

Vybrané problémy z Klírovy teorie

- PA.** Identifikace parametrů generativního dynamického systému z datového systému
- PB.** Zjednodušení modelu generativního dynamického systému
 1. redukcí rozlišení
 2. vyloučením proměnných
- PC.** Identifikace struktury generativního dynamického systému

PA. Zobecnění datového na generativní dynamický systém

Identifikace parametrů generativního dynamického systému z datového systému

Postup

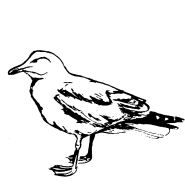
1. Volba maximální délky historie (omezení množiny možných masek)
2. Odhad funkcí přípustnosti p_B a p_{GB} z dat.
3. Vybere se generativní systém, který
 - a. minimalizuje neurčitost při generování dat

$$H(G | \bar{G}) = H(G, \bar{G}) - H(\bar{G}),$$

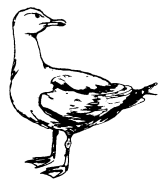
- b. je nejjednodušší.

Výběrů může být více.

Z datového systému na generativní dynamický systém



rest



away



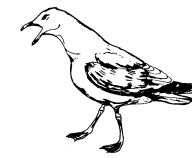
forward



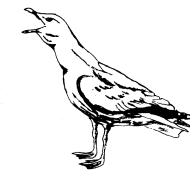
hunched



chocking



mew



oblique



upright

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| v_1 | 1 | 1 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| v_2 | 4 | 3 | 4 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 3 | 3 | 4 | 2 | 1 | 1 | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| t | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 |
| v_1 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| v_2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 |

- hloubka historie $H = 2$
- vzorkovací proměnné: $s_1(t) = v_1(t - 1)$, $s_2(t) = v_2(t - 1)$, $s_3(t) = v_1(t)$, $s_4(t) = v_2(t)$

$H = 2$
 \longleftrightarrow

$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ – dynamický systém

Maska

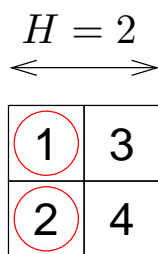
| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 4 |

$\bar{G} = \{s_1, s_2\}$ – generující proměnné generativního systému

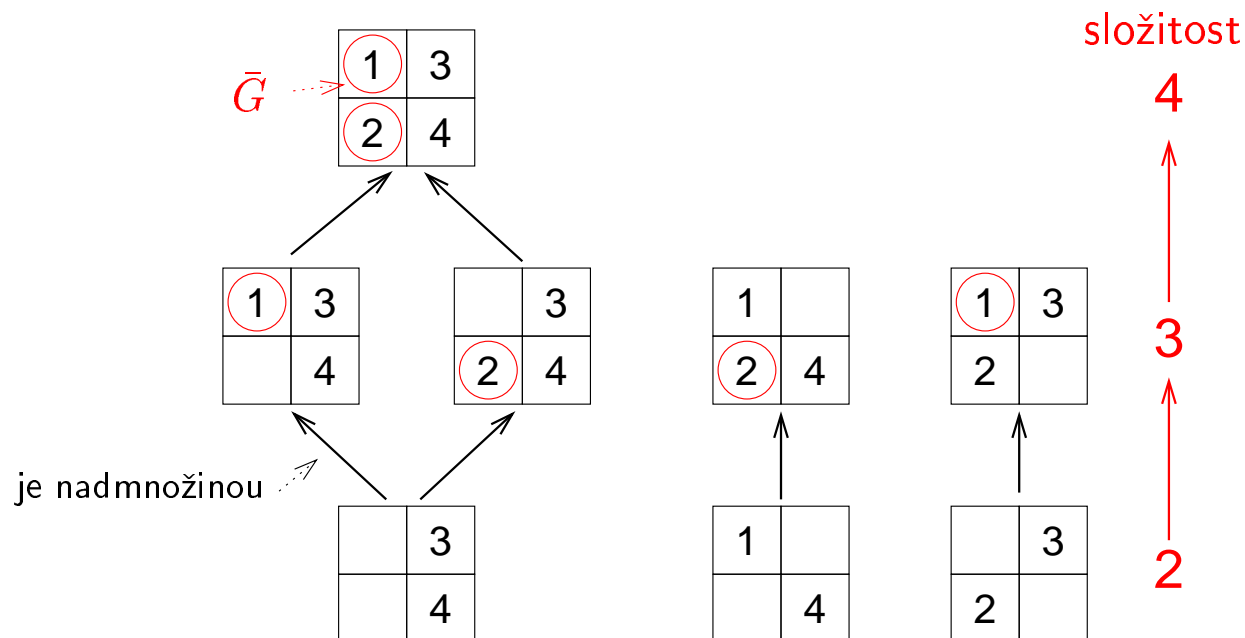
$G = \{s_3, s_4\}$ – generované proměnné

