Geometrie – úvod

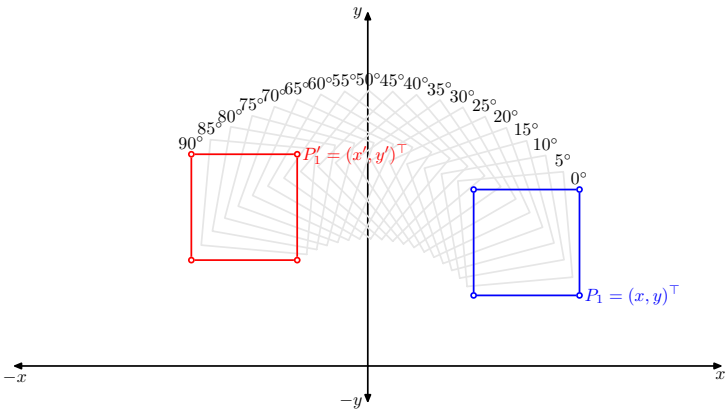
Tomáš Svoboda, svoboda@cmp.felk.cvut.cz
ČVUT FEL, K133, Centrum strojového vnímání
http://cmp.felk.cvut.cz
Poslední aktualizace: 29. září 2008

Osnova

- jednoduchá 2D geometrie v příkladech
- notace, typografické zvyklosti
- přímky a body ve 2D
- projektivní prostor
- body a přímka v nekonečnu

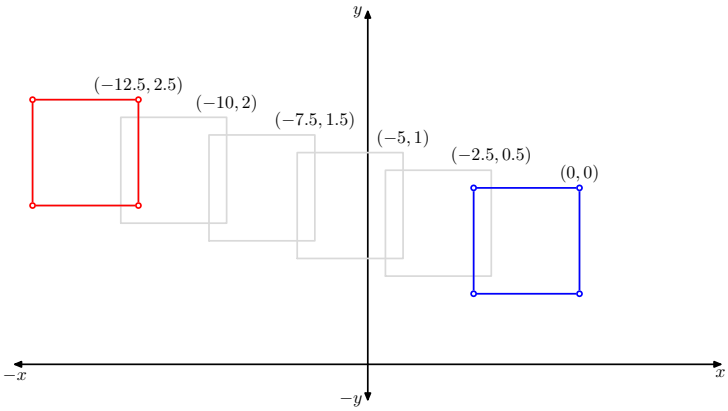
Proč 2D geometrie?

2D rotace, parametr α



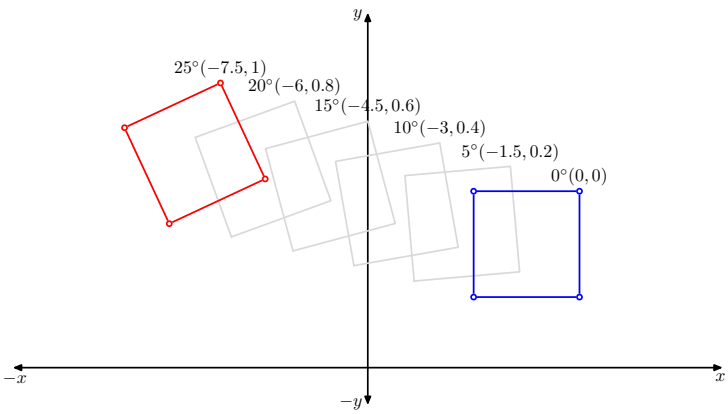
$$
\begin{aligned}
x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\
y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha
\end{aligned}
$$

2D translace, parametry t_x a t_y



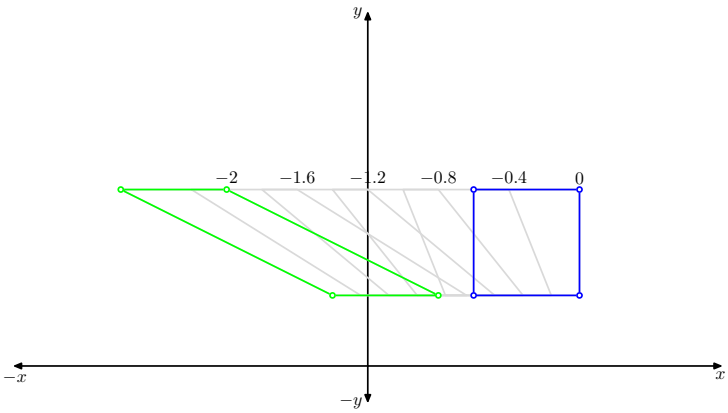
$$
\begin{aligned}
x' &= x + t_x \\
y' &= y + t_y
\end{aligned}
$$

