2.2. Metrické prostory

Někdy je třeba zkoumat metriku (resp. systémy okolí bodů) na množinách, které nejsou opatřeny lineární (či jinou) algebraickou strukturou. Pak studujeme metrické či obecněji topologické prostory. Projděme si nejprve základní pojmy a některé výsledky. Speciálním otázkám se budeme věnovat v dalších částech.

Definice (metrický prostor): Nechť X je množina, $X \neq \emptyset$. Pak (X, d) se nazývá *metrický prostor*, pokud d je metrika, tj. pokud $\forall x, y, z \in X$ platí ($d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$):

(i) $0 \leq d(x, y) < \infty$

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (když požadujeme jen $\Leftarrow$, pak prostor nazýváme *pseudometrický*, rozdíl v teorii metrických a pseudometrických prostorů je nepatrný)

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

V předchozí části jsme dokázali následující tvrzení.

Tvrzení: Každý normovaný prostor je metrický.

Připomeňme základní pojmy metrických prostorů (některé už známe):

Posloupnost x_n je *cauchyovská* $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0, \forall m, n \geq n_0\colon d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$.

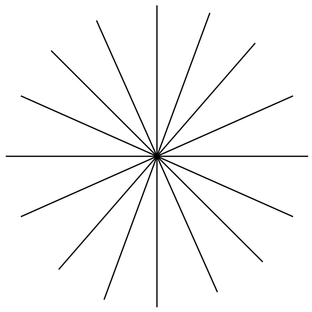
Posloupnost x_n je *konvergentní k bodu* $x \in X \iff \forall \varepsilon$–okolí bodu $O_\varepsilon(x)$ bodu $x \in X\ \exists\ n_0, \forall m \geq n_0 : x_m \in O_\varepsilon(x)$. ($\varepsilon$-okolí bodu x v metrickém prostoru (X, d) je množina $O_\varepsilon(x)$, $O_\varepsilon(x) = \{y | d(x, y) < \varepsilon\}$.)

Definice (úplný metrický prostor, komaktní metrický prostor, totálně omezený metrický prostor):

Metrický prostor (X, d) se nazývá *úplný* (complete), jestliže každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní (rozumí se konvergentní v tom prostoru X).

Metrický prostor se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků toho prostoru lze vybrat posloupnost v tom prostoru konvergentní.

Metrický prostor se nazývá *totálně omezený* (někdy též nazývaný prekompaktní), jestliže z každé posloupnosti prvků toho prostoru lze vybrat posloupnost cauchyovskou.



Obrázek 2.2.: Ježek.

Příklady:

1. Prostor $\mathbb{R}$ reálných čísel s obvyklou metrikou $d(x,y) = |x-y|$ je prostor úplný (Bolzano – Cauchy podmínka). Tento prostor ovšem *není* kompaktní. (Z posloupnosti $x_n = n$ nelze vybrat posloupnost v $\mathbb{R}$ konvergentní.)
2. Interval $\langle 0,1\rangle$ je kompaktní prostor. Rovněž $\langle 0,1\rangle^n$ je kompaktní prostor. (Podrobný důkaz podáme později.)
3. Prostor $\langle 0,1)$ není kompaktní (posloupnost $x_n = \dfrac{1}{n}$ je v $\langle 0,1)$, ale není tam konvergentní) a je totálně omezený.

Ukážeme si, že kompaktní prostory mají řadu užitečných vlastností. Uvidíme například, že v R^n je množina (chápaná jako metrický podprostor) kompaktní právě když je uzavřená a omezená. Také nahlédneme, že kompaktní $\Longleftrightarrow$ úplný + totálně omezený.

Příklady (další příklady metrických prostorů):

1. Zajímavý příklad je tzv. ježek (viz obráze 2.2): Interval $\langle 0,1\rangle$ vezmeme nekonečněkrát a pak "slepíme" tyto invervaly v bodě 0. Vzniklý metrický prostor, zvaný zlidověle ježek, je úplný metrický prostor (není ovšem kompaktní).

   Metrika d na ježku: $d(x,y)$ = obyčejná vzdálenost na $\langle 0,1\rangle$, pokud x,y jsou body na jedné "bodlině", jinak
   $$d(x,y) = d(x,0) + d(y,0)\ .$$

   Můžeme uvažovat i ježka s jinou metrikou, například tzv. "ruského ježka": Množinově je stejný s předchozím, je ale uvažována jiná metrika: $d(x,y) =$

$d(x,0) + d(y,0)$ pro všechny body x, y (tj. i na stejné bodlině musíme měřit vzdálenost "přes" 0; ovšem $d(x,y) = 0$ pokud $x = y$). Název, pracovně používaný topology, je odvozen od způsobu cestování v bývalém SSSR: Možnost stěhování musí být potvrzena "bumáškou" v Moskvě ...

2. Buď X množina všech železničních stanic a $d(x,y)$ cena jízdenky z místa x do místa y. Dostaneme konečný metrický prostor.

3. Nechť $X \subset \mathbb{R}^2$, $X = \{(m,n)|\ m,n \text{ jsou celá čísla}\}$. Pro $A, B \in X$ definujeme $d(A,B)$ jako minimální délku "řetízku" v X spojujícího A s B. Pak $d(A,B)$ je metrika.

Uveďme některé důležité výsledky z teorie metrických prostorů. Připomeňme, že v metrickém prostoru (M,d) se posloupnost x_n $(n \in N)$ nazývá *metricky diskrétní*, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, $\forall i, j, i \neq j$. Posloupnost, která je metricky diskrétní pro jisté ε, se nazývá *metricky diskrétní řádu* ε.

Věta (posloupnostní princip v metrických prostorech): Z každé nekonečné posloupnosti v metrickém prostoru lze vybrat buď nekonečnou posloupnost cauchyovskou, nebo nekonečnou posloupnost metriky diskrétní ("nebo" je zde užito v nevylučovacím smyslu).

