Zjednodušení generativního systému redukcí rozlišení

Ze studie zahrnující dotaz na vzdělání. Obor hodnot v_i:

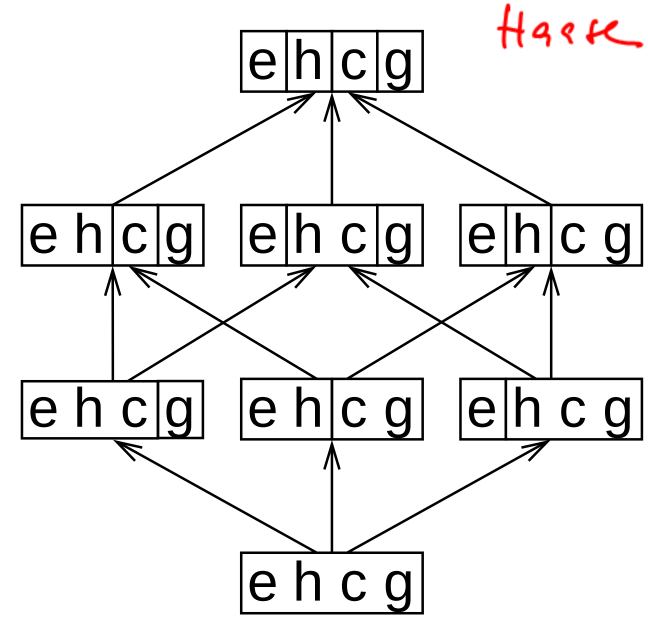
e – základní vzdělání
h – střední vzdělání
c – bakalář
g – magistr

Možné redukce rozlišení

cg	–	vysoké
hc	–	střední nebo bakalářské
eh	–	ne vyšší než střední
ehc	–	nižší než magisterské
hcg	–	vyšší než základní
ehcg	–	jakékoliv (triviální případ)

diagram redukcí rozlišení oboru hodnot **jedné** proměnné v_i reprezentuje částečné uspořádání

Hasse

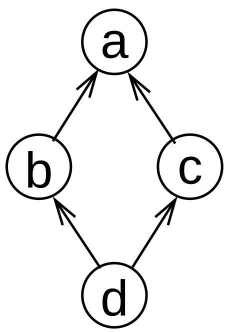


Převzato z Klir, G. Architecture of Systems Problem Solving, 1985

Diagram redukcí rozlišení pro dvě proměnné

Obory hodnot $\mathcal{R}(v_i) = \{0, 1, 2\}$, $i = 1, 2$, $0 \leq 1 \leq 2$

jedna proměnná v_1

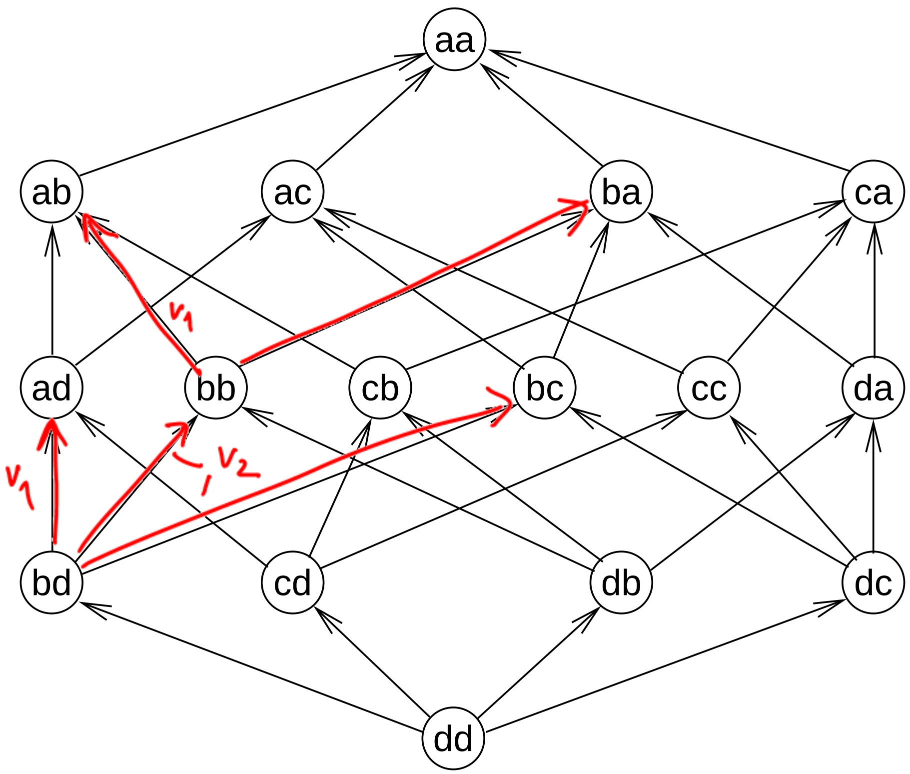


a = $\boxed{0|1|2}$
b = $\boxed{0\ 1|2}$
c = $\boxed{0|1\ 2}$
d = $\boxed{0\ 1\ 2}$

- počet možností pro $m = 3$, $n = 1$:

$$\Lambda_{m,1} = 2^{m-1} = 4$$

dvě proměnné v_1, v_2: ca = $\boxed{0|1\ 2}$, $\boxed{0|1|2}$, atd



- dc odpovídá eliminaci proměnné v_1
- počet možností pro $m = 3$, $n = 2$:

$$\Lambda_{m,2} = (2^{m-1})^n = 4^2 = 16$$

- diagram zahrnuje zjednodušení vylučováním proměnných i redukcí rozlišení
- grafový součin diagramů pro jednu proměnnou

Volba zjednodušení generativního systému

1. Vygeneruj všechny redukce, vypočti generativní neurčitost a spočti počet stavů nenulové pravděpodobnosti.

maska:

