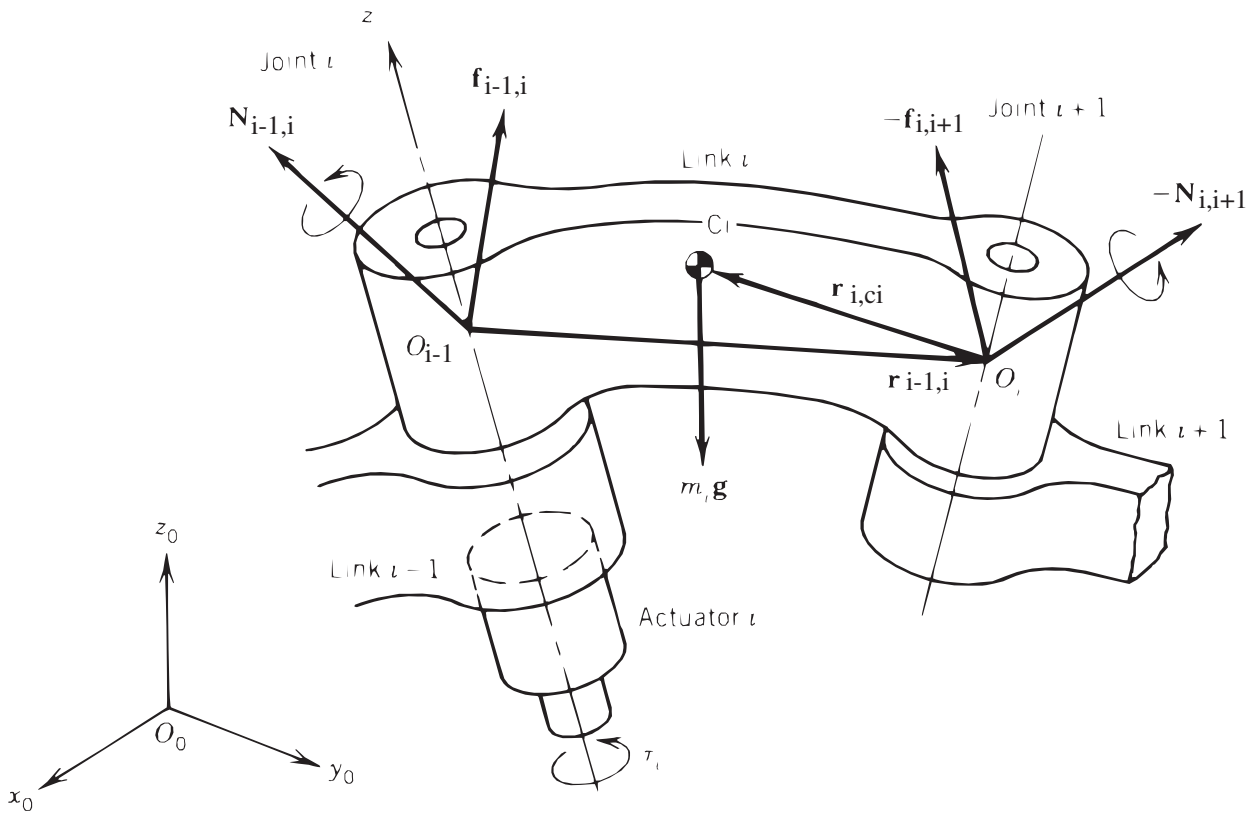
Statika otevřeného kinematického řetězce

Vladimír Smutný

Centrum strojového vnímání

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky (CIIRC)

České vysoké učení technické v Praze



Statika

- Zkoumá síly a momenty působící na robota v klidu.
- Uvažuje tíhu jednotlivých ramen a břemene.
- Uvažuje sílu a moment, kterou působí robot na okolí.
- Uvažuje konečné tuhosti ramen a kloubů.

V našem rozboru budeme uvažovat jen jednoduchý model tuhosti kloubů, ramena považujeme za nekonečně tuhá. Uvažujeme jen otevřený kinematický řetězec.

Na i-té rameno (viz Obr.) působí síly, umístěné do počátku souřadnic i-tého kloubu $\mathbf{f}_{i-1,i}$, $-\mathbf{f}_{i,i+1}$ a tíha ramene $m_i\mathbf{g}$ a momenty $\mathbf{N}_{i-1,i}$, $-\mathbf{N}_{i,i+1}$. Označme dále vektory $\mathbf{r}_{i-1,i} = O_{i-1}O_i$, $\mathbf{r}_{i,ci} = O_iC_i$. Pak můžeme psát podmínky pro statickou rovnováhu sil:

$$\mathbf{f}_{i-1,i} - \mathbf{f}_{i,i+1} + m_i\mathbf{g} = \mathbf{0}, \;\; i = 1, \ldots, n\,. \tag{1}$$

Statická rovnováha momentů vyjádřená vzhledem k těžišti:

$$\mathbf{N}_{i-1,i} - \mathbf{N}_{i,i+1} - (\mathbf{r}_{i-1,i} + \mathbf{r}_{i,ci}) \times \mathbf{f}_{i-1,i} + (-\mathbf{r}_{i,ci}) \times (-\mathbf{f}_{i,i+1}) = \mathbf{0}, \tag{2}$$

Všechny proměnné musí být vyjádřeny ve stejném souřadnicovém systému, například v souřadnicích rámu.