Důkaz: Vezměme jednotkovou kouli (v metrice d) kolem každého bodu x_n, tj. uvažujme množiny $O(x_n, 1) = \{y \in M \mid d(x_n, y) < 1\}$. Pokud každá z těchto množin obsahuje jen konečně mnoho bodů, lehce najdeme (nekonečnou) metricky diskrétní posloupnost řádu 1. Pokud ne, máme okolí $O(x_p, 1)$, které obsahuje nekonečně mnoho bodů z posloupnosti x_n. Označme tyto body y_n $(n \in N)$ a utvořme soustavu všech $\frac{1}{2}$-koulí v metrice d kolem y_n, tj. uvažujme množiny $O(y_n, \frac{1}{2})$. Jestliže každá z těchto množin obsahuje jen konečně mnoho bodů z posloupnosti y_n, pak lehce najdeme (nekonečnou) metricky diskrétní posloupnost řádu $\frac{1}{2}$. Jestliže ne, pokračujeme dál stejně pro $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, atd.

Je zřejmé, že buď pro nějaké $\frac{1}{n}$ dostaneme posloupnost $\frac{1}{n}$-diskrétní, anebo nám zmenšující se koule obsahující pořád nekonečně mnoho bodů lehce umožní najít cauchyovskou podposloupnost. **QED.**

Tvrzení: Metrický prostor (M,d) je totálně omezený $\iff$ každá metricky diskrétní posloupnost v M je konečná.

Důkaz: Ihned plyne z předchozí věty – pokud se z posloupnosti nedá vybrat cauchyovská, dá se vybrat metricky diskrétní. **QED.**

Všimeme si, že totálně omezený prostor nemůže být "příliš velký". Vyjádřeno formálně, každý totálně omezený metrický prostor M je separabilní, tj lze najít spočetnou podmnožinu S v M takovou, že $\bar{S}$ v M je roven celému M ($\bar{S} = M$; říkáme, že S *je hustá* v M).

Požadopvaná množina S se sestrojí snadno: Pro každé $n \in N$ buď S_n maximální $\frac{1}{n}$-diskrétní podmnožina v M. Jelikož M je totálně omezený, musí být každé S_n konečné. Nyní stačí položit $S = \cup_{n \in N} S_n$. Je zřejmé, že S je hustá v M.

Věta: Metrický prostor(M, d) je kompaktní $\iff$ úplný a totálně omezený.

Důkaz: Pokud je M kompaktní, pak je zřejmě úplný i totálně omezený (z metricky diskrétní posloupnosti nelze samozřejmě vybrat konvergentní). Předpokládejme naopak, že M je úplný a totálně omezený. Mějme dánu posloupnost x_n $(n \in N)$. Jelikož M je totálně omezený, nedá se z ní vybrat posloupnost metricky diskrétní. Pak se z ní musí podle posloupnostního principu dát vybrat posloupnost cauchyovská. Jelikož M je úplný, musí tato posloupnost konvergovat. Vidíme, že z každé posloupnosti v M se dá vybrat posloupnost konvergentní. **QED.**

Následující věta představuje jeden z nejdůležitějších "principů" moderní matematiky. Připomeňme, že zobrazení $f\colon M \to K$ mezi dvěma metrickými prostory se nazývá spojité na M, jestliže $x_n \to x$ v M implikuje $f(x_n) \to f(x)$ v K.

Věta: Nechť $f\colon M \to R$ je spojitá funkce na kompaktním metrickém prostoru M. Pak f nabývá svého maxima (resp. minima) v nějakém bodě z M.

Důkaz: Dokažme to pro maximum (důkaz pro minimum obdržíme přechodem k funkci $-f$). Techniku už známe: Nejprve ukážeme, že f je omezená. Je-li totiž $f(x_n) \geq n$ pro nějakou posloupnost $x_n \in M$, pak vybereme podposloupnost x_{n_k}, která konverguje. Tedy $x_{n_k} \to x$ a tudíž (f je spojitá) $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Ale pak $f(x) = +\infty$, což je spor.

Pokud tedy f je omezená, existuje $\sup\limits_{x \in M} f$. Máme tudíž posloupnost y_n takovou, že $\sup f = \lim f(y_n)$. Ale M je kompaktní, takže y_n má konvergentní podposloupnost, řekněme nějakou posloupnost y_{n_k}. Nechť $y_{n_k} \to y$. Pak nutně $\sup\limits_{x \in M} f = f(y)$. **QED.**

Nyní budeme formulovat důležitou větu, která charakterizuje kompaktní podmnožiny v R^n (později ukážeme ještě i jiný způsob). Použijeme známou Weierstrassovu větu, která říká, že z každé omezené posloupnosti v R^n se dá vybrat posloupnost konvergentní (důkaz Weierstrassovy věty v R^2, který lze nalézt ve skriptu P. Pták, Calculus II; v R^n se důkaz provede stejně). Připomeňme, že množina S v R^n se nazývá *omezená*, jestliže $S \subset < a, b >^n$ pro nějaké $a, b \in R$.

Věta: $M \subset R^n$ je kompaktní (jakožto metrický prostor s metrikou získanou zúžením Eukleidovské metriky z R^n) $\iff$ M je uzavřená v R^n a omezená.

Důkaz: M je úplný, protože (dokaž!) každý uzavřený podprostor úplného prostoru je úplný (R^n je úplný prostor jak plyne z Weierstrassovy věty – každá cauchyovská posloupnost v R^n je omezená množina). Zbývá ukázat, že v R^n je každá omezená množina totálně omezená. To také ihned plyne z Weierstrassovy věty, ježto z každé omezené posloupnosti lze vybrat cauchyovskou. **QED.**

Další důležitou vlastností kompaktních metrických prostorů je to, že spojité funkce na nich jsou automaticky stejnoměrně spojité.