1	3
2	4

v_1, v_2

$$\text{ac} = \underbrace{\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}}_{v_1}, \underbrace{\boxed{0}\boxed{\overset{1}{1\ 2}}}_{v_2}$$

$$\text{cc} = \underbrace{\boxed{0}\boxed{1\ 2}}_{v_1}, \underbrace{\boxed{0}\boxed{1\ 2}}_{v_2}$$

s_1	s_2	s_3	s_4	p
0	0	0	1	0.2
0	1	1	1	0.1
0	1	1	~~2~~1	0.1
1	1	2	~~2~~1	0.1
1	~~2~~1	1	~~2~~1	0.2
1	~~2~~1	2	~~2~~1	0.1
2	~~2~~1	0	0	0.2

s_1	s_2	s_3	s_4	p
0	0	0	1	0.2
0	1	1	1	0.2
1	1	2	1	0.2
1	1	1	1	0.2
2	1	0	0	0.2

$H(s_3, s_4 \mid s_1, s_2) = 0.4$ 5 stavů

s_1	s_2	s_3	s_4	p
0	0	0	1	0.2
0	1	1	1	0.2
1	1	1	1	0.4
1	1	0	0	0.2

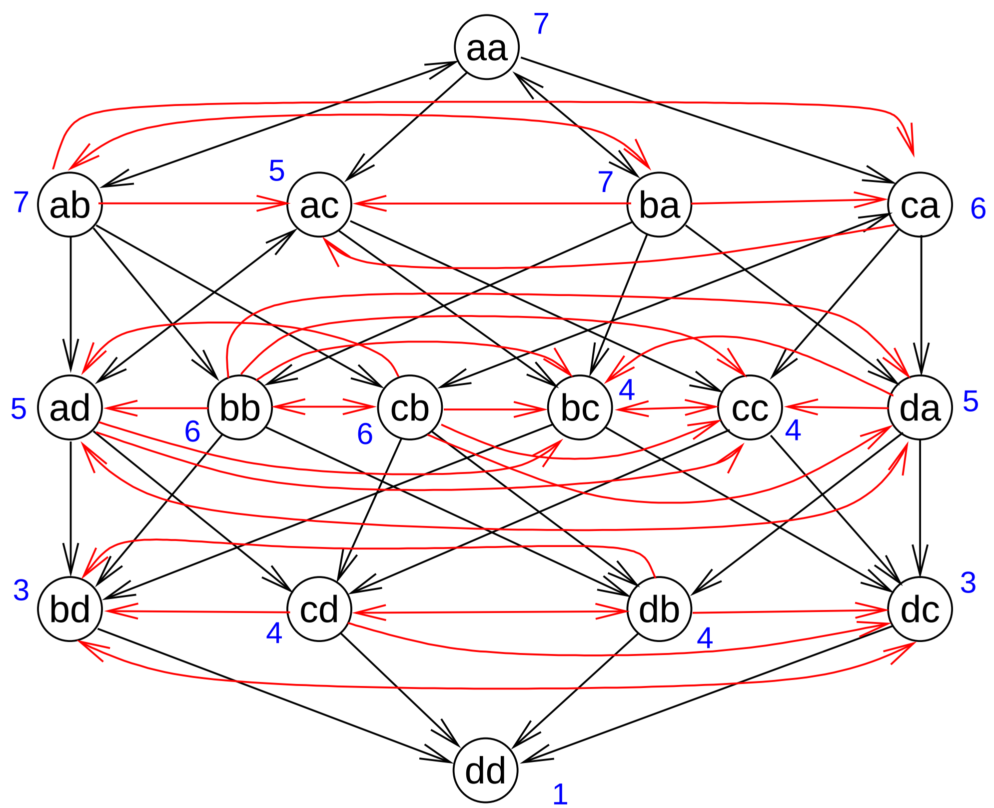
2. Zkonstruuj graf, jehož hrany směřují od uzlů s nižším počtem stavů k uzlům s vyšším nebo stejným počtem stavů a zároveň od uzlů s vyšší generativní neurčitostí k uzlům s nižší nebo stejnou generativní neurčitostí.

3. Uzly, které nemají následníka, reprezentují množinu řešení.

Postup na diagramu zjemnění rozlišení

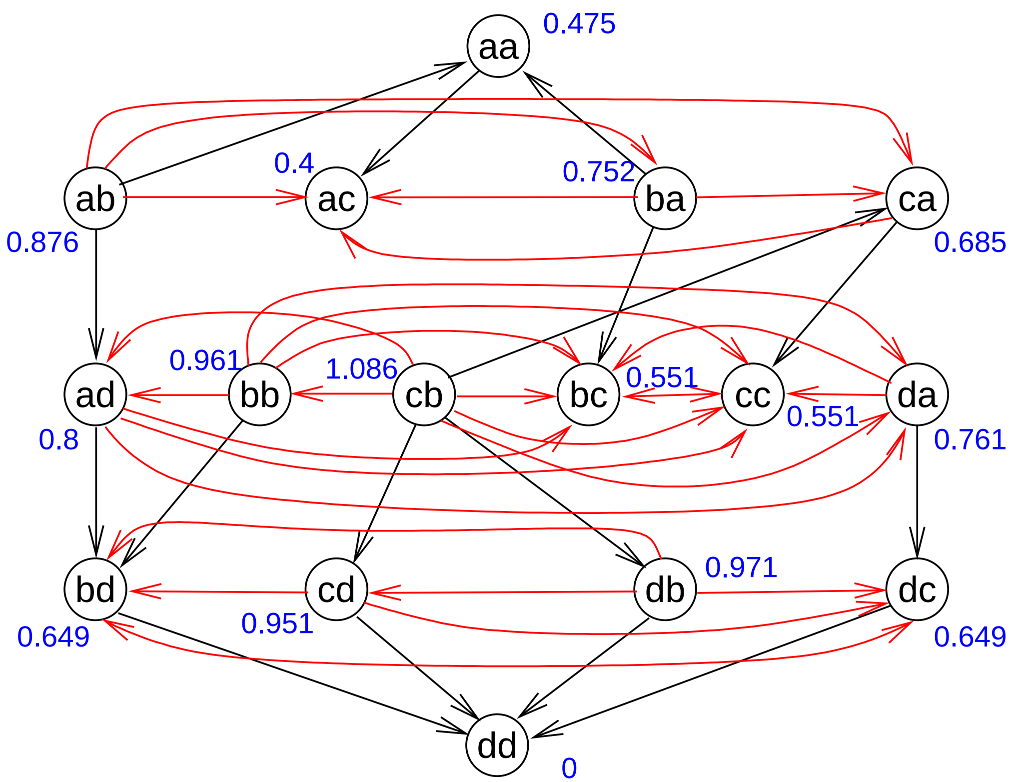
1. Zruš orientaci všech hran
2. Doplň hrany tak, aby vznikly kliky na jednotlivých úrovních diagramu
3. Všechny hrany orientuj tak, aby šipky směřovaly od vyššího k nižšímu nebo stejnému počtu stavů
4. Odstraň všechny hrany, které směřují od nižší k vyšší generativní neurčitosti
5. Odstraň tranzitivní hrany nepovinné
6. Uzly, které nemají následníka, reprezentují množinu řešení