Jako cvičení je možné ukázat, že i při volbě jiného bodu, ke kterému vyjádříme rovnováhu momentů, dospějeme k ekvivalentní soustavě rovnic.

Pro manipulátor s n rameny dostáváme $2n$ vektorových rovnic o $2n + 2$ vektorových neznámých. Jednoznačné řešení dostáváme například tehdy, když volíme sílu a moment, kterým působí okolí na chapadlo. Například při manipulaci břemenem je $\mathbf{f}_{n,n+1}$ rovna tíze břemene a moment je nulový $\mathbf{N}_{n,n+1} = 0$. Nazvěme vektorem sil v chapadle vektor:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n,n+1} \\ \mathbf{N}_{n,n+1} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

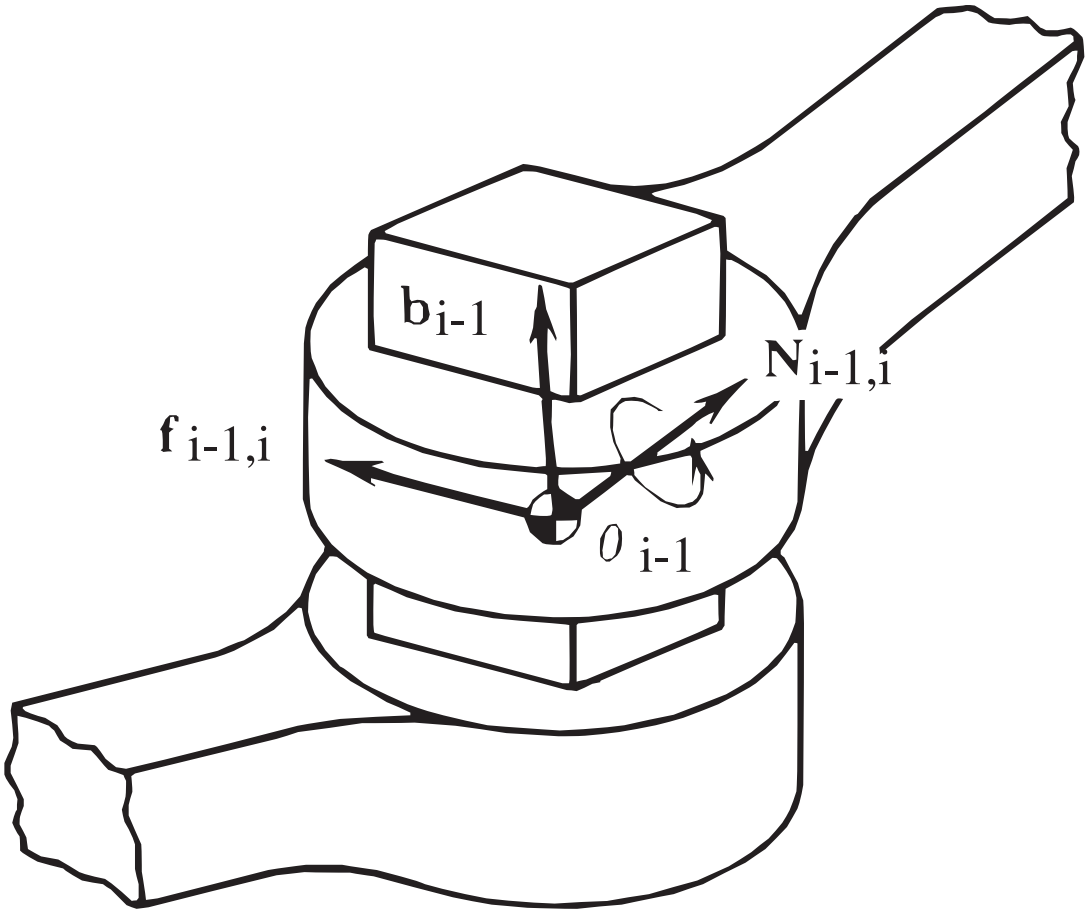
Síla a moment, kterými působí jedno rameno na druhé, jsou částečně absorbovány strukturou manipulátoru a částečně musí být kompenzovány silou vyvozovanou v kloubu. Pro posuvný kloub tedy struktura absorbuje všechny složky momentu a dvě ze složek síly. Pouze složka síly ve směru kloubu musí být kompenzována pohonem kloubu:

$$\tau_i = \mathbf{b}_{i-1}^T \mathbf{f}_{i-1,i}\,. \tag{4}$$

Pro otočný kloub pohonem vyvozovaný moment určíme $i = 1, \ldots, n$.

$$\tau_i = \mathbf{b}_{i-1}^T \mathbf{N}_{i-1,i}\,. \tag{5}$$

Složky, které jsou kompenzovány strukturou, nekonají práci, protože nepůsobí po dráze.