Věta: Nechť (M, d) je kompaktní metrický prostor a nechť $f\colon M \to R$ je spojitá funkce na M. Pak f je stejnoměrně spojitá, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ tak, že pokud $d(x, y) < \delta, x, y \in M$, pak $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Důkaz: Nechť f není stejnoměrně spojitá. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n \in N$ lze najít body $x_n, y_n \in M$ s vlastností $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Vezměme posloupnost (x_n) v M. Jelikož M je kompaktní, pak se dá najít podposloupnost x_{n_k}, která v M konverguje. Nechť tedy $x_{n_k} \to x \in M$. Ale funkce f je v bodě x spojitá. Tedy vezmeme-li $\dfrac{\varepsilon}{2}$, můžeme najít n_0 tak, že pokud $d(x, y) < \dfrac{1}{n_0}$, pak $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Vezměme nyní m tak velké, aby $m \geq 2n_0$ a aby platilo $d(x, x_m) < \frac{1}{m}$. Máme ovšem i $d(x_m, y_m) < \frac{1}{m}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $d(x, y_m) < \dfrac{1}{n_0}$, ale $|f(x_m) - f(y_m)| \geq \varepsilon$ a tedy $|f(x) - f(y_m)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$. To je spor. **QED.**

V nekonečnědimenzionálních prostorech není tak snadné charakterizovat kompaktnost podprostorů (viz Ascoliho-Arrelova věta, dokazovaná později). Omezenost a uzavřenost nestačí jak ukazuje následující základní výsledek.

Věta: Nechť $(L, \|.\|)$ je normovaný prostor. Pak $\dim L < +\infty$ právě když uzavřená jednotková koule v L (tj. množina $\{x \in L \mid \|x\| \leq 1\}$) je kompaktní.

Důkaz: Pokud $\dim L < +\infty$, pak L je samozřejmě ekvivalentní (ve smyslu lineárním i ve smyslu ekvivalence norem) Euklidovskému prostoru R^n. Jak jsme ukázali, uzavřená jednotková koule je zde kompaktní.

Důkaz druhé implikace je složitější. Nechť $\dim L = \infty$. Dokažme si nejprve následující pomocné tvrzení (v trochu obecnější formě, než budeme potřebovat): Nechť Q je vlastní uzavřený lineární podprostor L. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak lza najít $y \in L, \|y\| = 1$ tak, že pro všechna $x \in Q$ platí $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$. Dokazujeme toto pomocné tvrzení. Buď $y_0 \in L - Q$. Položme $d = \inf_{x \in Q} \|x - y_0\|$. Pak $d > 0$, neboť Q je uzavřený. Předpokládejme, že je dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice infima pak platí, že existuje $x_0 \in Q$ s vlastností $d \leq \|x_0 - y_0\| < d + d\varepsilon$. Nechť $y = \dfrac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Pak $y \notin Q$

a $\|y\| = 1$. Navíc platí

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \|\frac{x_0-y_0}{\|x_0-y_0\|}-x\| = \frac{1}{\|x_0-y_0\|}\|(x_0-x\|x_0-y_0\|-y_0)\| \\ &> \frac{1}{d+d\varepsilon}\|(x_0-x\|x_0-y_0\|-y_0)\| \\ &\geq \frac{d}{d+d\varepsilon} = 1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 1-\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali pomocné tvrzení. Pomocí něho (při volbě $\varepsilon = \frac{1}{2}$) už snadno ukončíme důkaz. Stačí ukázat, že jednotková koule v L není totálně omezená. Za tím účelem najdeme v L nekonečnou metricky diskretní posloupnost v jednotkové kouli. Vezměme libovolně $x_1 \in L$ tak, že $\|x_1\| = 1$. Uvažujme lineární obal $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x}_1\}$, což je vlastní uzavřený podprostor v L. Podle předchozího pomocného tvrzení lze najít vektor $x_2 \in L - \mathrm{Span}\,\{\mathrm{x}_1\}$ takový, že $\|x_2\| = 1$ a $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Uvažujme teď $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$. To je vlastní uzavřený podprostor v L. Tedy lze najít $x_3 \in L - \mathrm{Span}\,\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$ takový, že $\|x_3\| = 1$ a $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Takto postupujeme dále a zkonstruujeme $\frac{1}{2}$-diskretní posloupnost v jednotkové kouli $\{x \mid \|x\| \leq 1\}$. Pak tedy jednotková koule nemůže být kompaktní a důkaz je proveden.

QED.

2.3. Ascoli

Tvrzení: Metrický prostor (M, d) je totálně omezený $\Leftrightarrow$ z každého pokrytí prostoru M všemi otevřenými ε-koulemi lze vybrat pokrytí konečné.

Důkaz: Nechť $K(m)_\varepsilon = \{x \in M \mid d(x,m) < \varepsilon\}$ a nechť $\mathscr{P} = \{K(m)_\varepsilon \mid m \in M\}$. Pokud z $\mathscr{P}$ nelze vybrat konečnou množinu, která pokrývá M, pak snadno zkonstruujeme ε-diskrétní posloupnost v M. To ale není možné, neboť (M, d) je totálně omezený. Naopak, nechť je dána posloupnost $p_n \in M$. Pokud z ní nelze vybrat posloupnost Cauchyovskou, dá se z ní vybrat posloupnost ε-diskrétní (posloupnostní princip). Pak ale z pokrytí $\frac{\varepsilon}{2}$-koulemi nelze vybrat pokrytí konečné a důkaz je hotov.

QED.

Věta (Ascoli): Nechť X je kompaktní prostor a nechť $C(X)$ je prostor spojitých komplexních funkcí na X s metrikou stejnoměrné konvergence ($d(f,g) = \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|$. Nechť $P \subset C(X)$ je bodově omezená a “stejně” spojitá soustava funkcí, tj. nechť

(i) $\sup\{|f(x)|; f \in P\} < +\infty$ pro každé $x \in X$,

(ii) jestliže $\varepsilon > 0$, pak každé $x \in X$ má takové okolí V_x, že platí $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pro všechny funkce $f \in P$ a všechna $y \in V_x$.

Pak P je totálně omezený metrický prostor (P chápáno jako metrický podprostor $C(X)$).