Kroky 1 až 3:

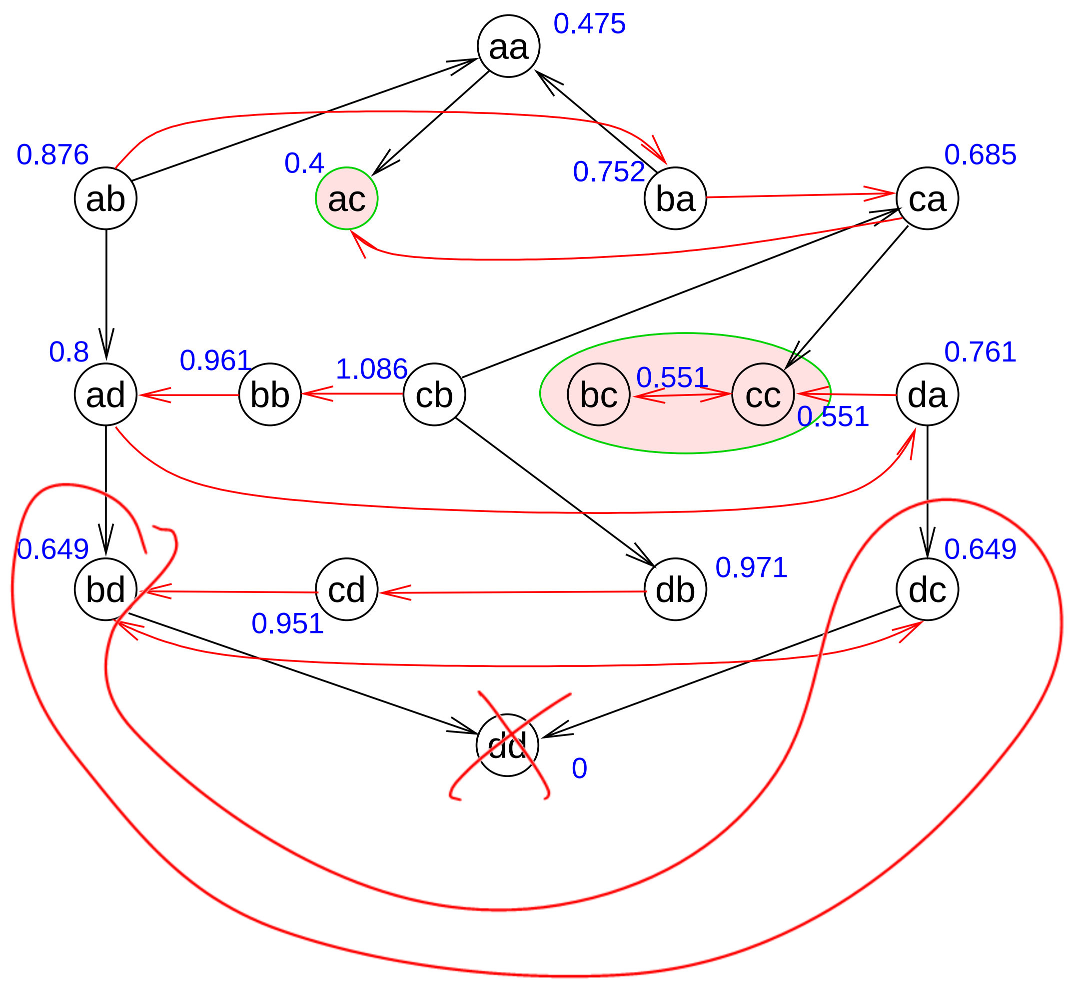


pokračování

Krok 4:



Kroky 5 a 6:



Počet rozkladů oboru hodnot v_i s rozlišením na m úrovní

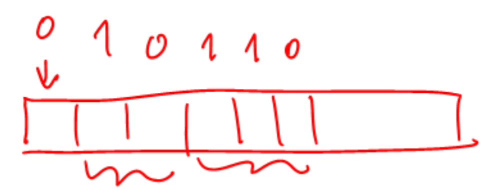
1. Obor hodnot $\mathcal{R}(v_i)$ **není** úplně uspořádaný, $m = |\mathcal{R}(v_i)|$

$$\Lambda_m = \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \Lambda_i, \quad \Lambda_0 = 1 \qquad \geq 2^{m-1}$$

(*1) za lepší dolní odhad

2. Obor hodnot $\mathcal{R}(v_i)$ **je** úplně uspořádaný

$$\Lambda'_m = 2^{m-1}$$



$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_m$ stavy systému s jednou proměnnou; s_i a s_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, m-1$ spojeny nebo ne $\Rightarrow$ 2^{m-1} možností

m	2	3	4	5	6	7	8	9
Λ_m	2	5	15	52	203	877	4140	21147
Λ'_m	2	4	8	16	32	64	128	256

n proměnných v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ se stejným rozkladem

$$\Lambda_{m,n} = (\Lambda_m)^n$$

PC: Identifikace struktury zobecněného dynamického systému

Důležitý problém v obecné teorii systémů.

1. Podsystém a nadsystém.
2. Definice dekompozice systému.
3. Problém rekonstrukce systému:
   a. lokální a globální konzistence dynamických systémů,
   b. jednoduchá a iterativní spojovací procedura.
4. Problém identifikace struktury:
   a. generátor rekonstrukčních hypotéz,
   b. kvalita rekonstrukční hypotézy,
   c. identifikační procedura.
5. Příklad identifikace na skutečném systému.