Vektor všech sil a momentů vyvozovaných klouby nazvěme kloubovými momenty a označme:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} . \tag{6}$$

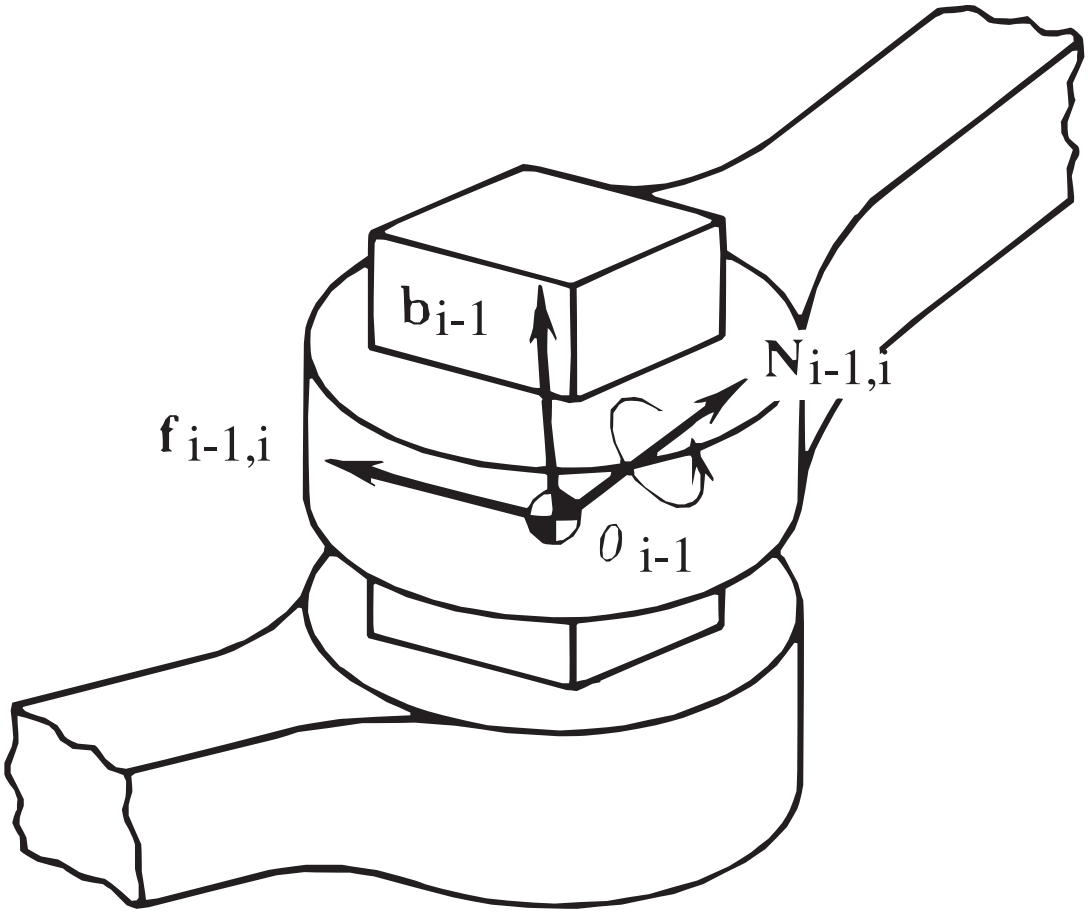
Jestliže robot silově nepůsobí na své okolí $\mathbf{F} = 0$, pak můžeme vypočítat složku kloubových momentů, která odpovídá jen podpírání ramene robotu proti gravitaci: $\boldsymbol{\tau}_G$. Složku $\boldsymbol{\tau}_G$ v dalších výpočtech vynecháme.

Lze ukázat, že kloubové momenty bez složky podpírající robot vypočteme z vektoru sil v chapadle vztahem:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T \mathbf{F} , \tag{7}$$

kde $\mathbf{J}$ je Jakobián manipulátoru. $\boldsymbol{\tau}_G$. v dalších výpočtech vynecháme. Jako cvičení dokažte výše uvedený vztah (například použitím zákona zachování energie). Vypočtěte $\boldsymbol{\tau}$ pro manipulátor z Obr.