Poznámka: Někdy se říká, že P je totálně omezená v $C(X)$. Jelikož $C(X)$ je úplný metrický prostor, uzávěr P v $C(X)$ je prostor kompaktní a tudíž každá posloupnost v P obsahuje konvergentní podposloupnost (s limitou v $C(X)$). Takto bývá někdy Ascoliho věta formulována. – Podmínky (i), (ii) jsou ovšem nejen postačující, ale i nutné; Ascoliho věta tedy charakterizuje totální omezenost v $C(X)$.

Důkaz: Předpokládejme, že je dáno ε, $\varepsilon > 0$. Jelikož X je kompaktní prostor a okolí V_x ($x \in X$) a formulace věty představují otevřené pokrytí prostoru X, lze z tohoto pokrytí vybrat pokrytí konečné. Tudíž existuje konečně mnoho okolí $V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}$ takových, že $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Přitom $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ pro každé $f \in P$ a každé $x \in V_{x_i}$ ($1 \leq i \leq n$). Z podmínky (i) aplikované na body x_i ($1 \leq i \leq n$) plyne, že P je *stejnoměrně* omezená: $\sup\{|f(x)| x \in X, f \in P\} = M < +\infty$. Položme $K = \{\alpha \in C \mid |\lambda| \leq M\}$ a uvažujme součin K^n jako metrický podprostor C^n. Uvažujme zobrazení $p\colon P \to K^n$ dané předpisem $p(f) = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$.

Jelikož K^n je totálně omezená, lze ji pokrýt konečně mnoha množinami s diametrem menším než ε. Tedy existuje konečně mnoho funkcí $f_1, f_2, \dots, f_m$ tak, že $p(f)$ je blízko “řádu ε” nějakého $p(f_n)$.

Nyní se už důkaz snadno ukončí. Nechť $f \in P$. Pak existuje k ($1 \leq k \leq m$) takové, že $|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon$ pro všechna x_i ($1 \leq i \leq n$). Jelikož každé $x \in X$ leží v nějakém V_{x_i}, pro toto i ($1 \leq i \leq n$) máme $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ a také $|f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon$. Jednoduchou aplikací trojúhelníkové nerovnosti pak dostáváme $|f(x) - f_k(x)| < 3\varepsilon$ pro každé $x \in X$. Jelikož ε bylo libovolné, P je totálně omezená a důkaz je hotov. **QED.**

Uveďme jednu velmi důležitou aplikaci Ascoliho–Arzelovy věty. Připomeňme, že zobrazení $f\colon M \to K$ mezi dvěma metrickými prostory se nazývá *totálně omezené*, jestliže pro každou (metricky) omezenou množinu $L \subset M$ je $f(L)$ totálně omezená. Je zřejmé, že každé lineární zobrazení $f\colon R^n \to R^m$ je totálně omezené (pro $R^m, m \in N$, ovšem omezené a totálně omezené množiny splývají), ale hlavní aplikace nalézáme pro některé operátory v nekonečně dimenzionálních prostorech. Zde je situace složitější, např. identické zopbrazení z nekonečnědimenzionálního prostoru do sebe není *nikdy* totálně omezené (neboť jednotková koule tam nikdy není omezená).

Věta: Nechť $C\langle 0, 1\rangle$ je (Banachův) prostor spojitých funkcí na $\langle 0, 1\rangle$ opatřený sup normou. Nechť $F\colon C\langle 0,1\rangle \to C\langle 0,1\rangle$ je zobrazení definované takto:

$$F(f)(s) = y(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt,$$

kde $K(s,t)$ je funkce spojitá v $\langle 0,1\rangle^2$. Pak F je totálně omezené zobrazení.

Důkaz: Nechť $L \subset C\langle 0,1\rangle$ je omezená množina v $C\langle 0,1\rangle$, tj. nechť existuje konstanta $R > 0$ taková, že pro každé $f \in L$ platí $\|f\| \leq R$. Podle Ascoliho-Arzelovy věty máme ověřit, že množina $F(L)$ je stejně omezená a stejně spojitá. Funkce z množiny $F(L)$ jsou stejně omezené:

$$\|y(s)\| = \|F(f)\| = |\int_0^1 K(s,t)f(t)dt| \leq \int_0^1 |K(s,t)||x(t)|dt \leq R \cdot \max_{(s,t)\in\langle 0,1\rangle^2} |K(s,t)|.$$

Funkce z množiny $F(L)$ jsou stejně spojité: Nechť $\varepsilon > 0$. Z kompaktnosti $\langle 0,1\rangle^2$ a spojitosti $K(s,t)$ plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $s', s'' \in \langle 0,1\rangle$, $|s' - s''| < \delta$ a pro všechna $t \in \langle 0,1\rangle$ platí $|K(s',t) - K(s'',t)| < \dfrac{\varepsilon}{R}$. Z toho dostáváme, že $|y(s') - t(s'')| \leq \int_0^1 |K(s',t) - K(s'',t)||f(t)|dt \leq \dfrac{\varepsilon}{R}\|f\| \leq \varepsilon$ a tedy funkce $y \in F(L)$ jsou stejně spojité. Podle Ascoliho-Arzelovy věty je $F(L)$ totálně omezená množina v $C\langle 0,1\rangle$. **QED.**

5. Základy teorie Hilbertova prostoru

Některé problémy vyžadují při formulaci a teoretickém studiu prostory nekonečné dimenze. Například při řešení problémů optimalizace pracujeme s prostory funkcí, které jsou vždy nekonečnědimenzionální. V této kapitole učiníme seznamovací lekci s (historicky) nejdůležitějšími nekonečnědimenzionálními prostory – s tzv prostory Hilbertovými. Pro větší záběr budeme pracovat s Hilbertovými prostory nad tělesem komplexnímich čísel (teorie reálného Hilbertova prostoru je podobná).