Podsystém dynamického systému

systém ^1F

v_1	1	2
v_2		3
v_3	4	5
v_4		6

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	$^1p_B(s)$
0	0	0	0	0	0	0.20
0	0	0	0	1	0	0.05
0	0	1	1	0	0	0.05
0	1	0	0	0	0	0.05
1	1	0	0	1	0	0.10
1	1	1	0	0	0	0.05
1	1	1	0	1	0	0.05
1	1	1	1	0	0	0.10
1	1	1	1	1	0	0.05
1	1	1	1	1	1	0.30

systém ^2F

w_A	a	b
w_B		c

s_a	s_b	s_c	$^2p_B(s)$
0	0	0	0.30
0	1	0	0.05
1	1	0	0.35
1	1	1	0.30

- Jde o nadsystém a podsystém $^2F \sqsubset {}^1F$?
- Musíme vědět, že
  1. $w_A = v_1, \quad w_B = v_4$
  2. parametrizační množina je stejná
- Potom můžeme zkontrolovat:
  1. obory hodnot $\mathcal{R}(w_A) = \mathcal{R}(v_1)$, $\mathcal{R}(w_B) = \mathcal{R}(v_4)$
  2. vnoření masky $^2M \subset {}^1M$, $s_a = s_1, \quad s_b = s_2, \quad s_c = s_6$
  3. marginalitu ^2p_B vzhledem k ^1p_B

Podsystém a nadsystém dynamického systému

Def: ${}^iF = ({}^iA, {}^iB;\, {}^iM, {}^ip_B)$ je podsystém systému $F = (A, B;\, M, p_B)$, když platí následující podmínky:

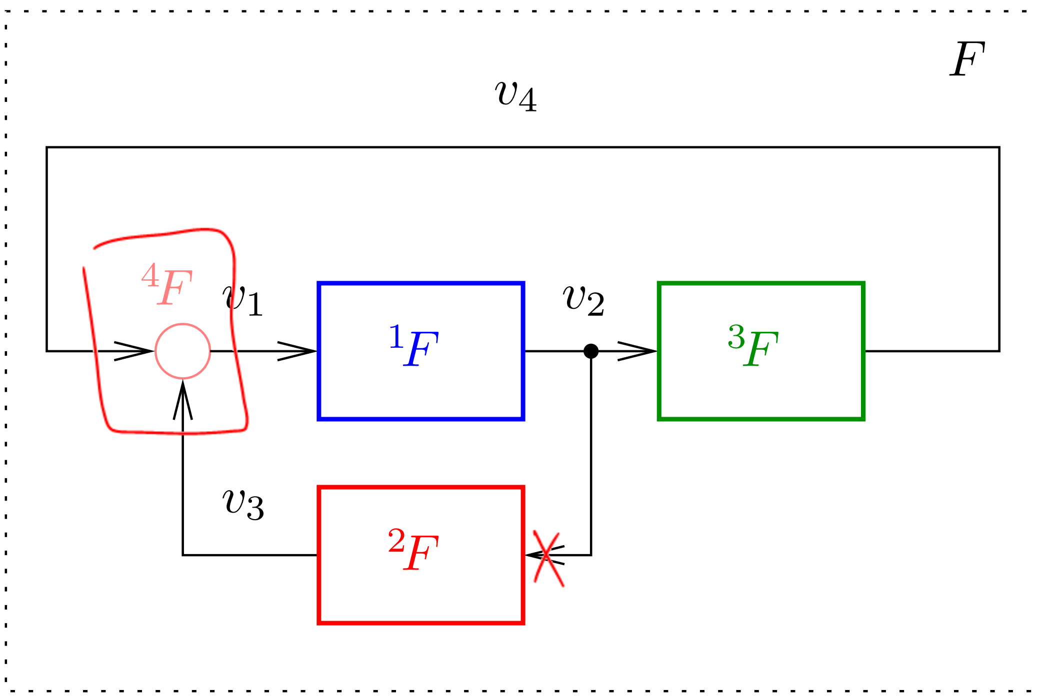
1. **kompatibilita s F** (ztotožnění atributů a parametrů)
   - má stejnou parametrizační množinu: ${}^iB = B$
   - obory hodnot základních proměnných V_j zachovány
2. **vnoření ${}^iF \sqsubseteq F$**
   a. množina vzorkovacích proměnných je vnořena: ${}^iS \subseteq S$
   b. (data pro proměnné v ${}^iS$ jsou zachována)
   $\Rightarrow$ maska je vnořena ${}^iM \subseteq M$
   $\Rightarrow$ funkce přípustnosti ${}^ip_B$ je marginální k p_B

$\Rightarrow$ **Hierarchie podsystémů**

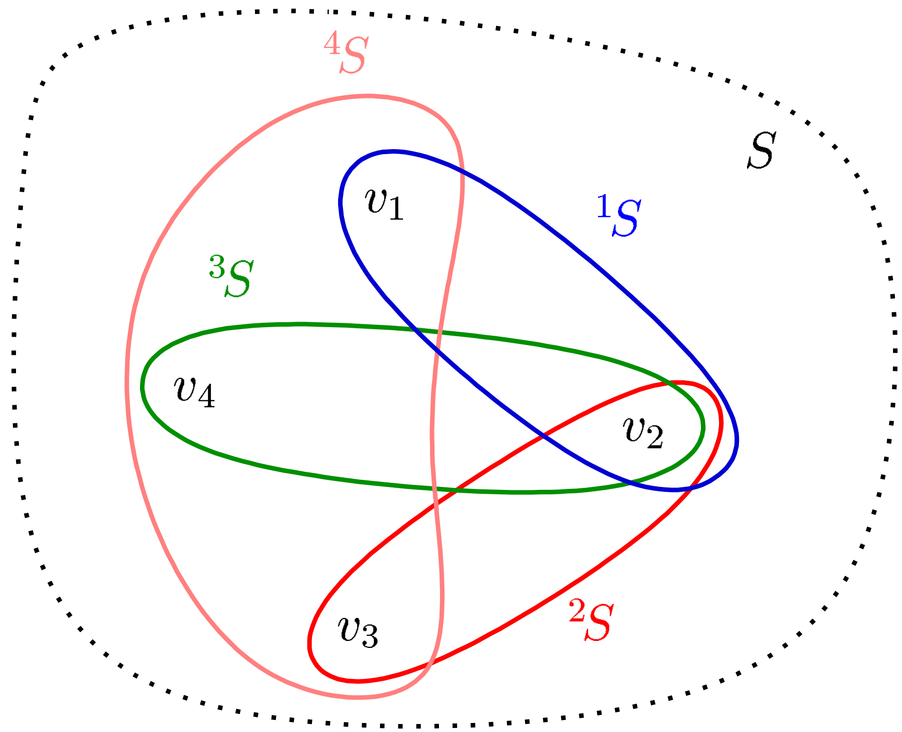
Konvence: S značí dále pouze množinu (vzorkovacích) proměnných dynamického systému F. Místo ${}^iF \sqsubseteq F$ budeme používat zkráceně ${}^iS \sqsubseteq S$.