Uspořádání masek s hloubkou historie H

Pro délku historie $H = 2$ a $n = 2$ základní proměnné:



$M_2 \leq M_1$: je-li $G_1 = G_2$ a $\bar{G}_2 \subset \bar{G}_1$
jinak M_2, M_1 nesrovnatelné



- na každém řádku jedna generovaná proměnná
- v posledním sloupci alespoň jedna (generovaná) proměnná

Počet možných zjednodušení: $N = N_1 - N_2 = (2^H - 1)^n - (2^{H-1} - 1)^n$

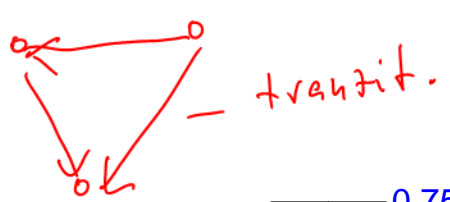
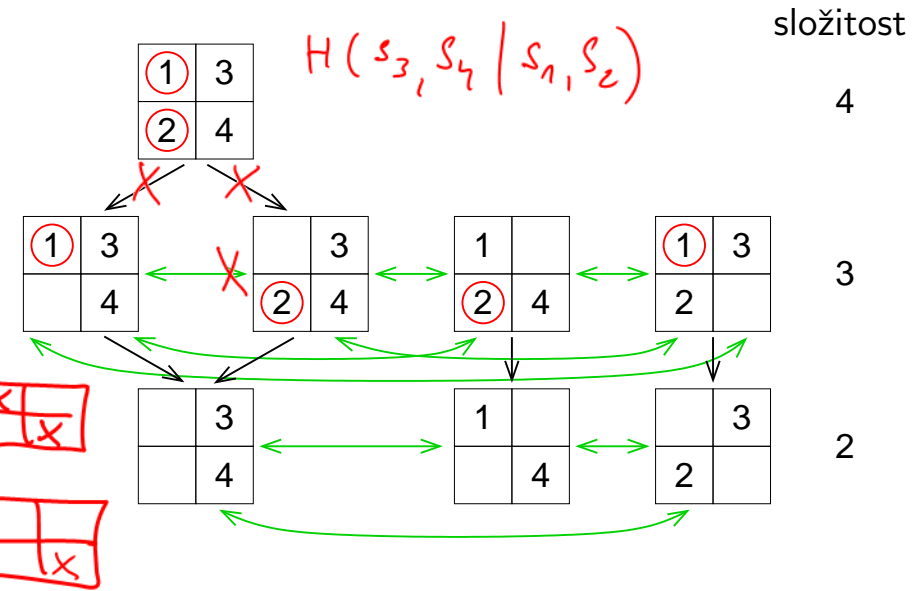
kde N_1, N_2 – počet masek, které

- na každém z n řádků mají alespoň jeden prvek $\rightarrow N_1$
- v posledním sloupci nemají žádný prvek \Leftrightarrow pro každou řádku platí, že nemá poslední element $\rightarrow N_2$

Procedura výběru optimálních masek

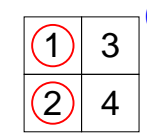
1. Zvol maximální délku historie.
2. Vytvoř diagram (svaz) přípustných masek se šipkami od složitějších k jednodušším maskám.
3. Přidej oboustranné horizontální šipky na každé úrovni diagramu.
4. Pro každou masku vypočti generativní neurčitost (str. 7).
5. Smazej šipky, které vedou od nižší k vyšší neurčitosti.
6. Odstraň tranzitivní hrany. **nepovinné**
7. Výsledkem jsou masky bez následníků.