2D rotace a translace



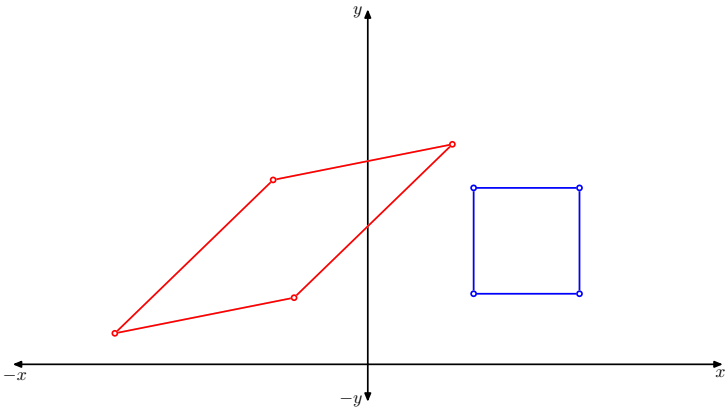
$$
\begin{aligned}
x' &= x \cos\alpha - y \sin\alpha + t_x \\
y' &= x \sin\alpha + y \cos\alpha + t_y
\end{aligned}
$$

2D zkosení, parametr a



$$
\begin{aligned}
x' &= x + ay \\
y' &= y
\end{aligned}
$$

Kombinace všeho – Afinní transformace



$$
\begin{aligned}
x' &= A_{xx}x + A_{xy}y + t_x \\
y' &= A_{yx}x + A_{yy}y + t_y
\end{aligned}
$$

Udělejme v tom trochu pořádek

Nejprve notace

Budeme se převážně držet notace z [1].

skalární veličiny: Klasická matematická kruzíva, příklady $x, y, z, f, t, \ldots$, Většinou malá písmena.

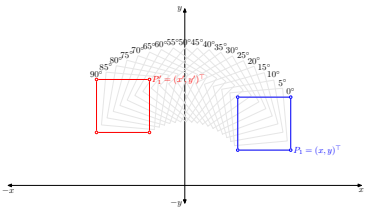
vektory: Tučně, obvyklé malá písmena, příklady: $\mathbf{x}, \mathbf{x}_i^j, \mathbf{t} = (t_1, t_2)^\top$. Budeme uvažovat sloupcové vektory, řadkový vektor pak budeme značit $\mathbf{x}^\top$.

matice: Strojopisné písmo, tedy $\mathtt{A}, \mathtt{K}$ a podobně. Matice o rozměrech 3×3 má tedy tři sloupcové vektory $\mathtt{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$.

obecné body: obvykle kapitálky matenatické kurzívy, tedy např. X, C

speciální znaky: Bude obvykle vysvětleno co znamenají. Např. 2D projektivní prostor $\mathcal{P}^2$, či množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a pod.

Rotace maticově

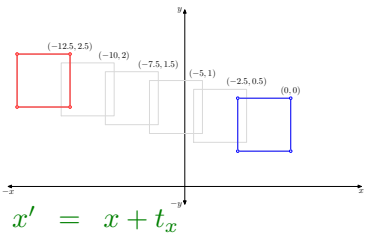


$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathtt{R}\mathbf{x}$$

Translace maticově



$$\begin{aligned} x' &= x + t_x \\ y' &= y + t_y \end{aligned}$$

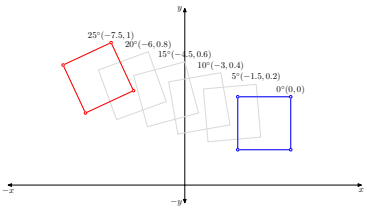
Standardní $\mathbf{x} = (x, y)^\top$ 2×1 vektory nám tady nestačí. Použijme homogenní souřadnice[1] $\mathbf{x} = (x, y, 1)^\top$.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathtt{A}\mathbf{x}$$

[1] Pojem homogenní souřadnice rozebereme podrobněji později.