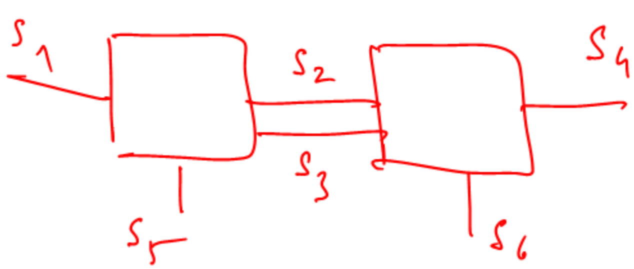
Dekompozice systému

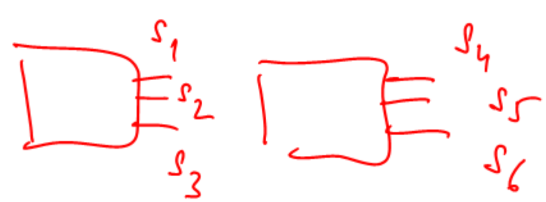
blokové vyjádření struktury



struktura jako rozklad množiny vzorkovacích proměnných







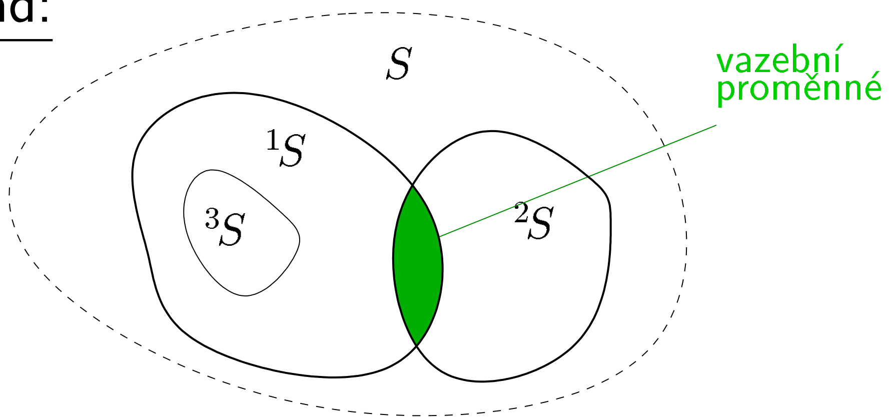
$$p(s_1, \dots, s_6) = p(s_1, s_2, s_3) \cdot p(s_4, s_5, s_6)$$

Dekompozice systému

Celkový systém – obsahuje všechny proměnné.

Dekompozice: Množina podsystémů $G = \{{}^1S, {}^2S, \ldots, {}^qS\}$ celkového systému S, taková, že žádné dva ${}^jS$ a ${}^kS$ nejsou navzájem podsystémy: ${}^jS \not\sqsubseteq {}^kS$

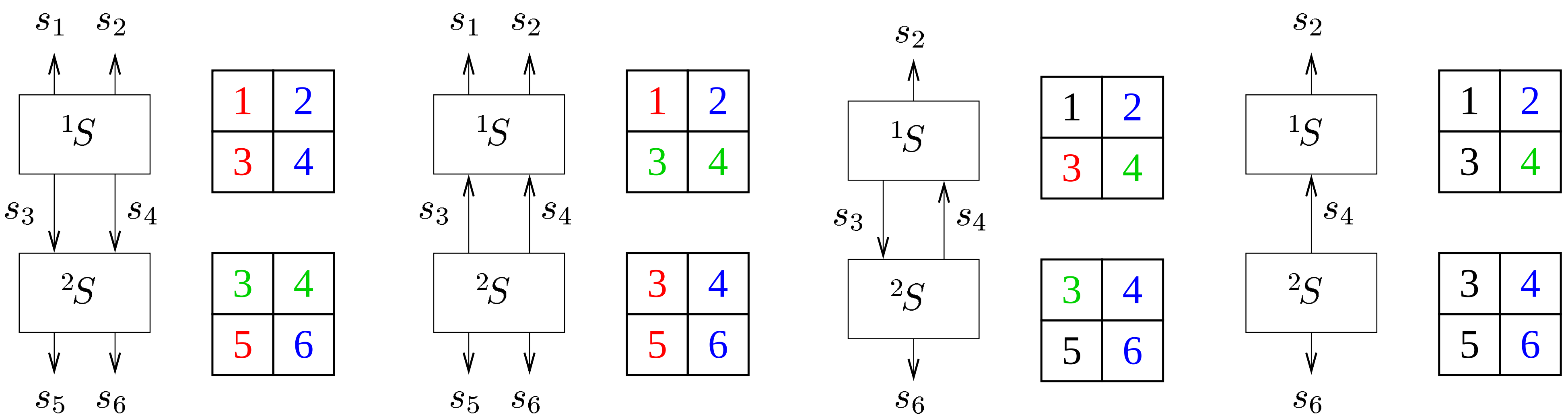
Protipříklad:



Podmínka iredundance: podsystém ${}^3S \sqsubset {}^1S$ nenese žádnou novou informaci o S a nepatří tedy do dekompozice systému S.

- Vazební proměnné mezi podsystémy: $C_{k,l} = {}^kS \cap {}^lS$
- Orientované vazby: rozklad proměnných na vstupní a výstupní.
- Proměnná může být deklarována jako výstupní jen v jednom podsystému (jednoznačnost řízení)

Rozklad proměnných na vazební vstupní, vazební výstupní generující, vazební výstupní generované a nevazební generující proměnné



- celkem 24 možností
- identifikace struktury systému není tímto rozkladem ovlivněna
- orientace vazby se pozná dle generativní neurčitosti příslušné proměnné vzhledem k 1. nebo 2. systému

kauzalita se takto ale nezjistí

Rekonstrukce a identifikace: úvod

Rekonstrukce systému

Konstrukce hypotézy o nejlepším celkovém systému S, je-li dána jeho dekompozice $\{{}^1S, {}^2S, \dots, {}^qS\}$.

Aplikace:

1. inference celkového systému z dílčích
2. procedura nutná pro identifikaci

Identifikace struktury

Nejlepší dekompozice systému S na $\{{}^1S, {}^2S, \dots, {}^qS\}$.