kroky 1-3



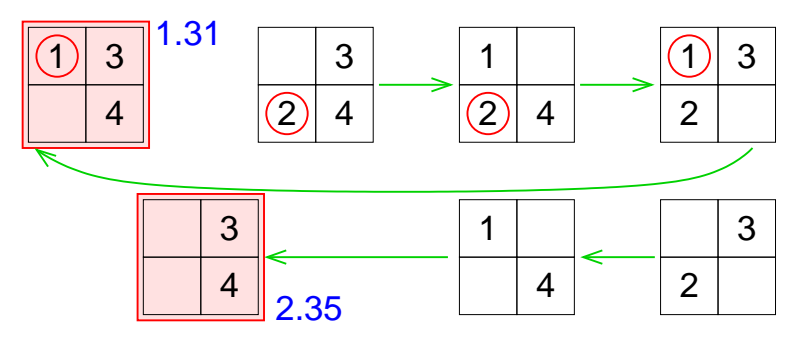
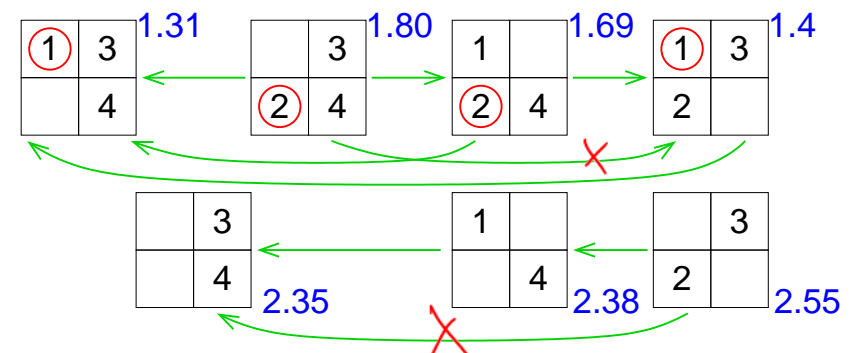
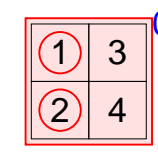
kroky 4-5

0.75 kombinace složitosti a kvality



kroky 6-7

0.75



Generativní neurčitosti pro jednotlivé masky

| s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | p_B |
|-------|-------|-------|-------|--------|
| 0 | 1 | 2 | 4 | 0.0227 |
| 0 | 3 | 2 | 3 | 0.0455 |
| 0 | 3 | 2 | 4 | 0.0227 |
| 0 | 4 | 3 | 3 | 0.0227 |
| 1 | 1 | 0 | 3 | 0.0227 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0.0455 |
| 1 | 1 | 4 | 4 | 0.0227 |
| 1 | 2 | 1 | 1 | 0.0227 |
| 1 | 3 | 0 | 4 | 0.0227 |
| 1 | 3 | 1 | 3 | 0.0227 |
| 1 | 3 | 4 | 4 | 0.0227 |
| 1 | 4 | 1 | 3 | 0.0227 |
| 2 | 1 | 0 | 3 | 0.0227 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0.0455 |
| 2 | 2 | 4 | 2 | 0.0227 |
| 2 | 3 | 1 | 1 | 0.0227 |
| 2 | 3 | 1 | 3 | 0.0227 |
| 2 | 4 | 1 | 2 | 0.0227 |
| 2 | 4 | 2 | 1 | 0.0227 |
| 2 | 4 | 2 | 2 | 0.0227 |
| 2 | 4 | 2 | 4 | 0.0227 |
| 3 | 3 | 0 | 3 | 0.0227 |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 0.0909 |
| 3 | 3 | 4 | 4 | 0.0227 |
| 3 | 4 | 3 | 3 | 0.0227 |
| 4 | 2 | 4 | 4 | 0.0227 |
| 4 | 3 | 0 | 1 | 0.0227 |
| 4 | 4 | 2 | 4 | 0.0227 |
| 4 | 4 | 3 | 4 | 0.0227 |
| 4 | 4 | 4 | 3 | 0.0227 |
| 4 | 4 | 4 | 4 | 0.1818 |