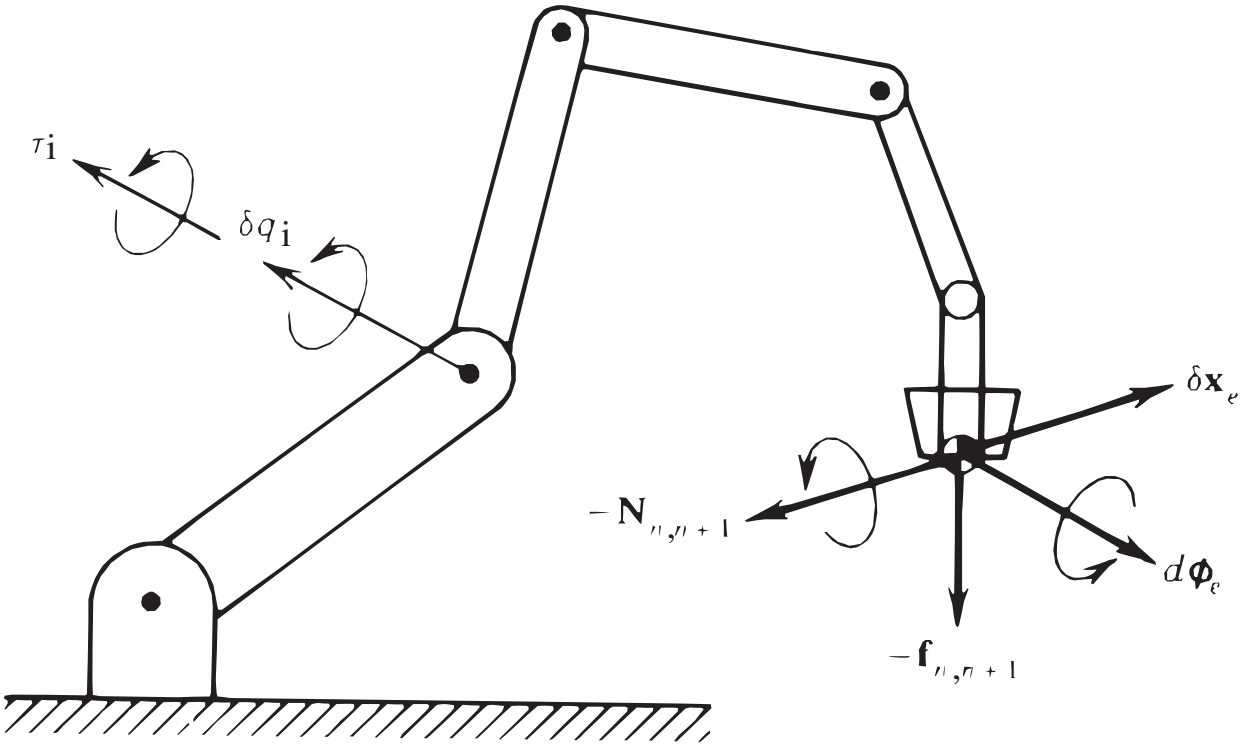
Statika – Síly v posuvném kloubu.



m p

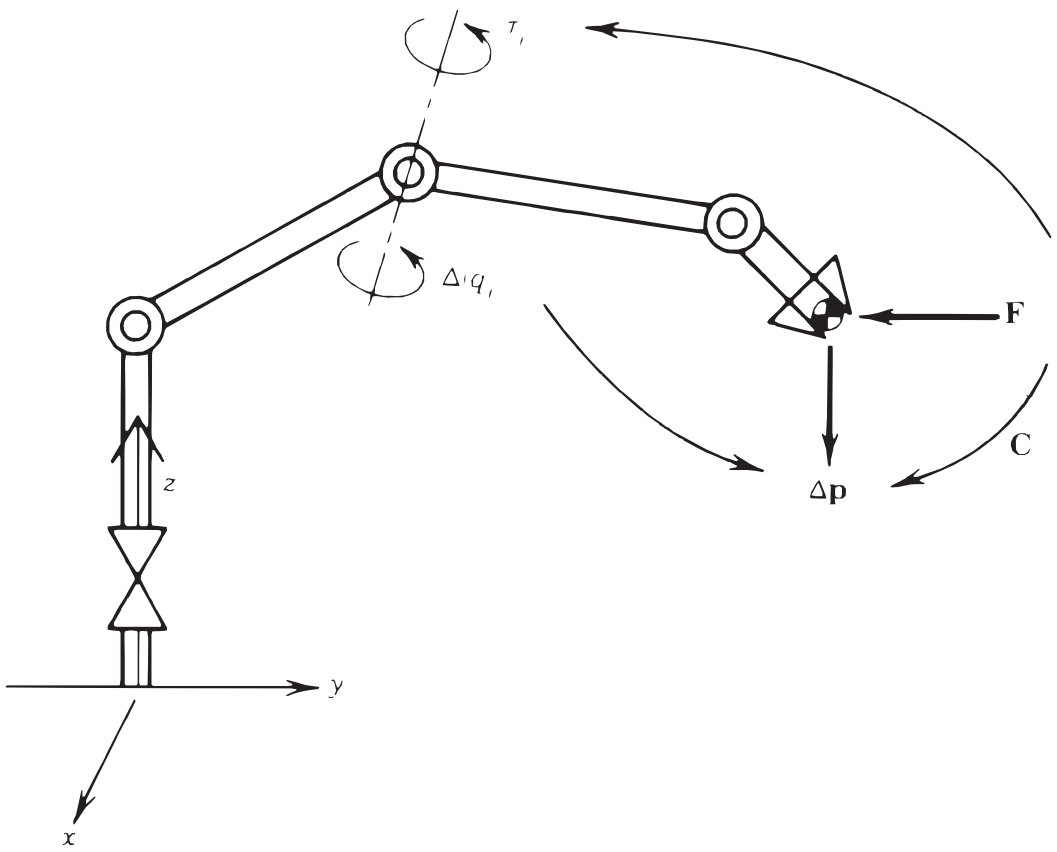
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Statika – Posun a otočení vyvolané silou.



m p

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15



Modelování tuhosti

Tuhost manipulátoru je ovlivněna několika složkami: tuhostí ramen, tuhostí kloubů a podobně. Ramena bývají zpravidla relativně tuhá (výjimkou je např. manipulálator na raketoplánu). Tuhost kloubů můžeme modelovat například pružnou vazbou mezi pohonem a pohybujícím se ramenem. To je dobry predpoklad, protože vyznamná část chyb skutečně takto vzniká, další část (tuhost ramene) lze v malých mezích takto aproximovat (jde vlastně o lineární člen Taylorova rozvoje). Tento model nemodeluje jevy blízké hysterezi. Síla nebo moment τ_i je pak úměrný odchylce polohy kloubu od nezatížené polohy Δq_i konstantou k_i:

$$\tau_i = k_i \Delta q_i \,.$$

Maticově:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{q}\,,$$

kde

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & k_n \end{bmatrix} .$$

Poddajnost v kloubech se projeví na poddajnosti chapadla (viz Obr.Síla $\mathbf{F}$ působící na chapadla musí být kompenzována silami v kloubech $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T\mathbf{F}\,. \tag{8}$$

