2D Projektivní transformace a její odhad z dat

Tomáš Svoboda, svoboda@cmp.felk.cvut.cz
ČVUT FEL, K133, Centrum strojového vnímání
http://cmp.felk.cvut.cz

Poslední aktualizace: 5. října 2009

Osnova

- definice 2D projektivní transformace
- soustava homogenních rovnic
- definice optimalizačního problému
- LSQ řešení
- normalizace souřadnic

Definice pomocí incidence

Projektivita (projectivity) je takové invertibilní zobrazení $h : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, že platí, že tři body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ leží na té samé přímce tehdy a jen tehdy, pokud $h(\mathbf{x}_1), h(\mathbf{x}_2), h(\mathbf{x}_3)$ také.

Obvykle používané názvy: Projektivita (projectivity), kolineace (collineation), projektivní transformace a homografie (homography).

Algebraická definice

2D projektivní transformace je lineární transformace 3-dimenzionálních homogenních vektorů reprezentovaná regulární 3×3 maticí:

$$\lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zkráceně: $\lambda \mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}$.

Algebraická definice

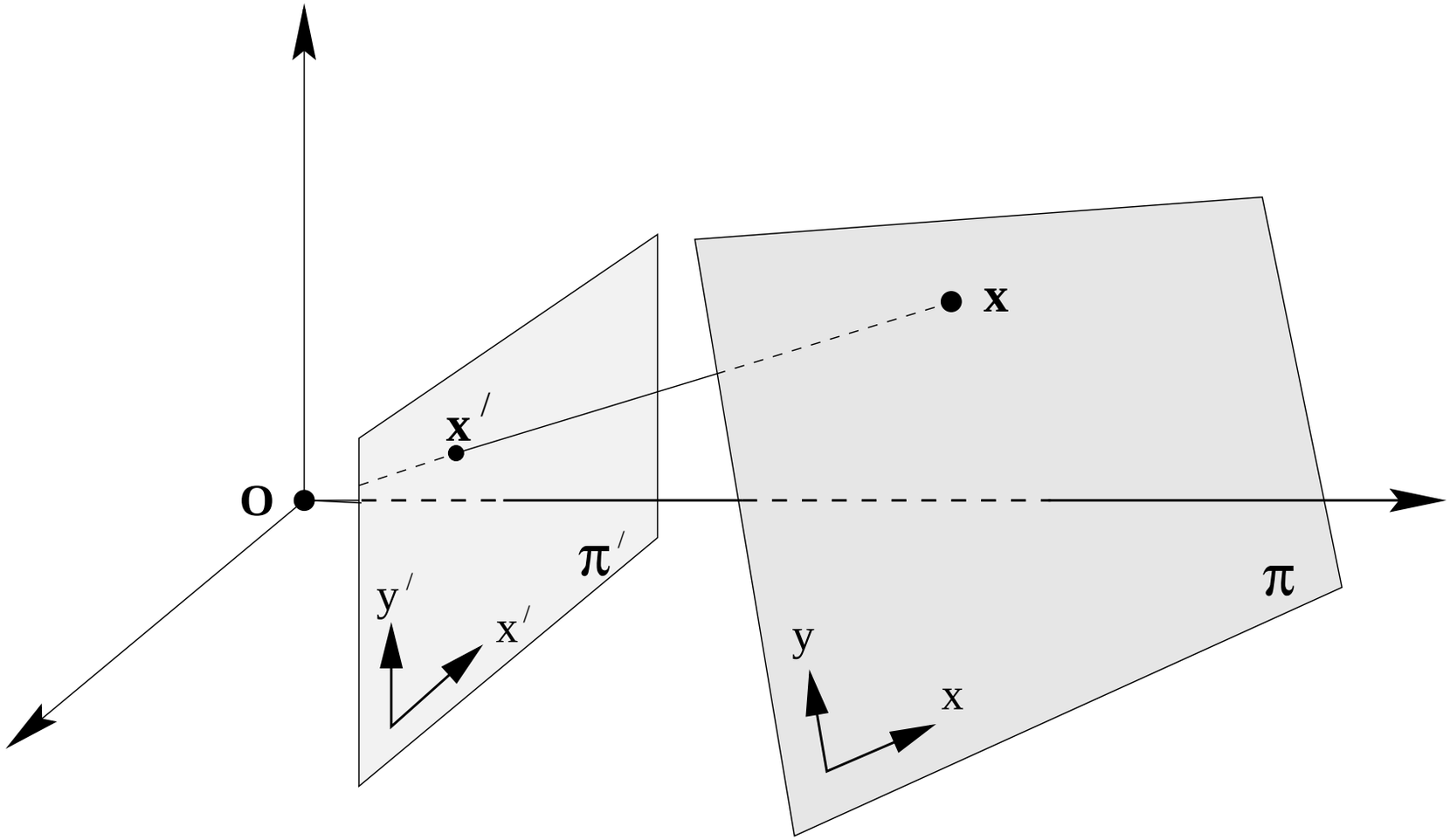
2D projektivní transformace je lineární transformace 3-dimenzionálních homogenních vektorů reprezentovaná regulární 3×3 maticí:

$$\lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zkráceně: $\lambda \mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}$.

Proč λ?

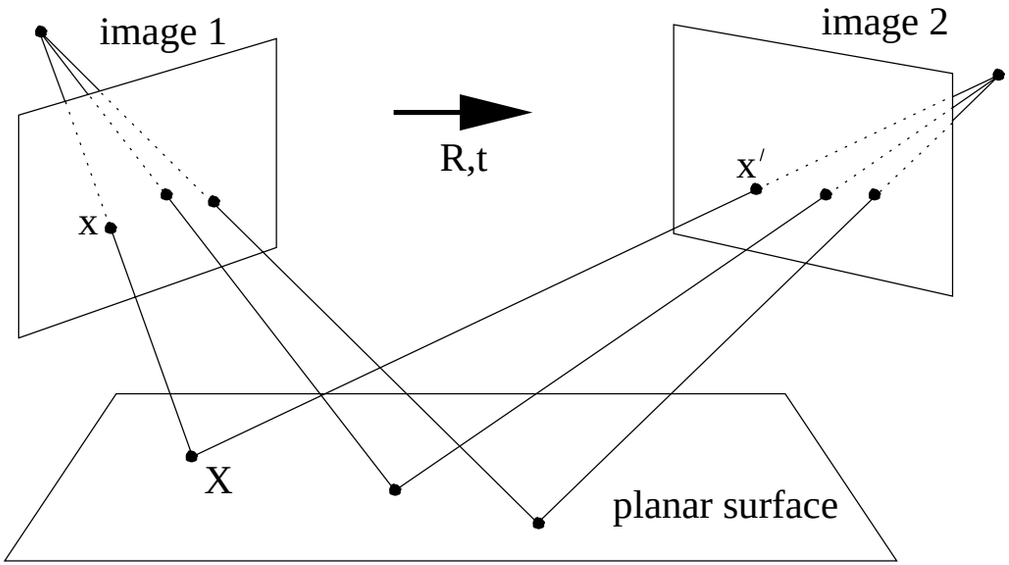
Zobrazení z roviny do roviny, středová projekce