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \quad G = \{s_3, s_4\}, \quad \bar{G} = \{s_1, s_2\}$$

$$H(G | \bar{G}) = H(s_1, s_2, s_3, s_4) - H(s_1, s_2) = 0.7535$$

$$H(s_1, s_3, s_4) - H(s_1) = 1.3149$$

$$H(s_2, s_3, s_4) - H(s_2) = 1.8024$$

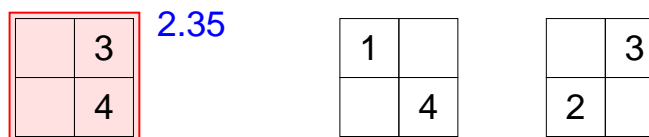
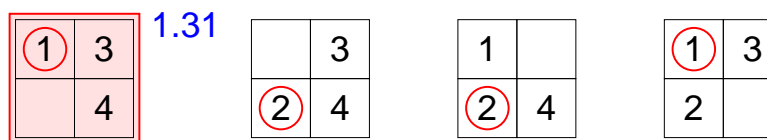
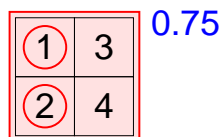
$$H(s_1, s_2, s_4) - H(s_2) = 1.6949$$

$$H(s_1, s_2, s_3) - H(s_1) = 1.4033$$

$$H(s_3, s_4) = 2.3539$$

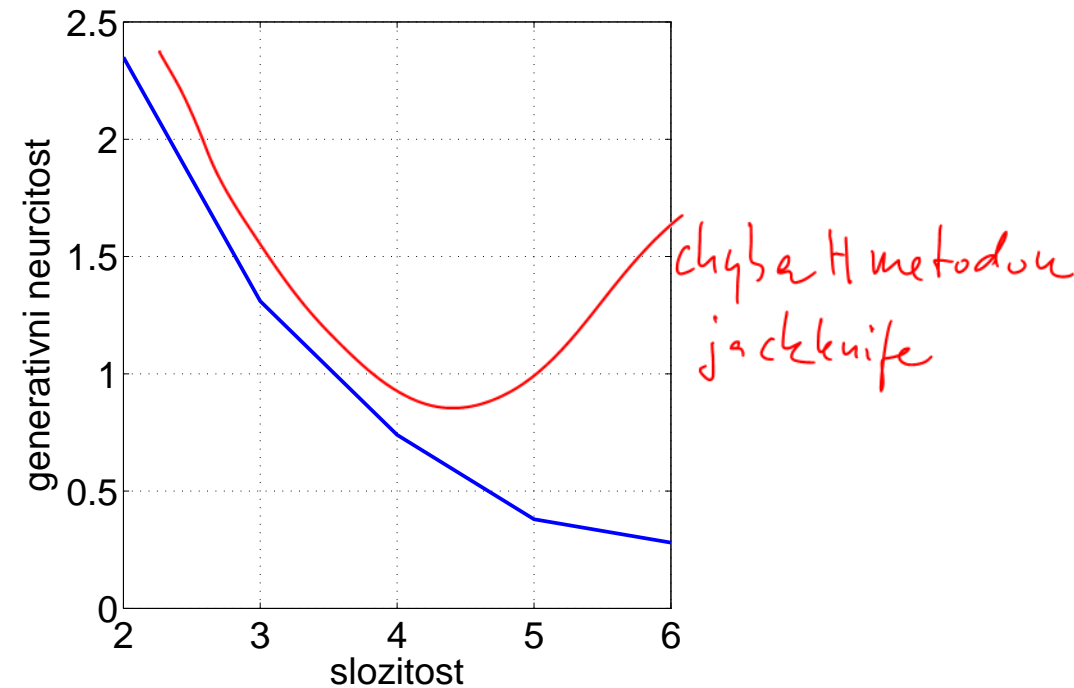
$$H(s_1, s_4) = 2.3768$$

$$H(s_2, s_3) = 2.5506$$



Výsledek pro hloubku historie $H = 3$

| složítost | maska | $H(G \bar{G})$ | | | | | | |
|-----------|--|------------------|---|---|---|---|---|------|
| 2 | M_1 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td></td><td></td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>6</td></tr> </table> | | | 5 | | | 6 | 2.35 |
| | | 5 | | | | | | |
| | | 6 | | | | | | |
| 3 | M_2 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td></td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td></td><td></td><td>6</td></tr> </table> | | 3 | 5 | | | 6 | 1.31 |
| | 3 | 5 | | | | | | |
| | | 6 | | | | | | |