Nechť H je komplexní lineární prostor se skalárním součinem $(\, , \,)$. Je-li H současně *úplným metrickým* prostorem, ve kterém je metrika (a tedy i norma) zavedena na základě skalárního součinu, nazýváme H Hilbertovým prostorem (viz první kapitola).

Osvěžme si základní příklady nekonečnědimenzionálních Hilbertových prostorů. (Ty nejzákladnější jsou ovšem konečnědimenzionální Eukleidovské prostory, ale jejich teorie se rozvíjela samostatně a vlastně není chápána jako součást funkcionální analýzy).

Příklady:

1. Nechť ℓ^2(někdy také značeno $\ell^2(N)$) označuje množinu všech posloupností $x = \{x_i\}$ komplexních čísel, pro které $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$. Zavedeme-li v ℓ^2 sčítání a násobení (komplexním) číslem obvyklým způsobem, bude ℓ^2 komplexní lineární prostor. Skalární součin definujeme takto: Pro $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ položíme

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i.$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $n \in N$ a platí

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |x_i \bar{y}_i| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\bar{y}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ dostáváme v limitě} \\ \sum_{i=1}^{n} |x_i \bar{y}_i| &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\bar{y}_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \end{aligned}$$

Vidíme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$ absolutně konverguje a vlastnosti vyžadované v definici skalárního součinu plynou ze známých vět o konvergentních řadách. O tom, že ℓ^2 je úplný prostor se lze snadno přesvědčit (cauchyovská posloupnost musí být cauchyovská "po souřadnicích" a tudíž konvergentní po souřadnicích; stačí pak ověřit, že získaná posloupnost patří do ℓ^2, což je snadné).

2. Nechť L^2 označuje množinu všech (Lebesgueovsky) měřitelných komplexních funkcí $x(t)$, pro které $\int_0^1 |x(t)|^2\,dt < +\infty$. Při obvyklé definici součtu a násobení komplexním číslem je L^2 komplexní lineární prostor nekonečné dimenze. Při ztotožnění funkcí, které se rovnají "skoro všude" (t.j. při chápání $x = y$ pokud je množina všech $t \in \langle 0,1\rangle$, pro které $x(t) \neq y(t)$, míry nula) definujeme skalární součin takto:
$$(x,y) = \int_0^1 x(t)\bar{y}(t)\,dt.$$
Korektnost takto definovaného skalárního součinu je zajištěna klasickou nerovností
$$|(x,y)| \leq \int_0^1 |x(t)||y(t)|\,dt \ \leq \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$
Vlastnosti požadované v definici skalárního součinu plynou z vlastností integrálu. Úplnost prostoru L^2 patří k hlubším výsledkům integrálního počtu a nebideme ji zde dokazovat (viz např. Věta 199 v monografii [12] V. Jarníka či monografie [1] W. Rudina). Co zde úplnost zamená je však třeba si rozmyslet.

V dalším studiu Hilbertových prostorů se omezíme jen na "malé" prostory – na tzv. prostory *separabilní*. Řekneme, že H je separabilní, jestliže má spočetnou podmnožinu, která je v H hustá. V aplikacích se používají téměř výhradně jen prostory separabilní. (Naše příklady ℓ^2 a L^2 jsou ovšem separabilní – pro ℓ^2 stačí vzít spočetnou množinu těch posloupností, které mají vždy složky racionální a od nějakého indexu výše nulové; v L^2 tvoří spočetnou hustou podmnožinu množina všech polynomů s racionálními koeficienty).

Jedním z nejdůležitějších pojmů v teorii Hilbertova prostoru je pojem ortogonality. Prvky $x, y \in H$ nazýváme *ortogonální* (a píšeme $x \perp y$), jestliže $(x,y) = 0$. O prvku $x \in H$ říkáme, že je *ortogonální k množině* $M \subset H$ (píšeme $x \perp M$), jestliže pro každé $y \in M$ platí $(x,y) = 0$. Množiny $M_1, M_2 \subset H$ nazýváme *ortogonální množiny* (píšeme $M_1 \perp M_2$), jestliže pro každé $x \in M_1, y \in M_2$ platí $(x,y) = 0$.

Z definice skalárního součinu a relace ortogonality ihned plyne toto:
$$x \perp y_1, x \perp y_2 \Rightarrow x \perp \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,$$
$$x \perp y_k,\ y_k \to y \text{ (tj. } y_k \text{ konverguje k } y \text{ v } H) \Rightarrow x \perp y.$$
Odtud pak snadno plyne platnost implikace
$$x \perp M \Rightarrow x \perp \overline{\text{Span (M)}}.$$

Je zřejmé, že množina všech prvků ortogonálních k dané podmnožině M prostoru H tvoří uzavřený podprostor prostoru H. Uzavřený podprostor všech prvků ortogonálních k danému uzavřenému podprostoru Q prostoru H nazýváme *ortogonální doplněk podprostoru Q v H*. (Ortogonální doplněk je zvláštním případem "lineárního" doplňku.)

Daný uzavřený podprostor spolu s příslušným ortogonálním doplňkem tvoří rozklad prostoru. Tento rozklad nazýváme *ortogonálním rozkladem*. Opravňuje nás k tomu následující důležitá věta, zobecňující známý fakt z Euleidovského prostoru C^n (úplnost H hraje samozřejmě významnou roli).

Věta (věta o ortogonálním rozkladu či věta o projekci): Nechť Q je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Je-li M ortogonální doplněk podprostoru Q v H, je možné každý prvek $x \in H$ vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in Q$ a $z \in M$.

Důkaz: Dokažme nejprve jednoznačnost uvedeného vyjádření. Nechť

$$x = y + z, \quad x = y' + z',$$

kde $y, y' \in Q$ a $z, z' \in M$. Potom $y + z = y' + z'$ a tedy $y - y' = z - z'$. Jelikož je zřejmé, že $y - y' \in Q$ a $z - z' \in M$, dostáváme

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') = (y - y', z - z') = 0.$$

Odtud $y = y'$ a pak ovšem také $z = z'$.