S použitím modelu pružnosti kloubů se projeví odchylka v kloubech $\Delta\mathbf{q}$.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}\Delta\mathbf{q}\,. \tag{9}$$

Odchylka v kloubech způsobí odchylku chapadla $\Delta\mathbf{p}$:

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{J}\Delta\mathbf{q}\,. \tag{10}$$

Pokud jsou tuhosti nenulové je matice $\mathbf{K}$ invertovatelná a můžeme psát

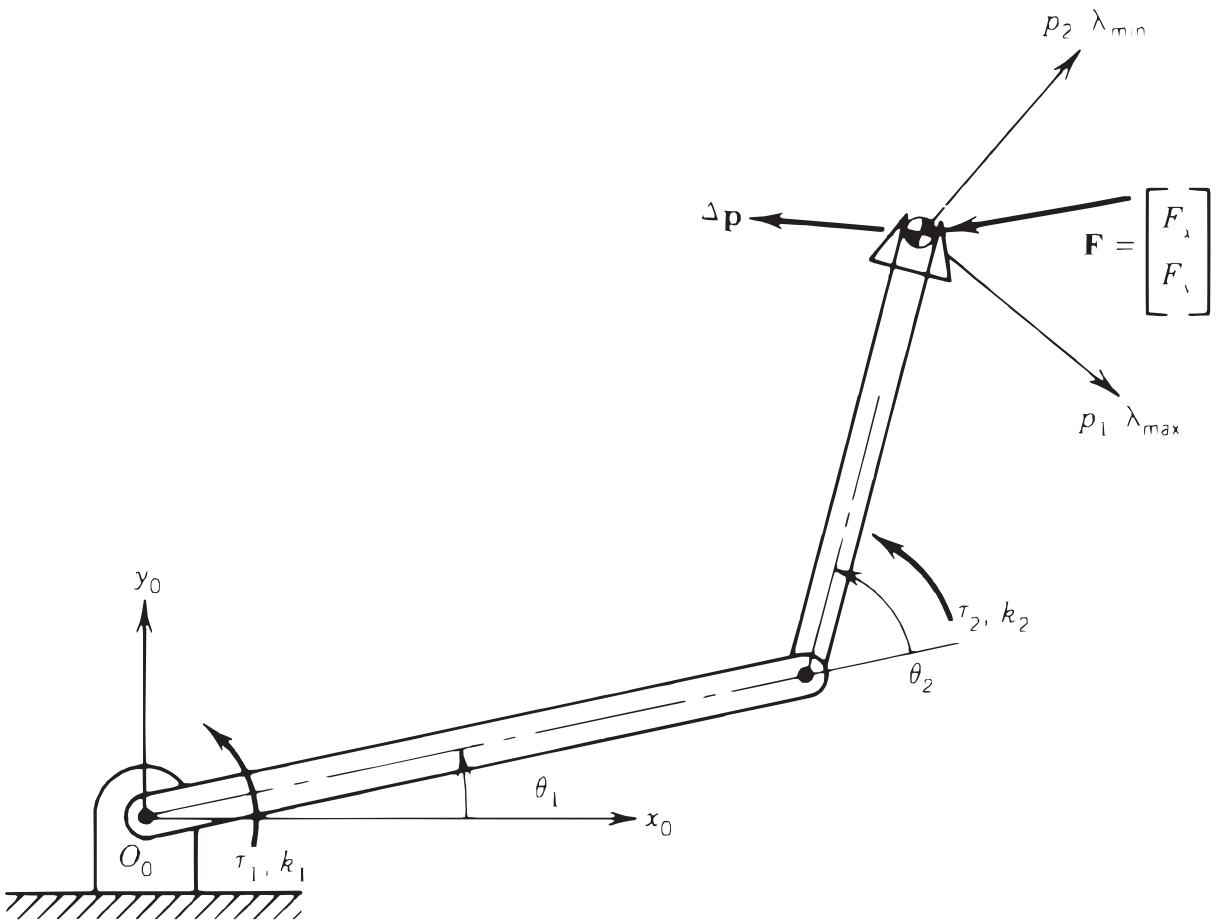
$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{J}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{J}^T\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{F}\,. \tag{11}$$

Matici $\mathbf{C}$ nazýváme maticí poddajnosti chapadla. Pokud je jakobián manipulátoru čtvercový a regulární pak matici $\mathbf{C}$ můžeme invertovat a její inverzi nazýváme maticí tuhosti:

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}^{-1}\Delta\mathbf{p}\,. \tag{12}$$

Pokud je jakobián manipulátoru singulární, existuje neprázdná oblast S_2 (viz Obr. a tedy i neprázdná oblast $N(\mathbf{J}^T)$. Působíme-li silou v oblasti $N(\mathbf{J}^T)$ nevznikají žádné síly v kloubech a tedy manipulátor se jeví jako nekonečně tuhý. Připomeňme, že jakobián a tedy i matice poddajnosti a tuhosti zavisí na poloze manipulátoru.