| 4 | M_3 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td></td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr> </table> | | 3 | 5 | 2 | 4 | | 0.74 |
| | 3 | 5 | | | | | | |
| 2 | 4 | | | | | | | |
| 5 | M_4 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td></td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr> </table> | | 3 | 5 | 2 | 4 | 6 | 0.38 |
| | 3 | 5 | | | | | | |
| 2 | 4 | 6 | | | | | | |
| 6 | M_5 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr> </table> | 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 6 | 0.28 |
| 1 | 3 | 5 | | | | | | |
| 2 | 4 | 6 | | | | | | |



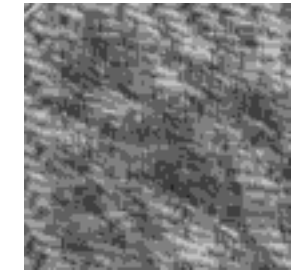
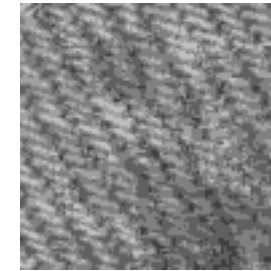
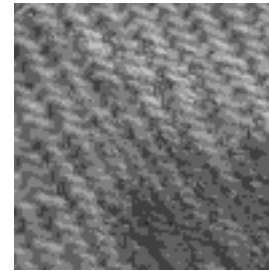
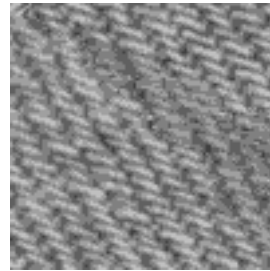
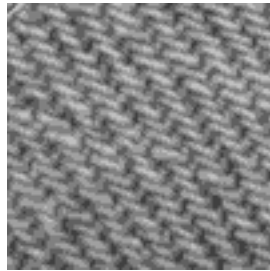
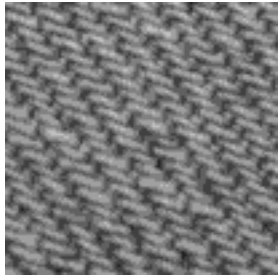
Interpretace

- R_2 reaguje na R_1
 1. jednak bezprostředně (M_1)
 2. jednak na minulý stav (M_2)
- R_1 dominuje (M_3)
- R_1 reaguje na reakci R_2 (M_4)

Příklad texturního systému

původní obraz

vzorek aktivity systému



bez eliminace

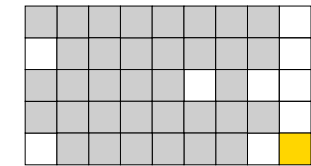
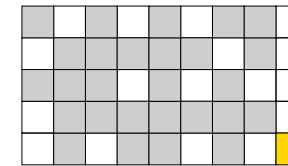
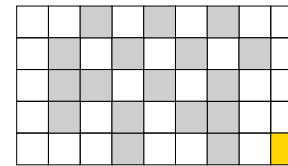
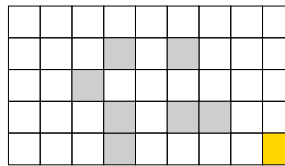
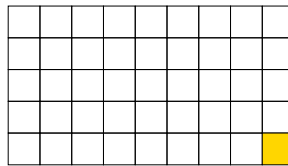
7 eliminováno