Dokážeme nyní existenci uvedeného vyjádření prvku $x \in H$. Je-li $x \in Q$, stačí položit $y = x, z = 0$. Nechť $x \notin Q$. Označme

$$d = \inf_{y' \in Q} \|x - y'\|^2.$$

Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost prvků z Q, pro kterou platí

$$\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\|^2 = d.$$

Následující úvahy směřují k důkazu toho, že posloupnost y_n je v H Cauchyovská.

Nechť $h \neq 0$ je libovolný prvek z Q. Pak zřejmě prvek $y_n + \varepsilon h$ patří do Q pro každé $n \in N$ a pro každé komplexní číslo ε. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} d &\leq \|x - (y_n + \varepsilon h)\|^2 = (x - y_n - \varepsilon h, x - y_n - \varepsilon h) \\ &= (x - y_n, x - y_n) - \varepsilon (h, x - y_n) - \bar{\varepsilon}(x - y_n, h) + |\varepsilon|^2 (h, h). \end{aligned}$$

Položíme-li $\varepsilon = \frac{(x - y_n, h)}{(h,h)}$, dostaneme ihned

$$d \leq \|x - y_n\|^2 - \frac{|(x - \bar{y}_n, h)|^2}{\|h\|^2}.$$

Odtud plyne, že pro libovolné $h \in Q$ (pro $h = 0$ je vše triviální) platí

$$|(x - y_n, h)| \leq \|h\| \sqrt{\|x - y_n\|^2 - d}.$$

Nyní již snadno dokážeme, že posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská. Uvážíme nejprve vztahy

$$\begin{aligned} |(y_n - y_m, h)| &= |(y_n - x + x - y_m, h)| \leq |(y_n - x, h)| + |(x - y_m, h)| \\ &\leq \|h\| \left(\sqrt{\|x - y_n\|^2 - d} + \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d} \right). \end{aligned}$$

Položíme-li $h = y_n - y_m$, dostaneme

$$|y_n - y_m\| \leq \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d} + \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d} \to 0.$$

Prostor H je úplný a Q je uzavřený podprostor H, a tedy existuje $y \in Q$ tak, že $y_n \to y$. Limitním přechodem v nerovnosti $|(x - y_n, h)| \leq \|h\| \sqrt{\|x - y_n\|^2 - d}$ dostaneme, že pro každé $h \in Q$ platí $(x - y, h) = 0$. Odtud plyne, že $x - y \in M$. Položíme-li $z = x - y$, dostaneme žádaný výsledek:

$$x = y + z, \quad y \in Q, z \in M.$$

QED.

Poznámka: Je zže při vyjádření $x = y + z$ z předchozí věty prvek y "realizuje" onen prvek z Q, který je nejbližší k x:

$$\|x - y\|^2 = \|x - \lim_{n \to \infty} y_n\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\|^2 = d.$$

Poznámka: Pro úplné (prehilbertovské) prostory předchozí věta obecně neplatí. Vezměme v ℓ^2 podprostor $P = \mathit{Span}\left\{c_{00}(\mathbb{N}) \cup \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}\right\}$. Nechť S je podmnožina $c(\mathbb{N})$ skládající se ze všech prvků, jejichž všechny sudé souřadnice jsou nulové. Položme $M = \mathit{Span}\left\{S \cup \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}\right\}$. Pak M je uzavřený podprostor v P, na který vektor $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ nemůžeme projektovat.

Důsledek: Nechť M je podprostor prostoru H. K tomu, aby $\overline{M} = H$ (tj. aby uzávěr M v H se rovnal celému H), je nutné a stačí, aby neexistoval nenulový prvek z H ortogonální k M.

Důkaz: Nechť $\overline{M} = H$ a nechť $x \perp M$. Ukázali jsme, že platí $x \perp M \Rightarrow x \perp \overline{M} \Rightarrow x \perp H \Rightarrow x \perp x \Rightarrow x = 0$. Nechť naopak $\overline{M} \neq H$. Potom existuje $x \in H, x \notin \overline{M}$.

Podle předchozí věty $x = y + z$, kde $y \in \bar{M}$ a $z \perp \overline{M}$. Ovšem $z \neq 0$, neboť $x \notin \overline{M}$.
QED.

Posloupnost (ω_k) nenulových prvků Hilbertova prostoru H nazýváme *ortogonální systém*, jestliže prvky tohoto systému jsou navzájem ortogonální, tj. jestliže pro $k \neq p$ platí $(\omega_k, \omega_p) = 0$. Ortogonální systém nazýváme *ortonormální*, jestliže pro každé $k \in N$ je $\|\omega_k\| = 1$, tj. jestliže $(\omega_k, \omega_p) = \delta_{kp}$ (δ_{kp} značí populární Kroneckerovo delta).

Poznámka:
reálném prostoru $P^2_{2\pi}$ těch měřitelných funkcí $x(t)$ s periodou 2π, které vyhovují podmínce $\int_0^{2\pi} |x(t)|^2\, dt < +\infty$ může být příkladem ortogonálního systému tzv trigonometrický systém

$$(1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots)$$

Skalární součin je dán takto:

$$(x, y) = \int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Užitím vzorců

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta),\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta),\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

ihned ověříme, že platí

$$\int_0^{2\pi} \cos kt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin kt\, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \sin kt\, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos pt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin kt \sin pt\, dt = 0 \qquad \text{pro } k \neq p,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kt\, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 kt\, dt = \pi,$$

Tedy zmíněný trigonometrický systém je ortogonálním systémem v $P_{2\pi}$. Vidíme rovněž, že systém

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \ldots\right)$$

je ortonormálním systémem v $P^2_{2\pi}$.