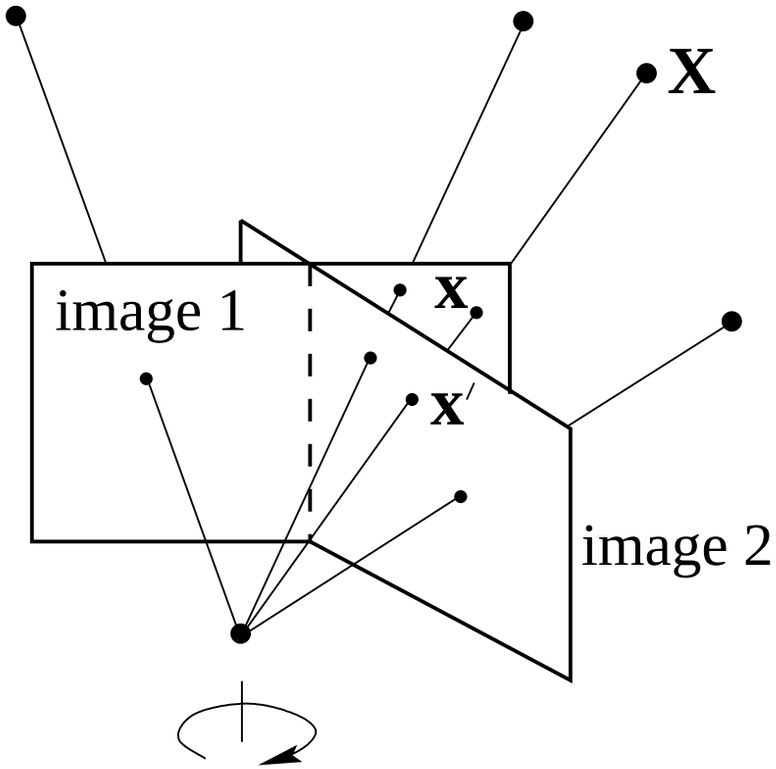
[1]

[1] náčrtek z [1]

homografie kolem nás



zobrazení roviny ve scéně



kamera rotující okolo svého středu

Náčrtky z [1]

Problém odhadu transformace

Jaká transformace váže obrazy?

Odhad $\mathtt{H}$ z korespondujících bodů $\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}_i$

$$\lambda \mathbf{x}' = \mathtt{H}\mathbf{x}$$

- Kolik stupňů volnosti problém má? Jinak řečeno, kolik je neznámých?
- Kolik párů korespondencí tedy minimálně potřebujeme?

Obrazové souřadnice, co s λ?

$$\begin{bmatrix} \lambda x' \\ \lambda y' \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^\top \\ \mathbf{h}_2^\top \\ \mathbf{h}_3^\top \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Obrazové souřadnice, co s λ?

$$\begin{bmatrix} \lambda x' \\ \lambda y' \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^\top \\ \mathbf{h}_2^\top \\ \mathbf{h}_3^\top \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Připomeňme, že měříme v $(x, y)^\top$ a jako výsledek tedy obdobně: $(x', y')^\top$.

Obrazové souřadnice, co s λ?

$$\begin{bmatrix} \lambda x' \\ \lambda y' \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^\top \\ \mathbf{h}_2^\top \\ \mathbf{h}_3^\top \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Připomeňme, že měříme v $(x, y)^\top$ a jako výsledek tedy obdobně: $(x', y')^\top$.

Tedy:

$$x' = \frac{\lambda x'}{\lambda} = \frac{h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13}}{h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}} = \frac{\mathbf{h}_1^\top \mathbf{x}}{\mathbf{h}_3^\top \mathbf{x}}$$

$$y' = \frac{\lambda y'}{\lambda} = \frac{h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}}{h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}} = \frac{\mathbf{h}_2^\top \mathbf{x}}{\mathbf{h}_3^\top \mathbf{x}}$$

Obrazové souřadnice, co s λ?

$$\begin{bmatrix} \lambda x' \\ \lambda y' \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^\top \\ \mathbf{h}_2^\top \\ \mathbf{h}_3^\top \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Připomeňme, že měříme v $(x, y)^\top$ a jako výsledek tedy obdobně: $(x', y')^\top$.

Tedy:

$$x' = \frac{\lambda x'}{\lambda} = \frac{h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13}}{h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}} = \frac{\mathbf{h}_1^\top \mathbf{x}}{\mathbf{h}_3^\top \mathbf{x}}$$

$$y' = \frac{\lambda y'}{\lambda} = \frac{h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}}{h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}} = \frac{\mathbf{h}_2^\top \mathbf{x}}{\mathbf{h}_3^\top \mathbf{x}}$$

- Kolik stupňů volnosti problém má? Jinak řečeno, kolik je neznámých?
- Kolik párů korespondencí tedy minimálně potřebujeme?

Sestavení rovnic

$$x' = \frac{h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13}}{h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}} \qquad y' = \frac{h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}}{h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}}$$

Zbavíme se zlomku . . .

$$\begin{aligned} x'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) &= h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13} \\ y'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) &= h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23} \end{aligned}$$

Rovnice jsou lineární vzhledem k h_{ii}.

Sestavení rovnic

$$x' = \frac{h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13}}{h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}} \qquad y' = \frac{h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}}{h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}}$$

Zbavíme se zlomku . . .

$$\begin{aligned} x'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) &= h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13} \\ y'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) &= h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23} \end{aligned}$$

Rovnice jsou lineární vzhledem k h_{ii}.

- Kolik stupňů volnosti problém má? Jinak řečeno, kolik je neznámých?
- Kolik párů korespondencí tedy minimálně potřebujeme?

Sestavení rovnic II

$$
\begin{aligned}
x'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) &= h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13} \\
y'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) &= h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}
\end{aligned}
$$

Sestavíme homogenní rovnice

$$
\begin{aligned}
x'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) - (h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13}) &= 0 \\
y'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) - (h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}) &= 0
\end{aligned}
$$

Sestavení rovnic II

$$
\begin{aligned}
x'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) &= h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13} \\
y'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) &= h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}
\end{aligned}
$$

Sestavíme homogenní rovnice

$$
\begin{aligned}
x'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) - (h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13}) &= 0 \\
y'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) - (h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}) &= 0
\end{aligned}
$$

- Kolik stupňů volnosti problém má? Jinak řečeno, kolik je neznámých?
- Kolik párů korespondencí tedy minimálně potřebujeme?