Aplikace:

1. zjednodušení systému (např. rozpoznávání: jednodušší modely se odhadují lépe z dat)
2. nalezení struktury ve složitém systému (např. analýza kritických vazeb a závislostí)

Velikost reprezentace celkového a dekomponovaného systému

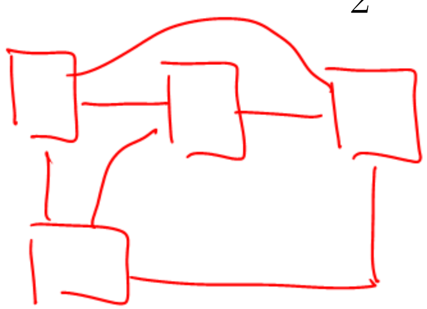
k — počet stavů jedné proměnné

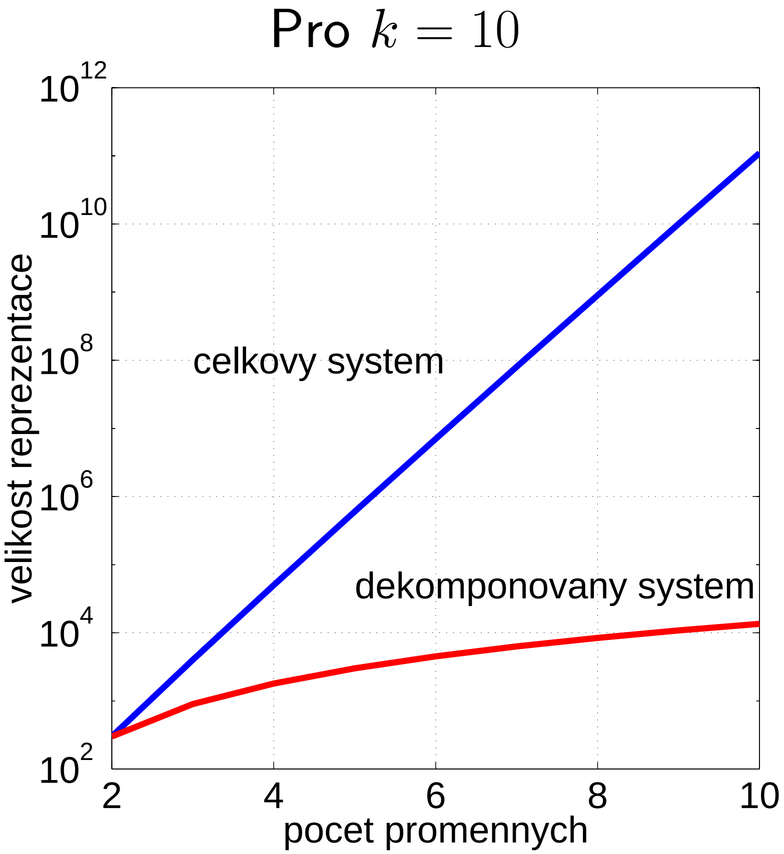
n — počet proměnných v systému

$(1+n)\,k^n$ velikost reprezentace celkového systému funkcí přípustnosti

$\frac{3}{2}\,k^2 n\,(n-1)$ velikost reprezentace dekompozice, kde každý podsystém má jen dvě proměnné (Gibbs)

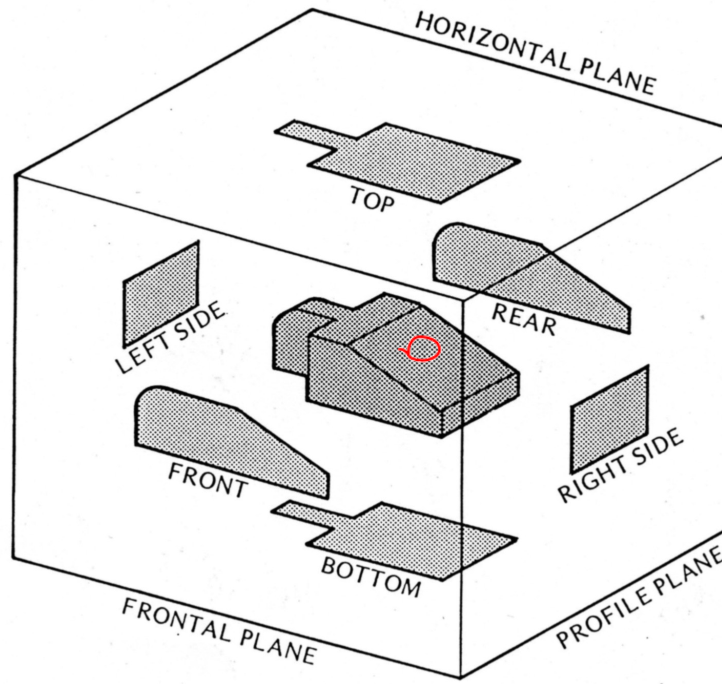
$$= \frac{n(n-1)}{2} \cdot (2+1) \cdot k^2$$