Příklad: V prostoru $L^2_{2\pi}$ těch komplexních měřitelných funkcí s periodou 2π, které vyhovují podmínce $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty$, je příkladem ortonormálního systému funkcí systém

$$\left(e^{2\pi jnt}\right), \text{ kde } n \text{ je celé číslo a } j \text{ je imaginární jednotka.}$$

Nechť (ω_k) je ortogonální systém v Hilbertově prostoru H a nechť $x \in H$. Pokusme se najít nejlepší aproximaci prvku x lineárními kombinacemi prvních n členů ortogonálního systému (ω_k). Jinými slovy, snažme se výběrem koeficientů α_k minimalizovat výraz

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2.$$

Vzhledem k tomu, že pro $k \neq p$ máme $(\omega_k, \omega_p) = 0$, dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2 &= \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\right) \\
&= (x, x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\omega_k, x) - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k (x, \omega_k) + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 (\omega_k, \omega_k) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(x, \omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} + \sum_{k=1}^{n} \left| \alpha_k \|\omega_k\| - \frac{(x, \omega_k)}{\|\omega_k\|} \right|^2.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že výraz $\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2$ nabývá minimální hodnoty pro $\alpha_k = \dfrac{(x, \omega_k)}{\|\omega_k\|^2}$.

Takto volená čísla α_k nazýváme *Fourierovy koeficienty* prvku (vektoru) x vzhledem k ortogonálnímu systému (ω_k). Je-li systém (ω_k) ortonormální, mají Fourierovy koeficienty prvku x tvar

$$\alpha_k = (x, \omega_k).$$

V prostoru $P^2_{2\pi}$ či $L^2_{2\pi}$ jsou při výběru ortonormálního systému $(\cos nt, \sin nt)$ či $\left(e^{2\pi jnt}\right)$ tyto koeficienty ovšem rovny známým Fourierovým koeficientům, s kterými se každý setkal v základním kurzu matematiky.

Jsou-li α_k Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k ortogonálnímu systému (ω_k), dostáváme

$$0 \le \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2},$$

a tedy vidíme, že

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} \le \|x\|^2.$$

Jelikož poslední nerovnost platí pro každé přirozené $n \in N$, platí při přechodu k limitě také nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} \le \|x\|^2.$$

Tato nerovnost je známa pod názvem *Besselova nerovnost.*

Jsou-li α_k Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k ortogonálnímu systému (ω_k), pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ nazýváme *Fourierova řada prvku x vzhledem k ortogonálnímu systému (ω_k).*

Věta: Nechť (ω_k) je ortogonální systém v H. Pak Fourierova řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ prvku $x \in H$ konverguje v H, tj. existuje takový prvek $x' \in H$, že

$$x' = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k$$

v prostoru H.

Důkaz: Vzhledem k úplnosti Hilbertova prostoru H lze užít jako kriteria konvergence "Bolzano–Cauchyovy podmínky". Zkoumáme konvergenci posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k$. Pak pro $q \ge n$

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_q\|^2 &= \|\alpha_{n+1}\omega_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}\omega_{n+p}\|^2 \\
&= (\alpha_{n+1}\omega_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}\omega_{n+p}, \alpha_{n+1}\omega_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}\omega_{n+p}) \\
&= |\alpha_{n+1}|^2\|\omega_{n+1}\|^2 + \cdots + |\alpha_{n+p}|^2\|\omega_{n+p}\|^2 \\
&= \left(\frac{|(x,\omega_{n+1})|}{\|\omega_{n+1}\|^2}\right)^2 \|\omega_{n+1}\|^2 + \cdots + \left(\frac{|(x,\omega_{n+p})|}{\|\omega_{n+p}\|^2}\right)^2 \|\omega_{n+p}\|^2 \\
&= \frac{|(x,\omega_{n+1})|^2}{\|\omega_{n+1}\|^2} + \cdots + \frac{|(x,\omega_{n+p})|^2}{\|\omega_{n+p}\|^2}.
\end{aligned}$$

Poslední výraz je podle Besselovy nerovnosti úsekem konvergentní řady. Tudíž řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ konverguje. **QED.**

Studujme nyní otázku, kdy součet Fourierovy řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, \omega_k)}{\|\omega_k\|^2} \omega_k$$

je zpětně roven vektoru x. Dostáváme postupně

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(x, \omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(x, \omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že rovnost $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ nastane právě tehdy, nastává-li v Besselově nerovnosti rovnost, tj. je-li

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, \omega_k)^2}{\|\omega_k\|^2} = \|x\|^2.$$

Poslední vztah nazýváme *Parsevalova rovnost.*

Vidíme tedy, že konvergence Fourierovy řady prvku x v H zpětně k prvku x je vyjádřitelná v řeči konvergence *číselné* řady v $\mathbb{R}$. V tom je smysl Parsevalovy rovnosti.

Platí-li Parsevalova rovnost, dostáváme rovnost (v H)

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k.$$

Odtud zřejmě plyne, že $x \in \overline{\text{Span}}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$ ($\overline{S}$ značí uzávěr množiny S v H). Naopak, nechť $x \in \overline{\text{Span}}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$. Pak lze najít $x_n \in \text{Span}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tak, že $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ale $\text{Span}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$ je tvořen lineárními kombinacemi vektorů $\omega_1, \omega_2, \dots$ a tedy $x_n = \sum\limits_{k=1}^{p_n} \text{Span}\,_{\text{k}}^{(\text{n})} \omega_{\text{k}}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$. Uvědomíme-li si, že lineární kombinace s Fourierovými koeficienty dávají nejlepší aproximaci, snadno nahlédneme, že platí

$$\|x - \sum_{k=1}^{p_n} \frac{(x, \omega_k)}{\|\omega_k\|^2} \omega_k\|^2 \le \|x - x_n\|^2 \to 0.$$

Odtud plyne, že jistá vybraná posloupnost z posloupnosti částečných součtů Fourierovy řady vektoru x konverguje k x. Tudíž i celá Fourierova řada prvku x konverguje k x (musí být totiž Cauchyovská, neboť k něčemu konverguje, viz. předchozí věta).