Soustava rovnic

Pro každý korespondující pár $(x_i, y_i)^\top \leftrightarrow (x'_i, y'_i)^\top$ platí

$$
\begin{aligned}
x'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) - (h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13}) &= 0 \\
y'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) - (h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}) &= 0
\end{aligned}
$$

Soustava rovnic

Pro každý korespondující pár $(x_i, y_i)^\top \leftrightarrow (x'_i, y'_i)^\top$ platí

$$\begin{aligned} x'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) - (h_{11}\,x + h_{12}\,y + h_{13}) &= 0 \\ y'(h_{31}\,x + h_{32}\,y + h_{33}) - (h_{21}\,x + h_{22}\,y + h_{23}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 & -y_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & -y_1 & -1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 \\ -x_2 & -y_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_2x_2 & x'_2y_2 & x'_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & -y_2 & -1 & y'_2x_2 & y'_2y_2 & y'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_n & -y_n & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & -y_2 & -1 & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soustava rovnic v maticích

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -x_1 & -y_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & -y_1 & -1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 \\ -x_2 & -y_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_2x_2 & x'_2y_2 & x'_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & -y_2 & -1 & y'_2x_2 & y'_2y_2 & y'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_n & -y_n & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & -y_2 & -1 & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n \end{bmatrix}}_{\mathtt{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \\ h_{31} \\ h_{32} \\ h_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

$$\mathtt{C}_{[2n\times 9]}\mathbf{h}_{[9\times 1]} = \mathbf{0}_{[2n\times 1]}$$

Analýza soustavy

$$\mathrm{C}_{[2n\times 9]}\mathbf{h}_{[9\times 1]} = \mathbf{0}_{[2n\times 1]}$$

- Musíme nějak omezit množinu možných řešení?
- Kdy má soustava právě jedno řešení?
- Co v případě šumu v souřadnicích korepondujících bodů?

Normalizace souřadnic – motivace

$$\begin{bmatrix} -x_1 & -y_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_1x_1 & x'_1y_1 & x'_1 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & -y_1 & -1 & y'_1x_1 & y'_1y_1 & y'_1 \\ -x_2 & -y_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_2x_2 & x'_2y_2 & x'_2 \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & -y_2 & -1 & y'_2x_2 & y'_2y_2 & y'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x_n & -y_n & -1 & 0 & 0 & 0 & x'_nx_n & x'_ny_n & x'_n \\ 0 & 0 & 0 & -x_2 & -y_2 & -1 & y'_nx_n & y'_ny_n & y'_n \end{bmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Řekněme že meříme typický bod v pixelových souřadnicích s určitou přesností (rozptylem) $\mathbf{x} = [350, 240, 1]^\top \pm [5, 5, 0]^\top$. Vidíme, že šum v měření ovlivňuje prvky datové matice velmi nerovnoměrně.

Tato nerovnoměrnost má v praxi pro LSQ algoritmus zničující důsledky. Řešením je používat vždy normalizaci souřadnic [2, 1].

Normalizace souřadnic – algoritmus

Přepokládejmem že známe vhodné transformace $\underline{\mathbf{x}} = \mathtt{T}\mathbf{x}$ a $\underline{\mathbf{x}'} = \mathtt{T}'\mathbf{x}'$, které transformují souřadnice bodů tak, aby datová matice byla méně ovlivněna šumem v měření.

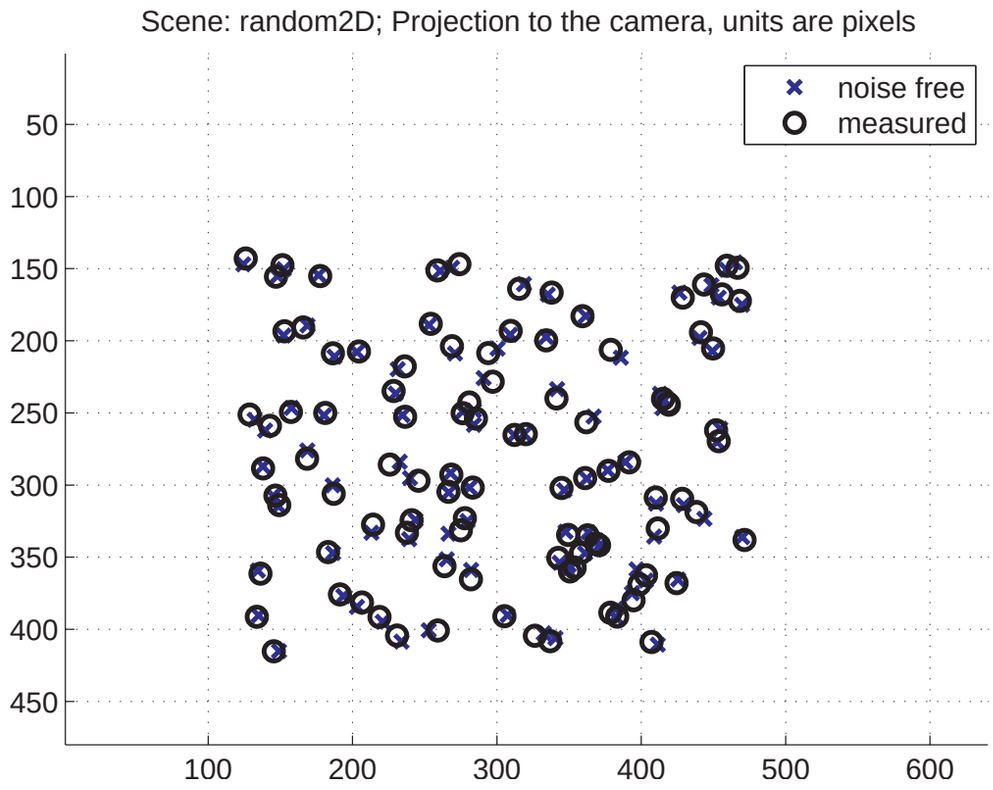
Vypočteme $\underline{\mathtt{A}}$ jako řešení soustavy rovnic $\underline{\mathbf{x}'} = \underline{\mathtt{A}\mathbf{x}}$.

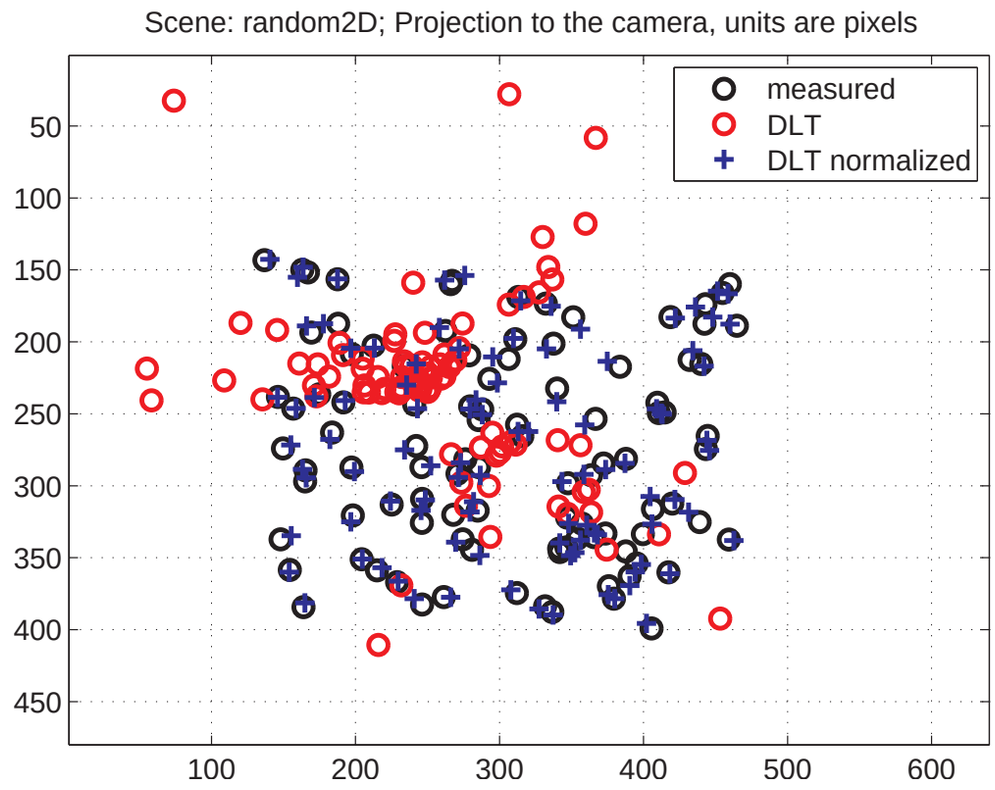
Dosadíme do této rovnice transformační vzorce, $\mathtt{T}'\mathbf{x}' = \underline{\mathtt{A}}\mathtt{T}\mathbf{x}$.