Rotace a translace maticově

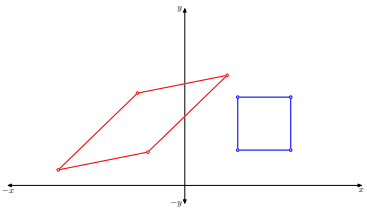


$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + t_x \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + t_y \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & t_x \\ \sin\alpha & \cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathtt{A}\mathbf{x}$$

Afinní transformace



$$\begin{aligned} x' &= A_{xx}x + A_{xy}y + t_x \\ y' &= A_{yx}x + A_{yy}y + t_y \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & t_x \\ A_{yx} & A_{yy} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathtt{A}\mathbf{x}$$

Body a přímky

Přímka v rovině: všechny body $\mathbf{x} = (x, y, 1)^\top$ splňující homogenní rovnici

$$ax + by + c = 0$$

Přímka tak může být reprezentována 3×1 vektorem $\mathbf{l} = (a, b, c)^\top$. Výše uvedenou rovnici pak přepisujeme pomocí skalárního součinu[2] dvou vektorů:

$$\mathbf{l}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{l} = 0$$

Uvidíme, že zavedená notace má příjemné důsledky . . .

[2] dot product

Průsečík přímek

Uvažujme $\mathbf{l} = (a, b, c)^\top$ a $\mathbf{l}' = (a', b', c')^\top$

Pro smíšený součin platí

$$\mathbf{l}^\top(\mathbf{l} \times \mathbf{l}') = \mathbf{l}'^\top(\mathbf{l} \times \mathbf{l}') = 0\,,$$

kde $\times$ značí vektorový součin[3]. Vidíme tedy, že bod

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}'$$

leží na obou přímkách, neboli průsečík.

[3] cross product

Přímka spojující body

Uvažujme $\mathbf{x} = (x, y, 1)^\top$ a $\mathbf{x}' = (x', y', 1)^\top$

stejným uvažovaním jako pro průsečík přímek dojdeme k závěru, že

$$\mathbf{l} = \mathbf{x} \times \mathbf{x}'$$

je hledaná přímka

Vidíme, že stejné vzorce platí pro body i přímky. Uvedený fakt se nazývá princip duality.

Homogenní souřadnice I

Mějme přímku $\mathbf{l} = (a, b, c)^\top$

$$ax + by + c = 0$$

avšak $\mathbf{l} = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)^\top$

$$\lambda ax + \lambda by + \lambda c = 0$$

je tatáž přímka, rovnice platí pro stejnou množinu bodů $(x, y)^\top$. Vektory $(a, b, c)^\top$ a $\lambda(a, b, c)^\top$ shodné až na měřítko označují tutéž přímku, jsou ekvivalentní.

Třída ekvivalence vektorů, které mají výše uvedenou vlastnosti se nazývá homogenní vektor.

Množina tříd ekvivalence vektorů v $\mathbb{R}^3 - (0, 0, 0)^\top$ tvoří dvoudimensionální Projektivní prostor $\mathcal{P}^2$. Vyřazený nulový vektor neoznačuje ani přímku ani bod.

Homogenní souřadnice II

Zatím jsme uvažovali $\mathbf{x} = (x, y, 1)^\top$, neboli $x_3 = 1$. Připomeňme, že rovnici $ax + by + c = 0$ můžeme napsat ve formě skalárního součinu:

$$(x, y, 1)^\top (a, b, c) = 0$$

Snadno vidíme, že také

$$(\lambda x, \lambda y, \lambda)^\top (a, b, c) = 0$$

pro libovolné λ. Zavedeme obecné homogenní souřadnice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Na prostorové souřadnice (tedy ty, co kreslíme a měříme) v $\mathcal{R}^2$ přejdeme snadno

$$(x, y)^\top = (x_1/x_3, x_2/x_3)^\top$$

Co s $x_3 = 0$?

$$(x, y)^\top = (x_1/x_3, x_2/x_3)^\top$$

pak tedy nutně

$$(x, y)^\top = (\infty, \infty)^\top$$

Bod tedy leží někde v nekonečnu. I když se to zdá jako komplikace, mít takový bod v nekonečnu je výhodné.

Rovnoběžné přímky se protínají v nekonečnu!

Bod v nekonečnu – příklad

Uvažujme dvě přímky $x = 1$ a $x = 2$. V homogenní reprezentaci tedy $\mathbf{l} = (-1, 0, 1)^\top$ a $\mathbf{l}' = (-1, 0, 2)^\top$. Prusečík je

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \times \mathbf{l}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

což je bod v nekonečnu ve směru osy y.

Kartézké vs. obrazové souřadnice

References

V přednášce byl pro kreslení náčrtků použit program MetaPost [2]. Výklad geometrie byl inspirován kapitolou 2 knihy [1].

[1] Richard Hartley and Andrew Zisserman. Multiple view geometry in computer vision. Cambridge University, Cambridge, 2nd edition, 2003.

[2] John Hobby. MetaPost. http://cm.bell-labs.com/who/hobby/MetaPost.html.

End