Statika – Příklad analýzy tuhosti manipulátoru.



Protože odchylka polohy chapadla manipulátoru závisí na poloze manipulátoru, velikosti a směru působení sil na chapadlo, můžeme zkoumat největší a nejmenší odchylku při dané síle. Velikost odchylky pro jednotkovou velikost síly dostaneme:

$$|\Delta\mathbf{p}|^2 = \Delta\mathbf{p}^T\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{F}, \qquad (13)$$

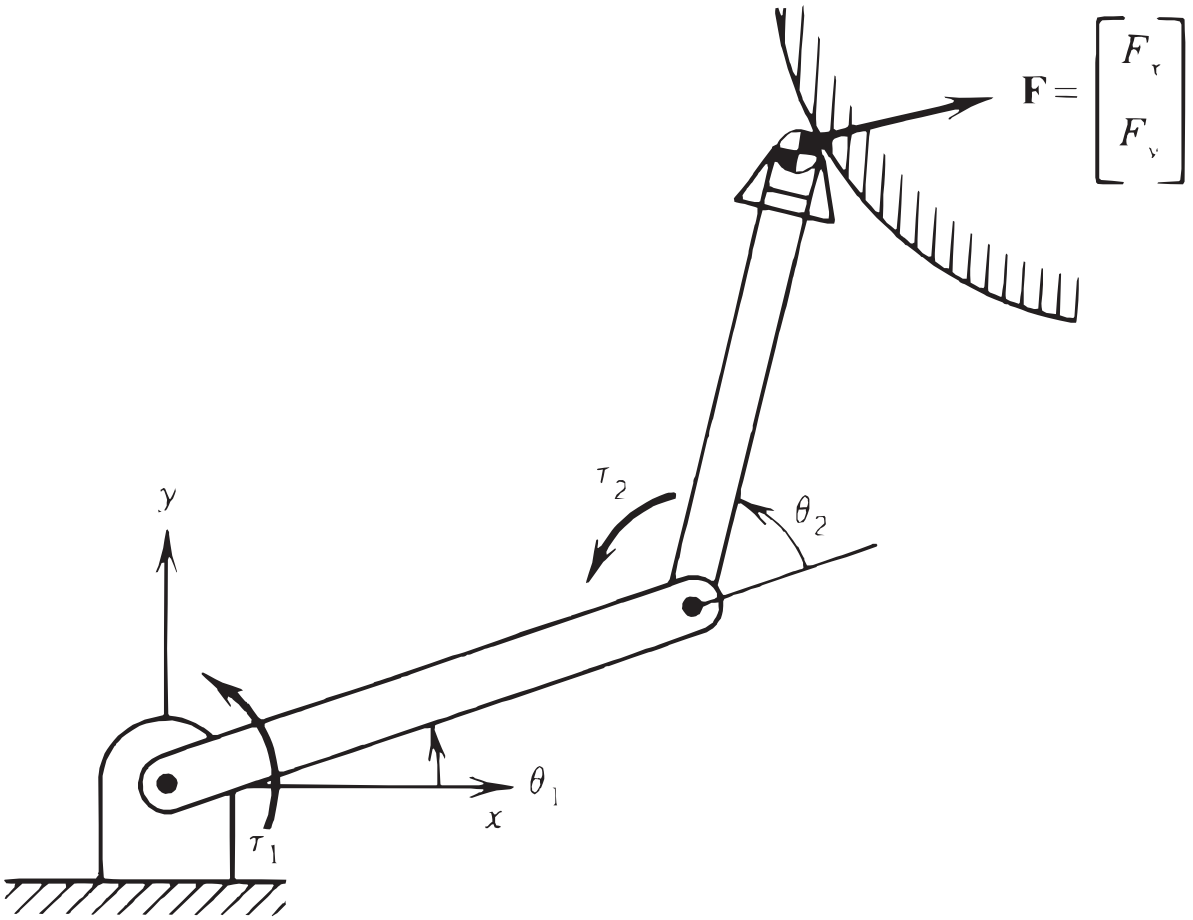
za podmínky

$$|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = 1\,. \qquad (14)$$

Optimalizací zjistíme, že extrémních hodnot $|\Delta\mathbf{p}| = \sqrt{\lambda}$ dosahuje odchylka polohy chapadla ve směrech daných vektory $\mathbf{e}$, kde λ je minimální, resp. maximální vlastní číslo matice $\mathbf{C}^2$ a vektor $\mathbf{e}$ je příslušný vlastní vektor. Transformaci souřadnic generovanou maticí vlastních vektorů pak nazýváme hlavní transformací. Působíme-li silami jen ve směru vlastních vektorů, i odchylka polohy chapadla je pak ve směru hlavních vektorů souhlasně orientovaná s působící silou. Protože matice $\mathbf{C}$ je symetrická, jsou vlastní vektory na sebe kolmé. Zdůrazněme, že síla $\mathbf{F}$ v sobě zahrnuje i momenty sil a odchylka chapadla $\mathbf{p}$ i otočení.