Upravíme $\mathbf{x}' = \mathtt{T}'^{-1}\underline{\mathtt{A}}\mathtt{T}\mathbf{x}$.

Srovnáme s původní rovnicí (soustavou) $\mathbf{x}' = \mathtt{A}\mathbf{x}$ a vidímě, že hledaná matice se vypočte jako $\mathtt{A} = \mathtt{T}'^{-1}\underline{\mathtt{A}}\mathtt{T}$.

Normalizace souřadnic – srovnání

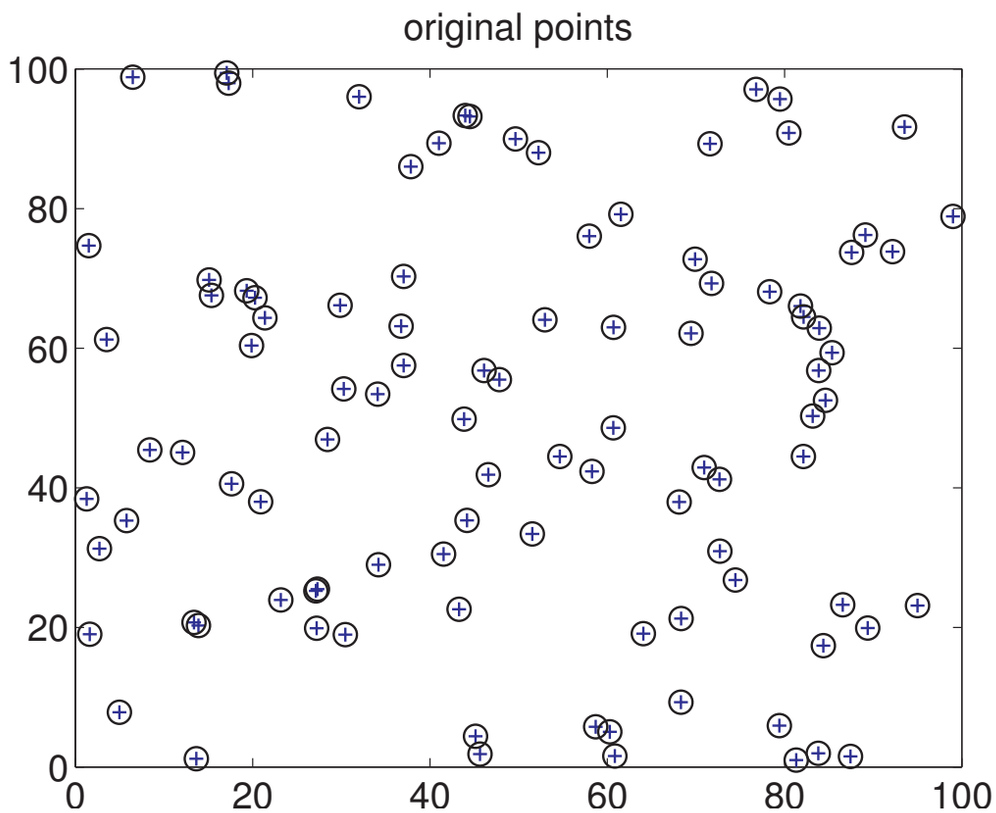


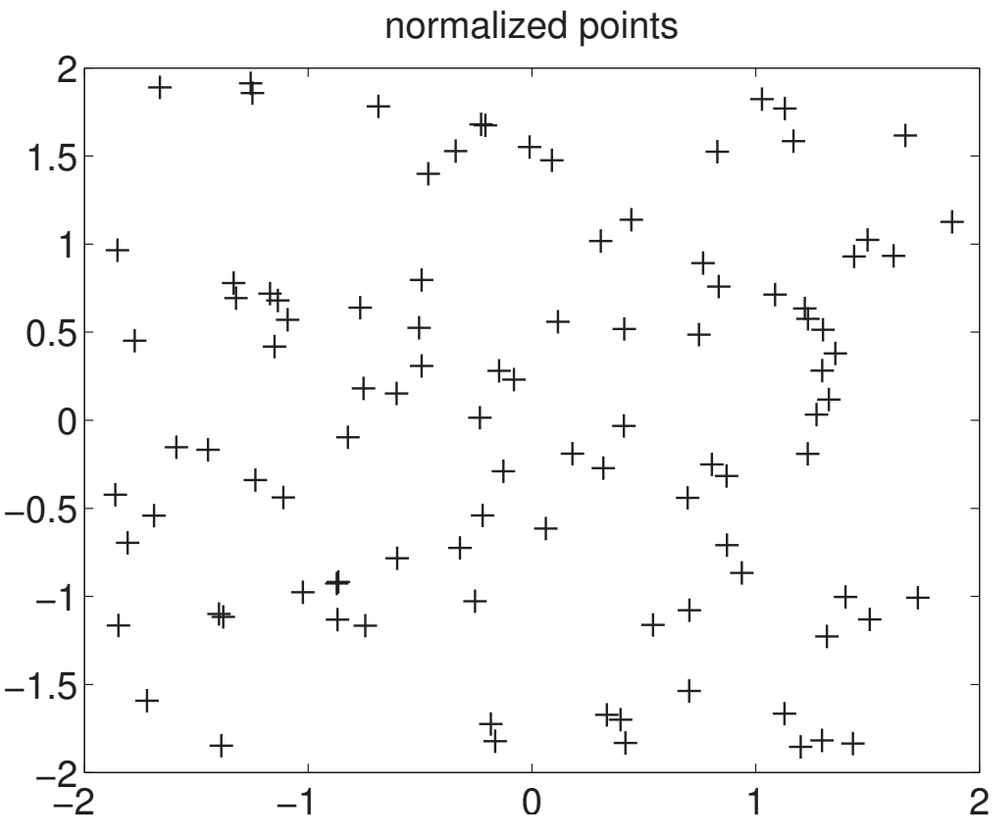


Vidíme, že bez normalizace metoda selhává již při relativně malém šumu. Naopak normalizace se v praxi osvědčila i pro těžká data.

Normalizace souřadnic – jak normalizovat?