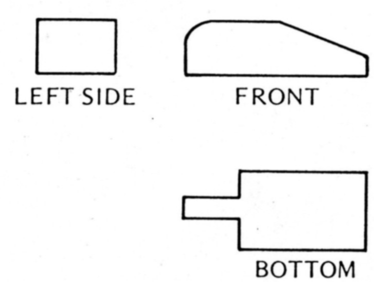


- dekomponovaný syst.: méně proměnných ⇒ lepší odhad z dat

Rekonstrukce celku z částí

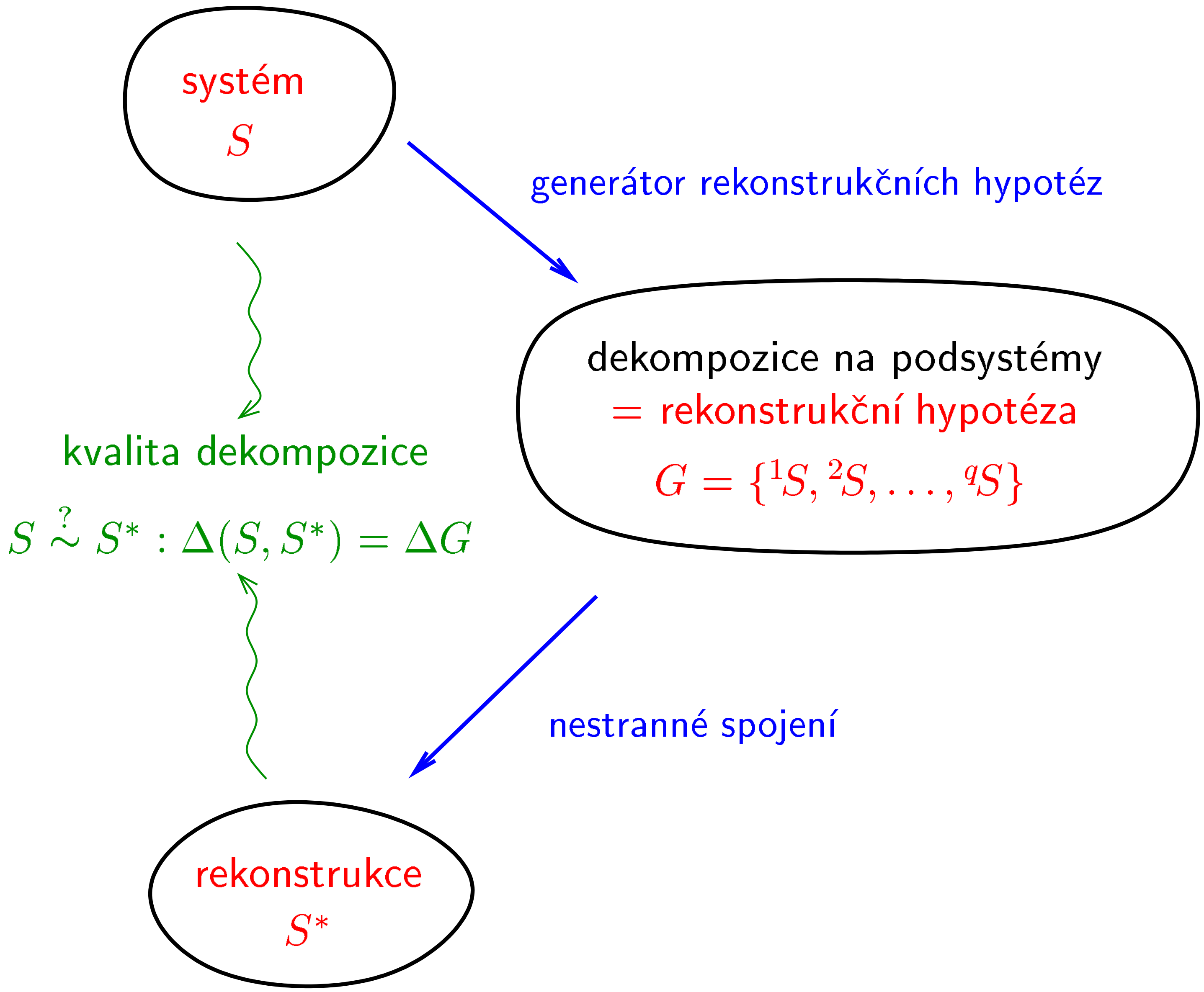


(a)



Převzato z Klir, G. Architecture of Systems Problem Solving, 1985

Schéma identifikační procedury



- G a S nejsou porovnatelné
  nelze srovnat kvalitu G a S
- S^* a S jsou porovnatelné

Vzájemná konzistence dynamických systémů

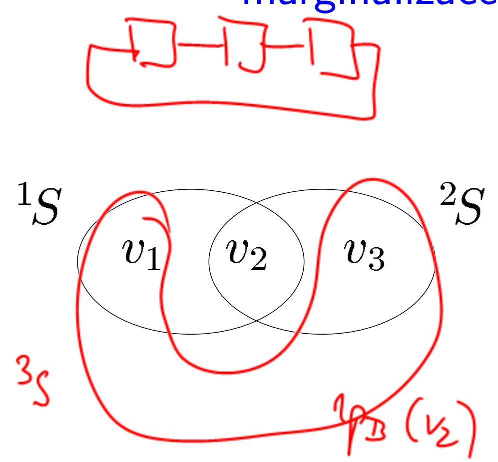
Lokální konzistence chování

Marginální funkce přípustnosti nad vazebními proměnnými musí být stejné

$$C_{i,j} = {}^iS \cap {}^jS$$

$$[\, {}^ip_B \downarrow C_{i,j} \,] = [\, {}^jp_B \downarrow C_{i,j} \,]$$

marginalizace do vazebních proměnných



$p_B(v_1, v_2, v_3)$

${}^1p_B(v_1, v_2)$ ${}^2p_B(v_2, v_3)$

${}^1p_B(v_2)$ ${}^2p_B(v_2)$

Př: Lokálně *nekonzistentní* systémy:

${}^1S$

v_1	v_2	${}^1p_B$
0	0	0.5
0	1	0.2
1	0	0.1
1	1	0.2

${}^2S$

v_2	v_3	${}^2p_B$
0	0	0.4
0	1	0.25
1	0	0.15
1	1	0.2

v_2	$[\, {}^1p_B \downarrow \{v_2\} \,]$
0	0.6
1	0.4

v_2	$[\, {}^2p_B \downarrow \{v_2\} \,]$
0	0.65
1	0.35

Pozn: podsystémy vzniklé rozkladem systému jsou lokálně konzistentní.

Stačí lokální konzistence k rekonstrukci?

v_1	v_2	${}^1p_B$
0	0	0.25
0	1	0.18
1	0	0.20
1	1	0.37

v_2	v_3	${}^2p_B$
0	0	0.17
0	1	0.16
0	2	0.12
1	0	0.14
1	1	0.18
1	2	0.23

v_1	v_3	${}^3p_B$
0	0	0.11
0	1	0.14
0	2	0.18
1	0	0.20
1	1	0.20
1	2	0.17

$0.25 = p_0 + p_1 + p_2$

$0.18 = p_3 + p_4 + p_5$

$0.23 = p_5 + p_{11}$

$\sum_{i=0}^{11} p_i = 1$

$p_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, 11$

v_1	v_2	v_3	p_B
0	0	0	p_0
0	0	1	p_1
0	0	2	p_2
0	1	0	p_3
0	1	1	p_4
0	1	2	p_5
1	0	0	p_6
1	0	1	p_7
1	0	2	p_8
1	1	0	p_9
1	1	1	p_{10}
1	1	2	p_{11}

Množina možných rekonstrukcí?