17 eliminováno

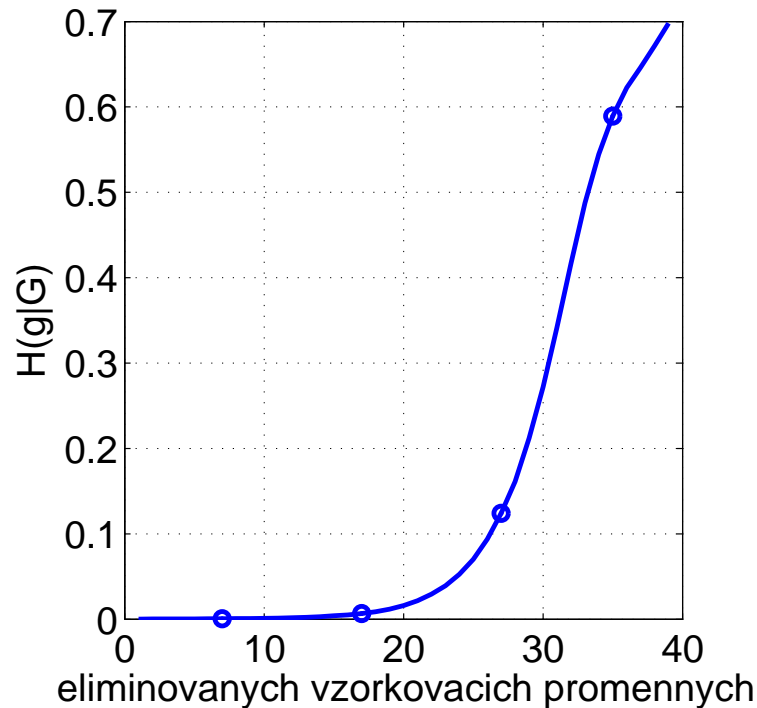
27 eliminováno

35 eliminováno

masky:



$H(g | \bar{G})$



$$H(g, \bar{G}) = 13.22$$

$$H(g) = 1.38$$

Hledový algoritmus výběru okénka

Masky pro $n = 3$ a $H = 2$

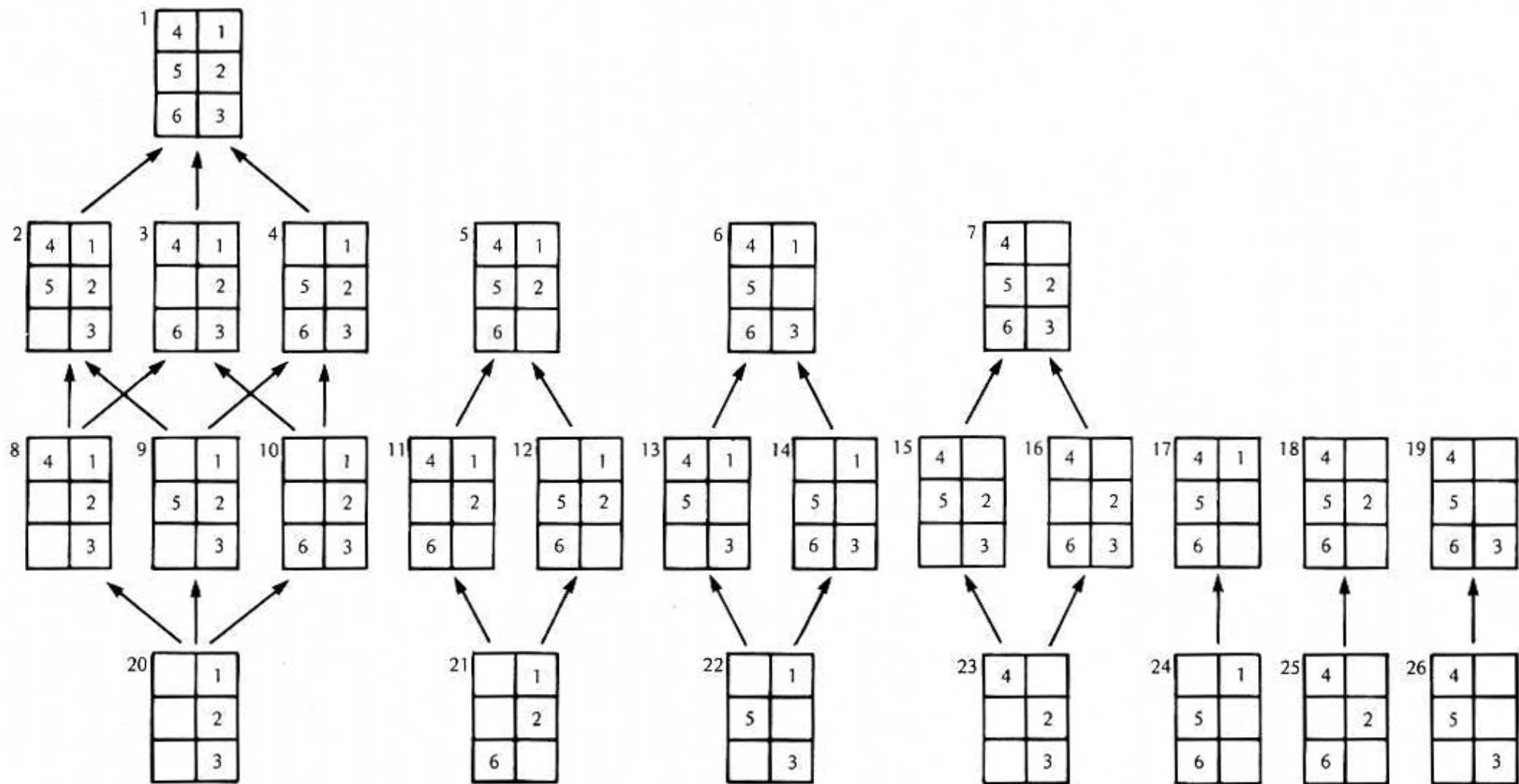


Figure 3.10. Meaningful masks for $n = 3$ and $\Delta M = 2$, arranged according to the complexity and submask orderings.

Počet smysluplných masek dané velikosti

| | | hloubka H | | | | | | | | | |
|----------------|----|-------------|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| proměnných n | 1 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 |
| | 2 | 1 | 8 | 40 | 176 | 736 | 3008 | 12160 | 48896 | 196096 | 785408 |
| | 3 | 1 | 26 | 316 | 3032 | 26416 | 220256 | $1.8 \cdot 10^6$ | $1.4 \cdot 10^7$ | $1.2 \cdot 10^8$ | 10^9 |
| | 4 | 1 | 80 | 2320 | 48224 | 872896 | $1.5 \cdot 10^7$ | $2.4 \cdot 10^8$ | $4 \cdot 10^9$ | 10^{11} | 10^{12} |
| | 5 | 1 | 242 | 16564 | 742568 | $2.8 \cdot 10^7$ | 10^9 | 10^{10} | 10^{12} | 10^{13} | 10^{15} |
| | 6 | 1 | 728 | 116920 | $1.1 \cdot 10^7$ | $8.8 \cdot 10^8$ | 10^{11} | 10^{12} | 10^{14} | 10^{16} | 10^{18} |
| | 7 | 1 | 2186 | 821356 | $1.7 \cdot 10^8$ | 10^{10} | 10^{12} | 10^{14} | 10^{17} | 10^{19} | 10^{21} |
| | 8 | 1 | 6560 | $5.8 \cdot 10^6$ | $2.6 \cdot 10^9$ | 10^{12} | 10^{14} | 10^{17} | 10^{19} | 10^{21} | 10^{24} |
| | 9 | 1 | 19682 | $4.0 \cdot 10^7$ | 10^{10} | 10^{13} | 10^{16} | 10^{19} | 10^{21} | 10^{24} | 10^{27} |
| | 10 | 1 | 59048 | $2.8 \cdot 10^8$ | 10^{12} | 10^{15} | 10^{18} | 10^{21} | 10^{24} | 10^{27} | 10^{30} |

$$N = (2^H - 1)^n - (2^{H-1} - 1)^n$$

- pro racky $H = 2, n = 2 \Rightarrow N = 8$
- pro texturu $H = 45, n = 1 \Rightarrow N = 1.8 \cdot 10^{18}$

Zobecnění datového na generativní dynamický systém: shrnutí

= Identifikace parametrů

Experimentální identifikace

- vhodná pro zobecněné dynamické systémy bez zjevné struktury
- musíme zvolit omezení na vzorkovací proměnné (hloubku historie)
- odhadujeme parametry sdružené stochastické funkce přechodu stavu
- to vyžaduje dostupnost dostatku pozorování aktivity systému

Matematicko-fyzikální identifikace

- vhodná pro lineární deterministické systémy jednoduché struktury
- musíme zvolit strukturu modelu
- odhadujeme parametry modelu (problém regrese)
- identifikace silného modelu nevyžaduje tolik dat

Pozn: Identifikace struktury

Rozklad systému na podsystémy.