Teoretické detaily lze nalézt v [2, 1], implementace `pointnorm.m` v [4]





Použitá transformace[2]:

1. Střed souřadnic je posunut tak, aby těžiště bylo v počátku.
2. Měřítko změněno tak, aby průměrná vzdálenost od počátku byla $\sqrt{2}$

[2] Další varianty možných transformací byly studovány, např. [3], výsledky se však výrazněji neliší.

References

Vysvětlení transformace a odvození LSQ řešení bylo inspirováno knihou [1]

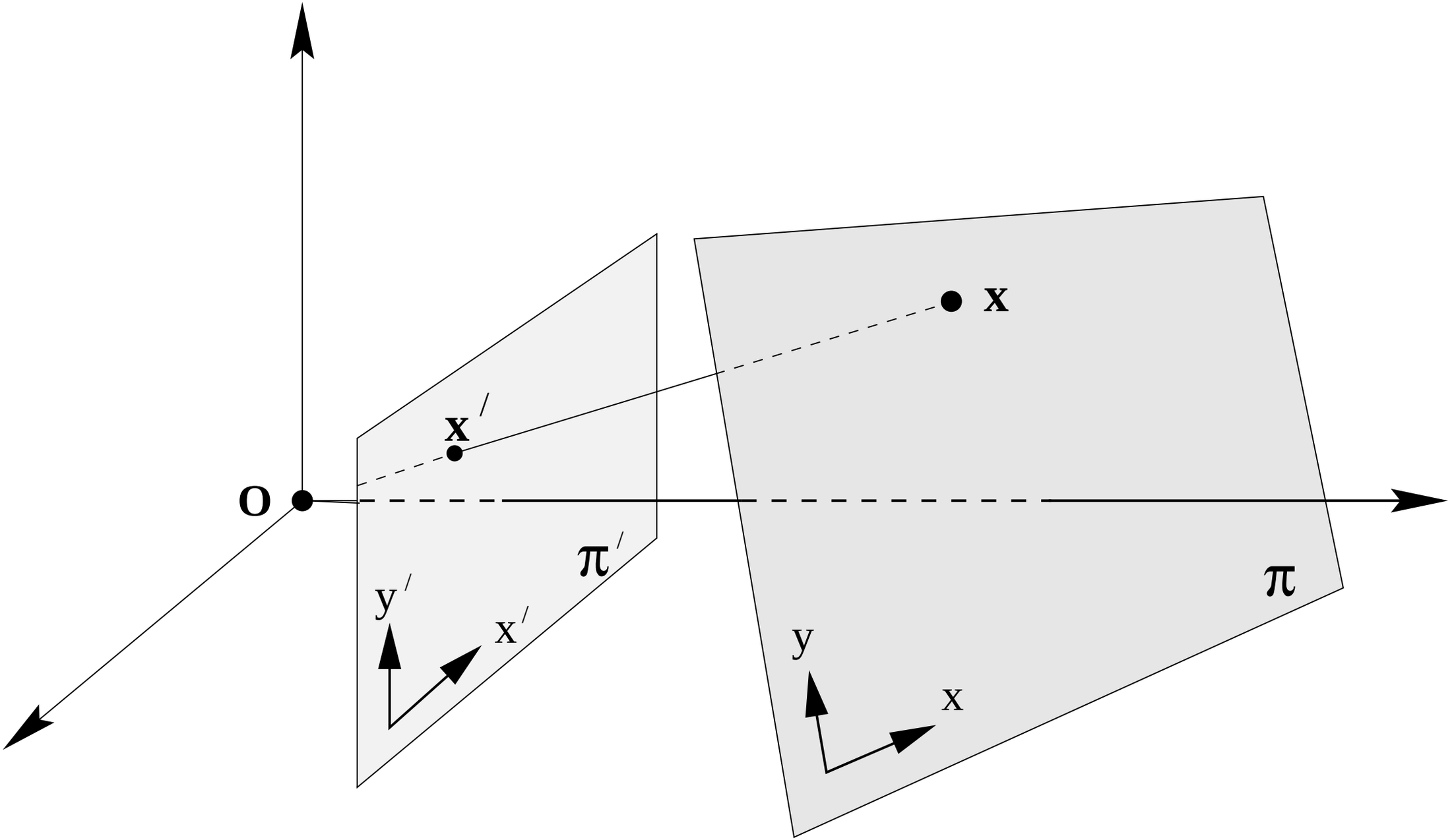
[1] Richard Hartley and Andrew Zisserman. Multiple view geometry in computer vision. Cambridge University, Cambridge, 2nd edition, 2003.

[2] Richard I. Hartley. In defense of the eight-point algorithm. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 19(6):580–593, June 1997.

[3] Matthias Mühlich and Rudolf Mester. The role of total least squares in motion analysis. In Hans Burkhardt and Bernd Neumann, editors, Proceedings of the fifth European Conference on Computer Vision, Freiburg, Germany, volume 1406 of Lecture Notes in Computer Science, pages 305–321. Springer, June 1998.

[4] Tomáš Svoboda, Jan Kybic, and Václav Hlaváč. Image Processing, Analysis and Machine Vision. A MATLAB Companion. Thomson, 2007. Accompanying www site http://visionbook.felk.cvut.cz.