$$0.06 \leq p_{10} \leq 0.18$$

$$0.05 \leq p_{11} \leq 0.17$$

$$0.23 \leq p_{10} + p_{11} \leq 0.34$$

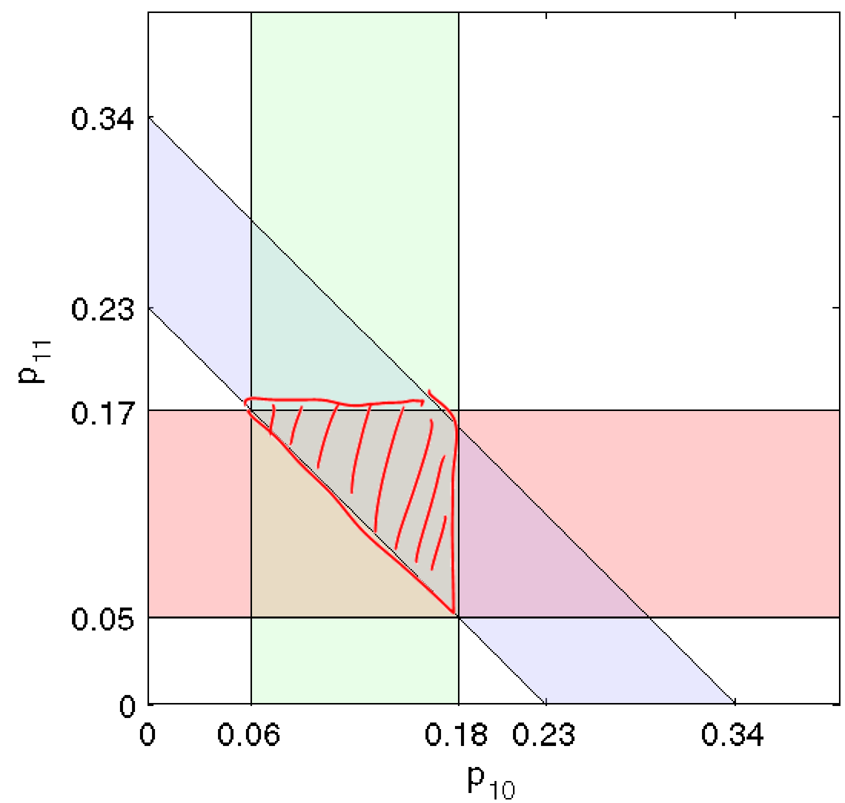
$$p_0 = 0.34 - p_{10} - p_{11}$$

$$p_1 = -0.04 + p_{10}$$

$$p_2 = -0.05 + p_{11}$$

$$\vdots$$

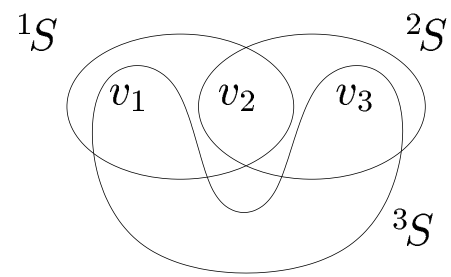
$$p_9 = \cdots$$



Globální konzistence chování

Sdruženou funkci přípustnosti p_B musí být možno zkonstruovat z marginálních ${}^{i}p_B,\ i \in N_q$.

Př: Globálně nekonzistentní systémy:



Lokálně konzistentní:

v_1	v_2	${}^{1}p_B$
0	0	$0\ (= a + x)$
0	1	0.7
1	0	0.3

v_2	v_3	${}^{2}p_B$
0	1	0.3
1	0	0.7
1	1	$0\ (= b + y)$

v_1	v_3	${}^{3}p_B$
0	0	0.4
0	1	$0.3\ (= a + b)$
1	0	0.3

v_1	v_2	v_3	p_B
0	0	1	a
0	1	1	b

$$a + x = 0 \Rightarrow a = x = 0 \qquad (a, x \geq 0)$$

$$b + y = 0 \Rightarrow b = y = 0 \qquad (y \geq 0)$$

$$a + b = 0.3$$

To je ve sporu.

Rekonstrukce systému

Dáno: Dekompozice systému $G = \{{}^1S, {}^2S, \ldots, {}^qS\}$. ${}^iS$ je podmnožina proměnných, ${}^iS \subset S$

Cíl: Nejlepší hypotéza o celkovém systému S. ($s \in \mathcal{S}$ je stav a $|\mathcal{S}|$ je velikost stavového prostoru)

Postup:

1. **Určit množinu možných rekonstrukcí.**

$$ {}^i p_B({}^iS) = \sum_{S \setminus {}^iS} p_B(S) \qquad \sum_{i=1}^{q} |{}^i\mathcal{S}| \quad \text{rovnic} $$

$$ p_B(S) \geq 0 \qquad |\mathcal{S}| \quad \text{nerovnic} $$

2. **Vybrat nejlepší z nich.**

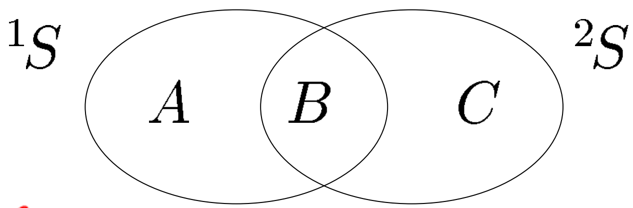
   Volba (nestranná rekonstrukce):
   S neobsahuje jinou informaci než tu obsaženou v množinách $\{{}^iS,\ i = 1, 2, \ldots, q\}$.

Implementace: Spojovací procedura.

Spojení dvou marginálních funkcí přípustnosti

Marginální funkce přípustnosti:

rozklad množiny proměnných:



$A = \{a_1, a_2\}$

$\mathcal{R}(A)$

$$^1p_B : \cancel{R}(A) \times R(B) \longrightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

$$^2p_B : R(B) \times R(C) \longrightarrow \langle 0, 1 \rangle$$

Spojení: $\quad {}^1p_B * {}^2p_B : \mathcal{R}(A) \times \mathcal{R}(B) \times \mathcal{R}(C) \longrightarrow \langle 0, 1 \rangle$

Nestranné spojení (o maximální entropii):

$$p^*_B(A, B, C) = ({}^1p_B * {}^2p_B)(A, B, C) \stackrel{\text{def}}{=} {}^1p_B(A, B) \cdot {}^2p_B(C \mid B) = {}^1p(A,B) \cdot \frac{{}^2p(B,C)}{{}^2p(B)}$$

Pozn: ${}^1p_B(B) = {}^2p_B(B)$ (kompatibilita), ${}^1p_B * {}^2p_B = {}^2p_B * {}^1p_B$

${}^1p(B) = {}^2p(B)$

$$\frac{{}^1p(A,B) \cdot {}^2p(B,C)}{{}^1p(B)} = {}^2p(B,C) \cdot {}^1p(A \mid B)$$

Speciální případy:

$$A = \emptyset : \quad ({}^1p_B * {}^2p_B)(B, C) = {}^1p_B(B) \cdot {}^2p_B(C \mid B)$$

$$B = \emptyset : \quad ({}^1p_B * {}^2p_B)(A, C) = {}^1p_B(A) \cdot {}^2p_B(C)$$