Jiný problém, probereme později.

PB. Zjednodušení generativního dynamického systému

Dáno:

Zobecněný generativní dynamický systém $F_B = (A, B; M_G, p_{GB})$

Cíl:

Zmenšení složitosti modelu systému při zachování generativní schopnosti

$$H(G | \bar{G}) = H(G, \bar{G}) - H(\bar{G}) \rightarrow \min$$

Zjednodušení

1. **Eliminací základních proměnných** $v_i \in A$ z obrazu systému (A, B) toto je jen rozcvička
2. **Redukcí rozlišení základních proměnných** zahrnuje předchozí

Problém výběru vhodného zjednodušení

Zjednodušení $F_B \rightarrow F'_{B_j}$

Realizujeme rozkladem stavového prostoru $\mathcal{R}(S)$ na třídy ekvivalence \mathcal{R} a agregační funkcí na podmnožinách $R_i \in \mathcal{R}$ rozkladu, pro pravděpodobnost to je

$$p'_B(R_i) = \sum_{x \in R_i} p_B(x).$$

Kritéria výběru

1. Složitost systému F'_{B_j}

počet stavů nenulové psti

$$|p'_{B_j}| = \left| \{c \in \mathcal{R}(S_j) \mid p_{B_j}(c) > 0\} \right|$$

2. Generativní neurčitost F'_{B_j}

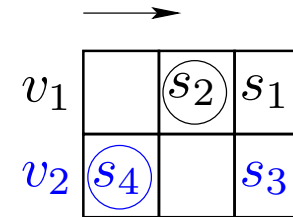
$$H(G_j \mid \bar{G}_j) = H(G_j, \bar{G}_j) - H(\bar{G}_j)$$

- Každému zjednodušení odpovídá jeden rozklad stavového prostoru
- Sdružené kritérium definuje částečné uspořádání na těchto rozkladech
- Pokud kritéria nejsou navzájem v protikladu, lze říci, že systém F'_{B_2} je jasně lepší než F'_{B_1}
- Existuje několik nejlepších výběrů

Zjednodušení dynamického systému vyloučením základních proměnných

$G = \{s_1, s_3\}$, $\bar{G} = \{\bar{s}_2, \bar{s}_4\}$ vyloučíme $v_2 \Rightarrow \{s_3, \bar{s}_4\}$

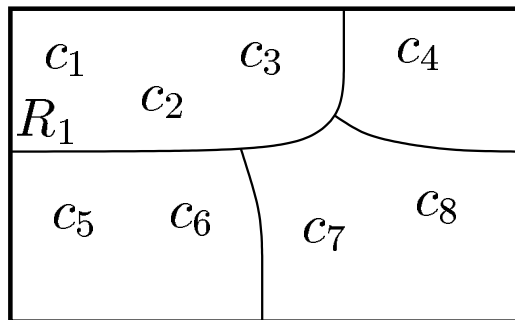
| | s_1 | \bar{s}_2 | s_3 | \bar{s}_4 | $p(c_i)$ |
|-------|-------|-------------|-------|-------------|----------|
| c_1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.2 |
| c_2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0.2 |
| c_3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0.1 |
| c_4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0.1 |
| c_5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0.1 |
| c_6 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0.1 |
| c_7 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0.1 |
| c_8 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0.1 |



Po vyloučení v_2

| | s_1 | \bar{s}_2 | $p'(R_j) = \sum_{c_i \in R_j} p(c_i)$ |
|-------|-------|-------------|---------------------------------------|
| R_1 | 0 | 0 | 0.5 |
| R_2 | 0 | 1 | 0.1 |
| R_3 | 1 | 0 | 0.2 |
| R_4 | 1 | 1 | 0.2 |

ekvivalentní stavy $R_j \in \mathcal{R}$



| vyl. | $ p'_B $ | $H(G \bar{G})$ | $H(s_3 s_2, s_4)$ | $H(s_1 s_2, s_4)$ |
|-------|----------|------------------|---------------------|---------------------|
| — | 8 | 0.8047 | | |
| v_1 | 3 | 0.4159 | 0.3365 | |
| v_2 | 4 | 0.6097 | | 0.4751 |

- pozor na porovnatelnost entropií

$H(s_1 | s_2)$