End


x
x′
O
π′
π
y′
x′
y
x

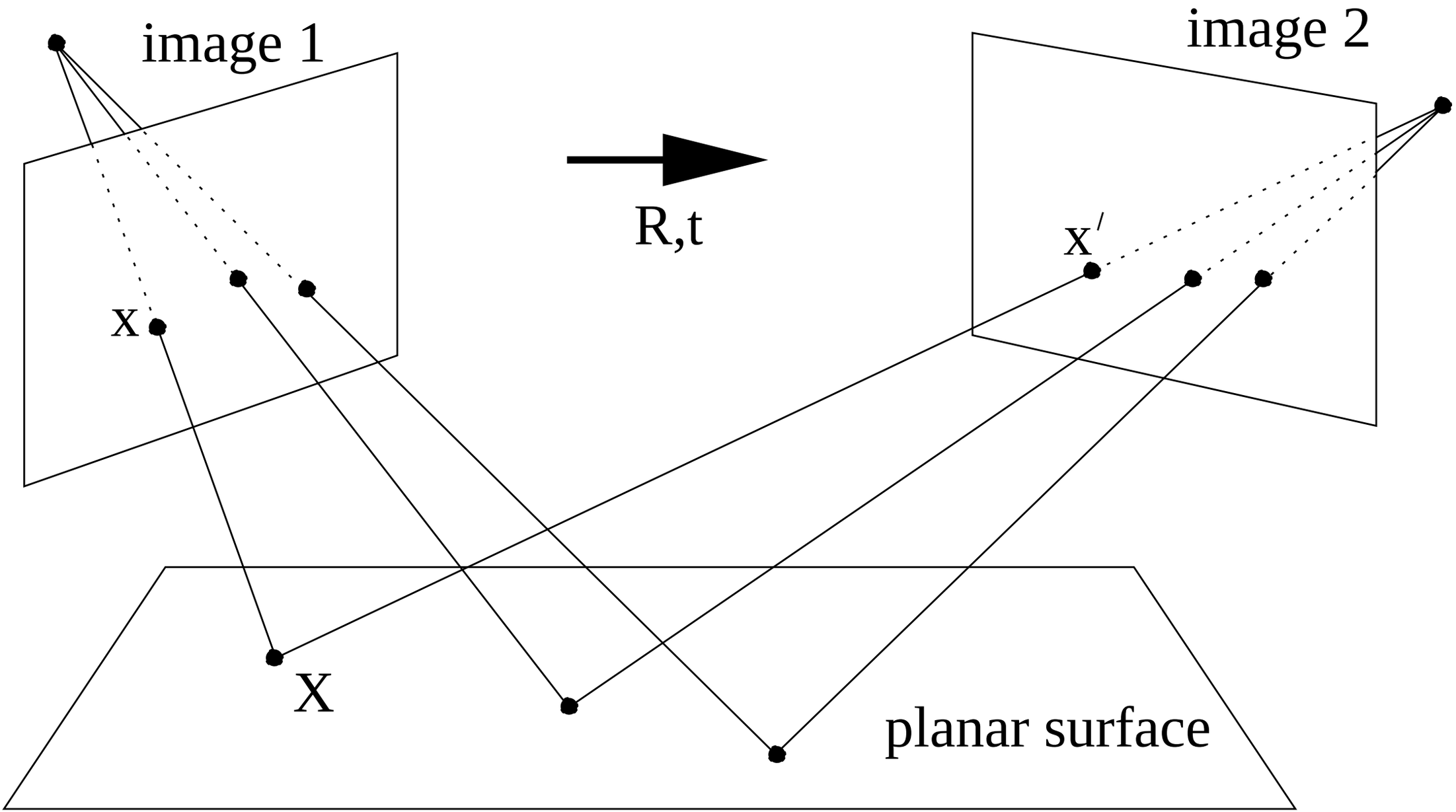
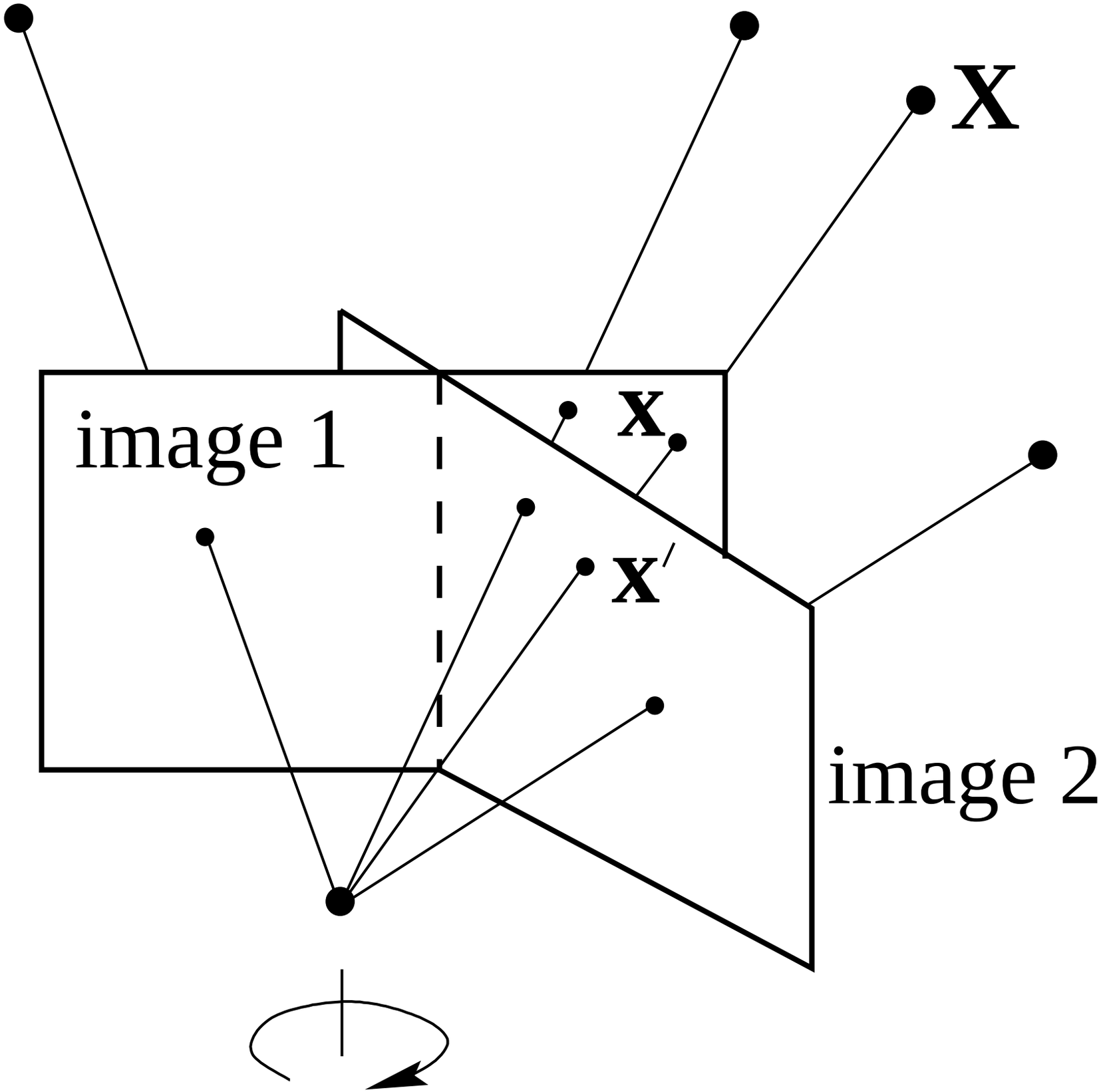
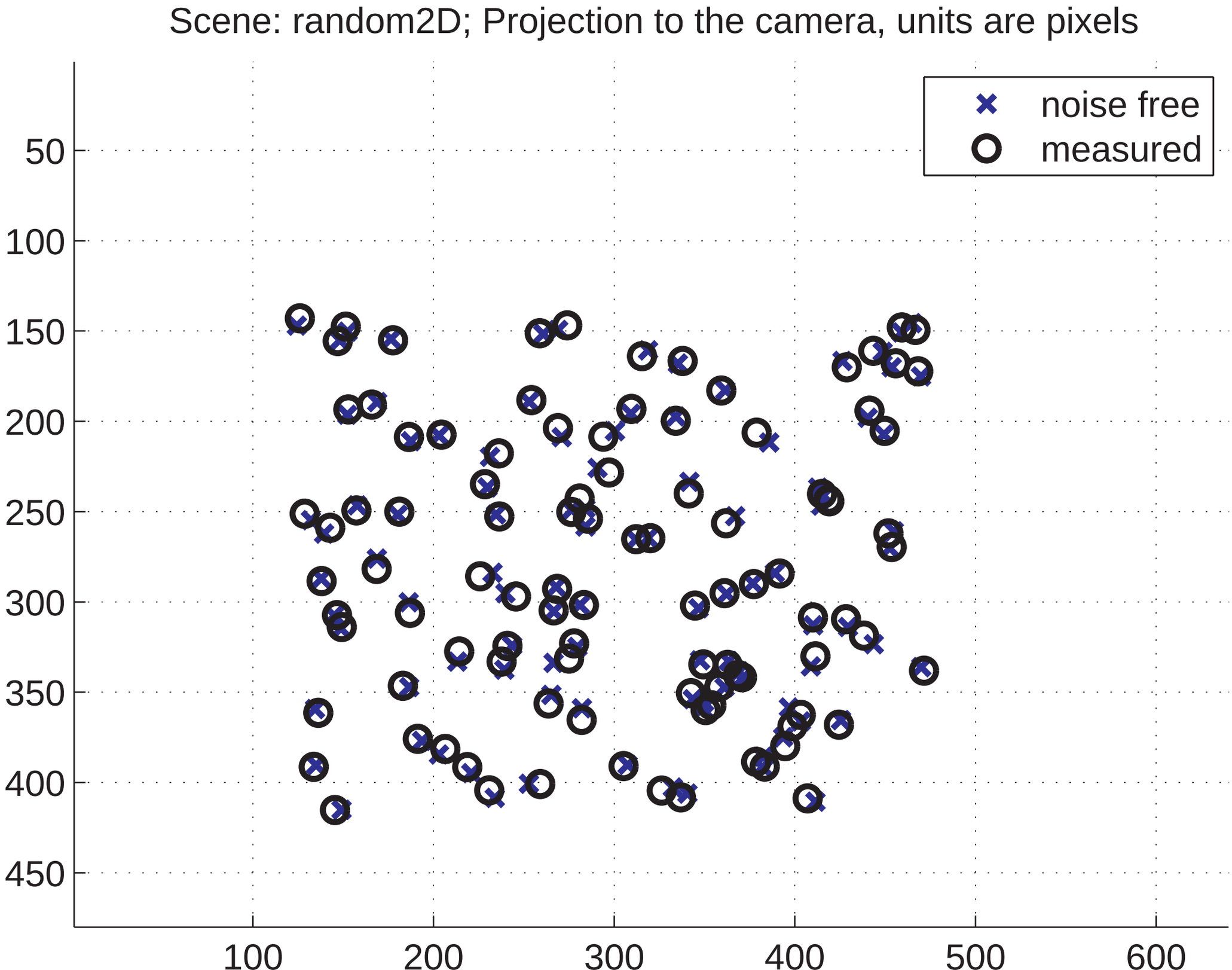