Příklad: Analyzujte manipulátor z Obr.

Statika – Síla působící na chapadlo.

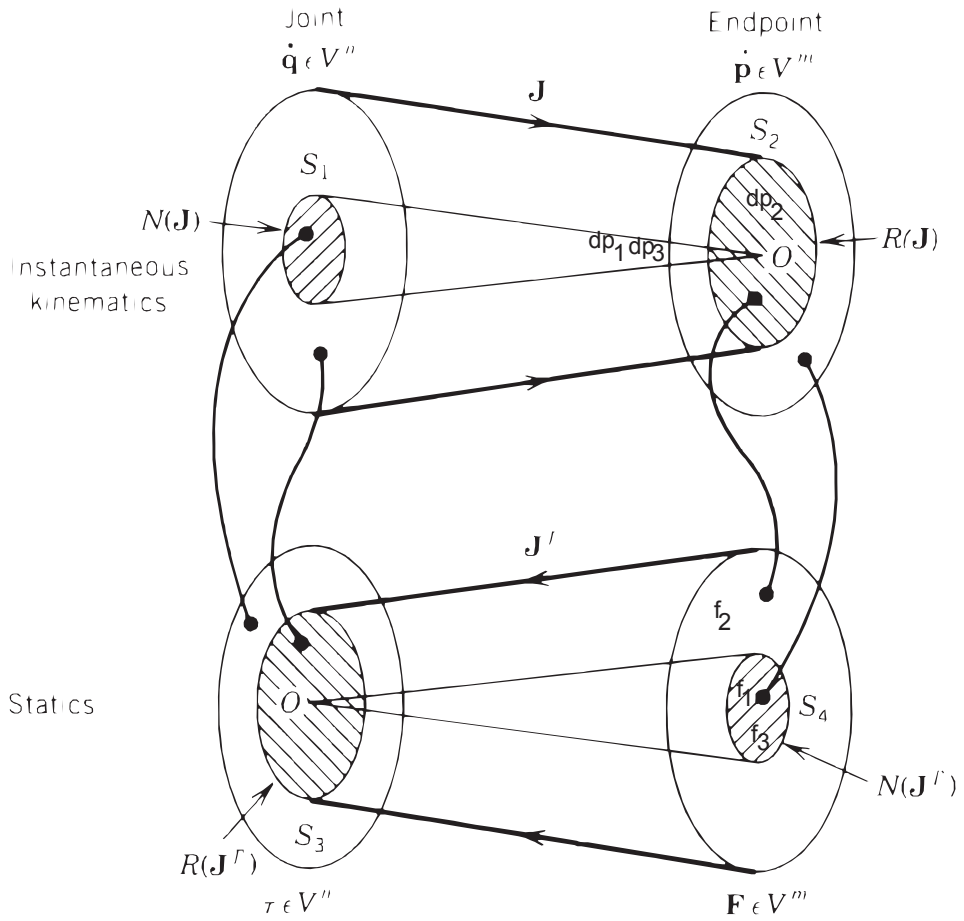


m p
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

Jako cvičení zvolte $\theta_2 = 0$ v Obr. sestavte Jakobián, určete jeho hodnost a porovnejte, které směry odpovídají, kterým oblastem ve schematu

Zdůrazněme, že Jakobián manipulátoru a tedy i konkrétní obsah schematu (dimenze jednotlivých oblastí) závisí na poloze manipulátoru $\mathbf{q}$.

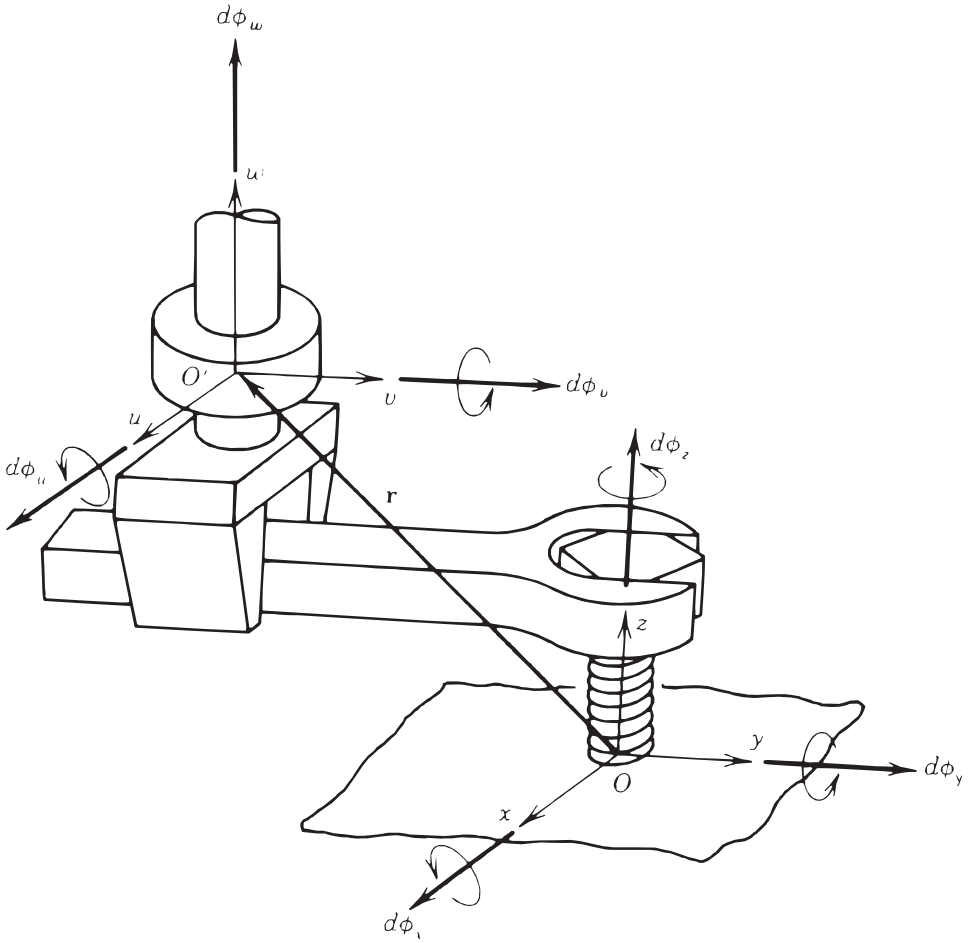
Statika – Mapování pro kinematiku a statiku.