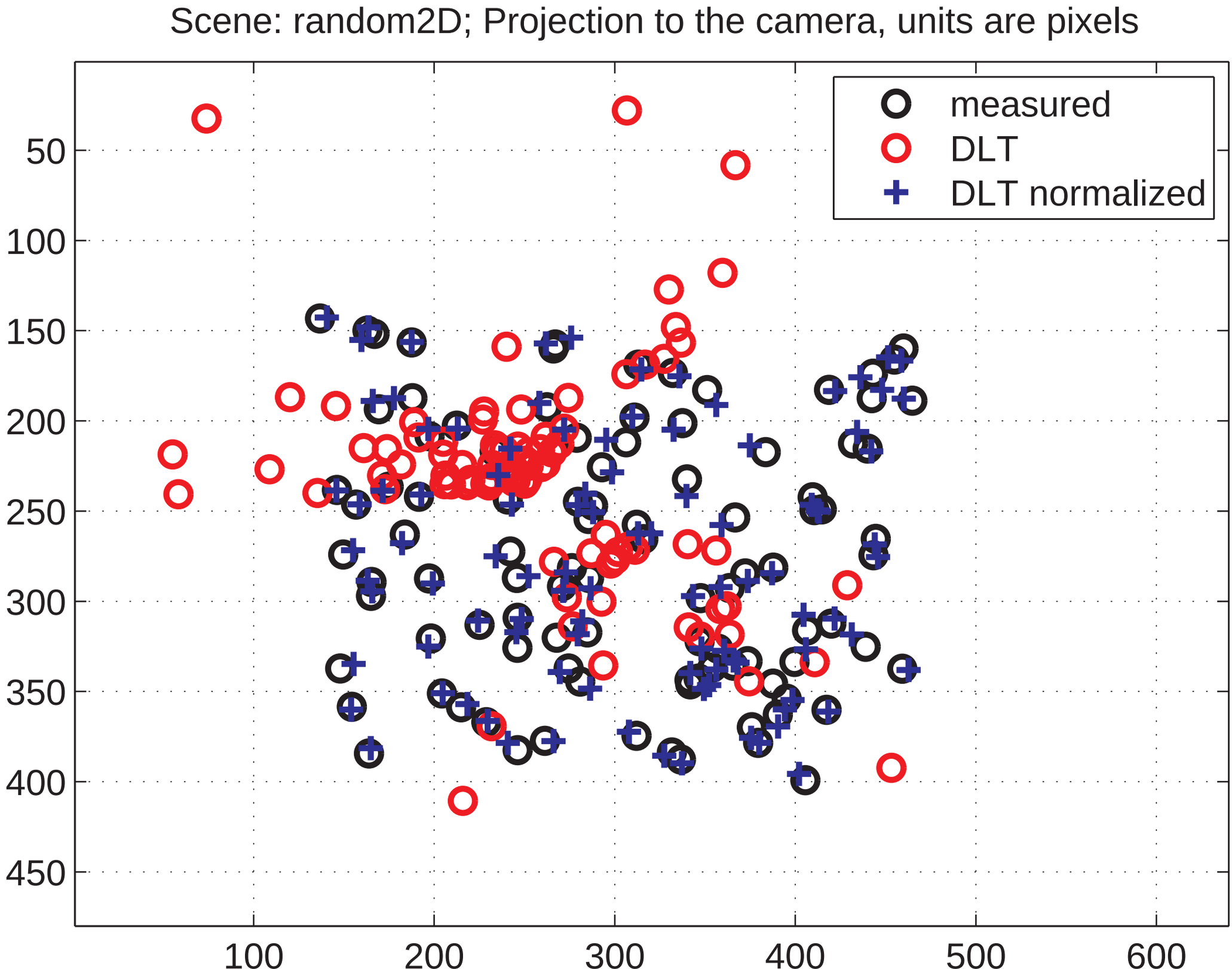
image 1
image 2
R,t
x
x′
X
planar surface

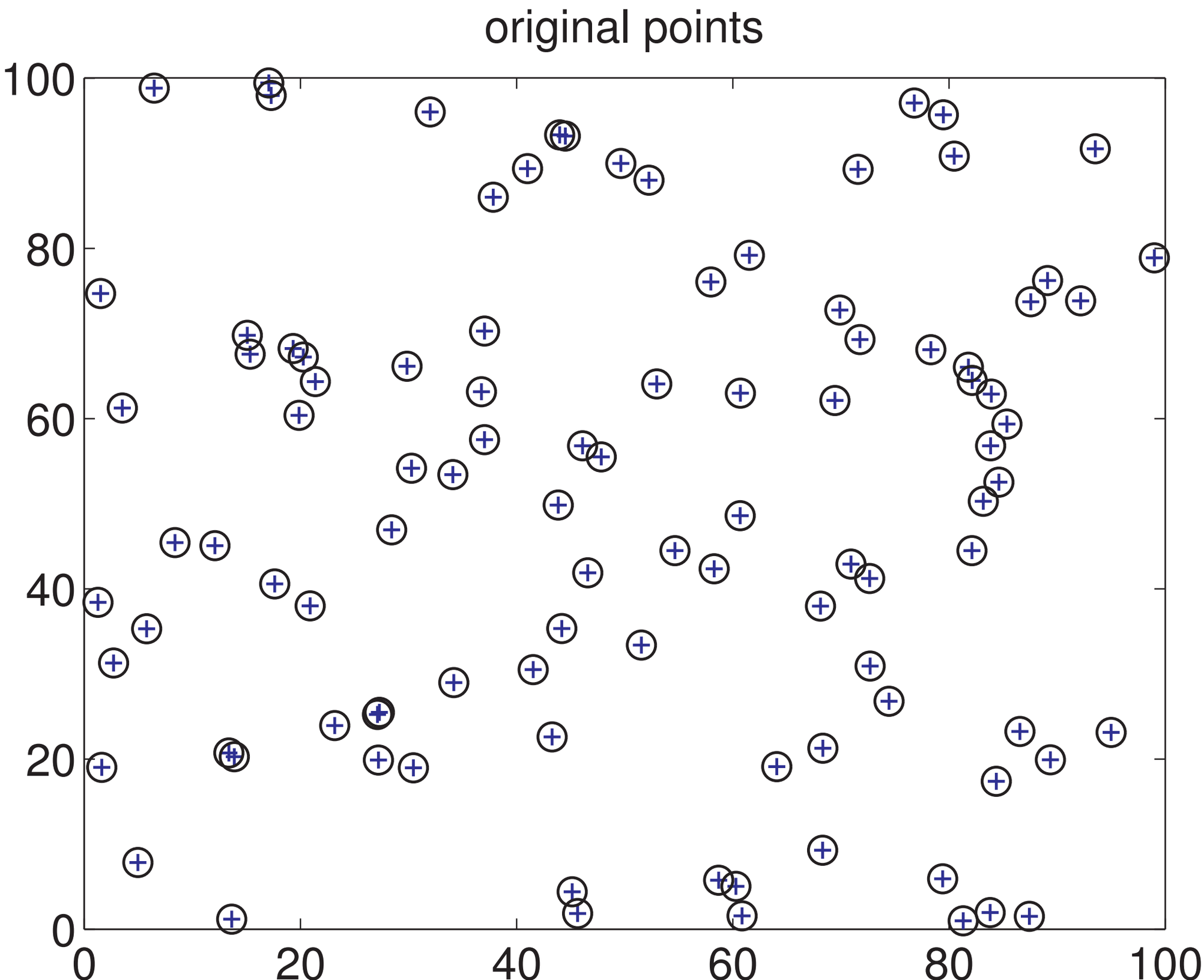

X
image 1
x
x′
image 2

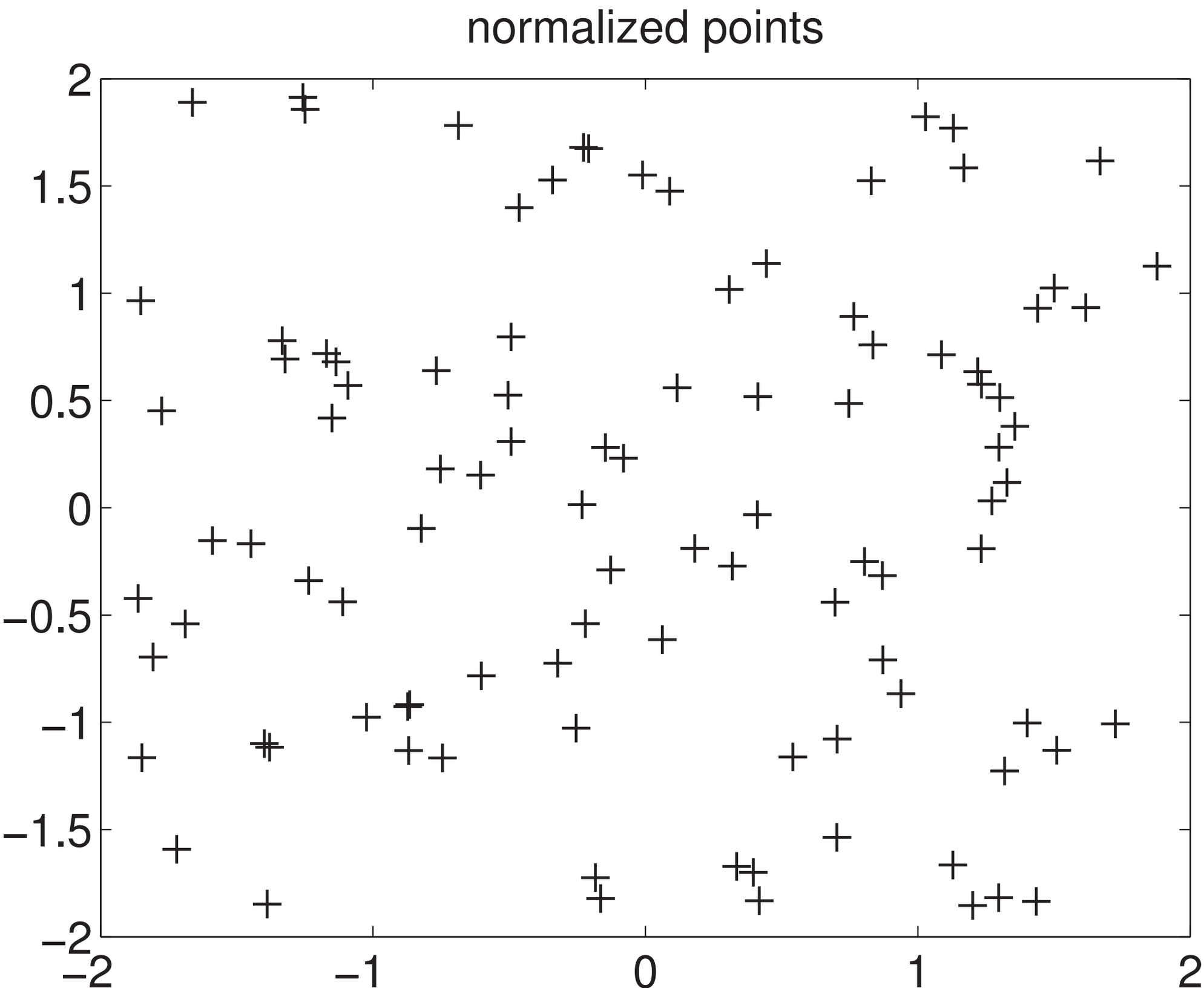

GARO

BURGRUG


Scene: random2D; Projection to the camera, units are pixels
noise free
measured
50
100
150
200
250
300
350
400
450
100
200
300
400
500
600


Scene: random2D; Projection to the camera, units are pixels
measured
DLT
DLT normalized
50
100
150
200
250
300
350
400
450
100
200
300
400
500
600


original points
100
80
60
40
20
0
0
20
40
60
80
100


normalized points
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
−2
−1
0
1
2