Diskutujme schema na Obr. V horní části je naznačeno zobrazení Jakobiánem manipulátoru z rychlosti kloubových souřadnic do rychlostí kartézských souřadnic chapadla tedy diferenciální kinematika. V dolní části pak vidíme transformaci transponovaným jakobiánem z vektoru sil v chapadle do kloubových momentů tedy statika. Oblast $N(\mathbf{J})$ tedy jádro zobrazení jakobiánem obsahuje rychlosti/infinitesimální pohyby v kloubech, které nemění polohu chapadla. Oblast $R(\mathbf{J})$ popisuje oblast infinitesimálních pohybů chapadla, které lze získat infinitesimálními pohyby v kloubech. Doplněk této oblasti S_2 označuje infinitesimální pohyby chapadla, které manipulátor nemůže provést.

Oblast $N(\mathbf{J}^T)$, jádro zobrazení transponovaným jakobiánem, je množina všech sil v chapadle, které jsou kompenzovány strukturou manipulátoru. Oblast $R(\mathbf{J}^T)$ reprezentuje kloubové momenty, které mohou kompenzovat síly v chapadle. Oblast S_3 znázorňuje kloubové momenty, které nemohou být kompenzovány silami v chapadle. Ve směru, ve kterém infinitesimální pohyby v kloubech nezpůsobují pohyby chapadla($N(\mathbf{J})$), nelze sílu/moment v kloubu (S_3) kompenzovat žádnou silou/momentem v chapadle.

Statika – Příklad



Transformace souřadnic a sil

Máme-li dány dvě souřadnicové soustavy, můžeme vyjádřit přenos infinitesimálních pohybů, sil a momentů mezi nimi. Označme $\mathbf{q}$ a $\mathbf{p}$ souřadnice v jedné a druhé soustavě. Vztah mezi infinitesimálními pohyby pak opět můžeme vyjádřit vztahem:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{J} d\mathbf{q}\,, \tag{15}$$

kde $\mathbf{J}$ je Jakobián příslušné transformace souřadnic. Pak pro transformaci zobecněných sil $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ platí:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J}^T \mathbf{P}\,. \tag{16}$$

Použití lze dokumentovat na příkladu z obrázku. Známe sílu, kterou je třeba působit na šroub a chceme spočítat, jakou silou máme působit chapadlem v bodě O'. V bodě O' bychom pak třeba umístili snímač síly a momentu a vypočtená hodnota sil by nám pak sloužila jako požadovaná veličina do zpětnovazebního regulátoru.

Zvolíme popis klíče $d\mathbf{q} = [dx, dy, dz, d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z]^T$ v souřadnicové soustavě $O - xyz$ a $d\mathbf{p} = [du, dv, dw, d\phi_u, d\phi_v, d\phi_w]^T$ v souřadnicové soustavě $O' - uvw$. Snadno ukážeme, že:

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \\ d\phi_u \\ d\phi_v \\ d\phi_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & r_z & -r_y \\ 0 & 1 & 0 & -r_z & 0 & r_x \\ 0 & 0 & 1 & r_y & -r_x & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\phi_x \\ d\phi_y \\ d\phi_z \end{bmatrix} = \mathbf{J} d\mathbf{q} \tag{17}$$

Pokud zvolíme zobecněné síly v souladu s volbou souřadnic, tj. $\mathbf{Q} = [\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z, \mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_z]^T$ v soustavě $O - xyz$ a $\mathbf{P} = [\mathbf{F}_u, \mathbf{F}_v, \mathbf{F}_w, \mathbf{M}_u, \mathbf{M}_v, \mathbf{M}_w]^T$, pak

$$d\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \mathbf{M}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & -r_z & r_y & 1 & 0 & 0 \\ r_z & 0 & -r_x & 0 & 1 & 0 \\ -r_y & r_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_v \\ \mathbf{F}_w \\ \mathbf{M}_u \\ \mathbf{M}_v \\ \mathbf{M}_w \end{bmatrix} \tag{18}$$

Vyřešte samostatně pro případ, že osa v prochází osou z pro jakoukoliv polohu při utahování šroubu.