Všimněme si ještě, že prvek $x^* = x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2}\omega_k$ je *ortogonální* ke všem prvkům příslušného ortogonálního systému (ω_k). Platí totiž

$$\begin{aligned}
(x^*,\omega_p) &= \left(x - \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2}\omega_k, \omega_p\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2}\omega_k, \omega_p\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[(x,\omega_p) - \frac{(x,\omega_p)}{\|\omega_p\|^2}\cdot(\omega_p,\omega_p)\right] = 0.
\end{aligned}$$

Existuje-li tedy prvek, který není součtem své Fourierovy řady, existuje také nenulový prvek ortogonální ke všem prvkům ortogonálního systému (ω_k). Obráceně, existuje-li nenulový prvek $x \in H$ ortogonální ke všem prvkům ortogonálního systému (ω_k), není x součtem své Fourierovy řady vzhledem k (ω_k), neboť všechny Fourierovy koeficienty jsou v tomto případě rovny nule, takže jde o součet řady nulových vektorů. Shrneme výsledky předcházejících úvah do následující věty.

Věta: Nechť $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ je ortogonální systém v Hilbertově prostoru H. Následující podmínky 1. – 4. jsou navzájem ekvivalentní:

1. Pro každé $x \in H$ platí $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} = \|x\|^2$,
2. Pro každé $x \in H$ platí $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2}\omega_k$,
3. $H = \mathrm{Span}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$,
4. Jestliže $(x, \omega_k) = 0$ pro každé $k = 1, 2, \dots$, pak $x = 0$.

Platí-li některá z uvedených podmínek, nazýváme ortogonální systém $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ *úplným.*

Následující ortogonalizační mechanismus je zobecněním známé techniky používané v Eukleidovských prostorech. Získaný výsledek je jedním z fundamentů teorie Hilbertova prostoru.

Věta (Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces): V každém separabilním Hilbertově prostoru H existuje úplný ortogonální systém.

Důkaz:

1. Separabilita prostoru H zaručuje existenci posloupnosti (x_n), která je hustá v H, tj. $\overline{\{x_n\}} = H$. Můžeme předpokládat, že (x_n) je nekonečná prostá posloupnost (dokazujeme tuto větu jen pro nekonečnědimenzionální H, v $\mathbb{R}^n$ či $\mathbb{C}^n$ je známa dobře).

   Pomocí této posloupnosti sestrojíme úplný ortogonální systém v H. Je-li $x_1 = 0$, položíme $n_1 = 2$ a $y_1 = x_1$. Pokud $x_1 \neq 0$, položíme $n_1 = 1$ a $y_1 = x_1$. Zřejmě je $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x_1, x_{n_1}}\} = \mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1}\}$. Postupujme dále indukcí. Nechť $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ a nechť $y_1, y_2, \ldots, y_k$ jsou takové lineárně nezávislé vektory, že $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}}\} = \mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, y_2, \ldots, y_k}\}$. Ježto konečněrozměrný prostor je vždy úplný a tedy uzavřený v H, nemůže být hustý v H a tedy všechny členy posloupnosti (x_n) nemohou patřit do $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, y_2, \ldots, y_k}\}$. Je tudíž možné najít index m, $m > n_k$ tak, že x_m není lineární kombinací prvků $x_1, \ldots, x_{n_k}$. Za index n_{k+1} zvolíme nejmenší index m s uvedenou vlastností a položíme $y_{k+1} = x_{n_{k+1}}$. Vektory $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}$ jsou potom lineárně nezávislé a platí $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x_1, \ldots, x_{n_{k+1}}}\} = \mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, \ldots, y_{k+1}}\}$. Zkonstruovali jsme tedy posloupnost (y_k) lineárně nezávislých vektorů tak, že pro každé $k \in N$ platí $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x_1, \ldots, x_{n_k}}\} = \mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, \ldots, y_k}\}$. Vzhledem k tomu, že

$$\begin{aligned} \mathrm{Span}\,\{\mathrm{x_1, x_2, \ldots}\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Span}\,\{\mathrm{x_1, \ldots, x_{n_k}}\}, \\ \mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, y_2, \ldots}\} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, \ldots, y_k}\}, \end{aligned}$$

   dostáváme

$$\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x_1, x_2, \ldots}\} = \mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, y_2, \ldots}\}$$

   a vzhledem k hustotě (x_n) v H platí $\overline{\mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, y_2, \ldots}\}} = H$.

2. Zbývá s použitím *lineárně nezávislé* posloupnosti (y_n) vytvořit ortogonální systém (z_n) tak, aby

$$\mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, y_2, \ldots}\} = \mathrm{Span}\,\{\mathrm{z_1, z_2, \ldots}\}.$$

   Položme $z_1 = y_1$. Pak $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1}\} = \mathrm{Span}\,\{\mathrm{z_1}\}$. Nechť dále $z_1, \ldots, z_n$ jsou takové nenulové ortogonální vektory, že $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{y_1, y_2, \ldots, y_n}\} = \mathrm{Span}\,\{\mathrm{z_1, z_2, \ldots, z_n}\}$. Vektor z_{n+1} určíme z následujících podmínek:

$$z_{n+1} = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n + y_{n+1}, \qquad (z_{n+1}, z_k) = 0\,(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Zřejmě

$$(z_{n+1}, z_k) = (\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n + y_{n+1}, z_k) = \alpha_k (z_k, z_k) + (y_{n+1}, z_k).$$

Odtud plyne, že uvedené podmínky jsou splněny pro

$$\alpha_k = \frac{(y_{n+1}, z_n)}{(z_k, z_k)}.$$

Ze známého Steinitzova lemma o záměně (připomeňme si lineární algebru z prvního semestru) plyne, že

$$\mathrm{Span}\,(\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2, \ldots, \mathrm{y}_{n+1}) = \mathrm{Span}\,(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \ldots, \mathrm{z}_{n+1}).$$

Odtud již stejným způsobem jako při konstrukci posloupnosti $\{y_k\}$ dostaneme

$$\overline{\mathrm{Span}\,\{\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \ldots\}} = H.$$

Chceme-li zavést úplný ortonormální systém $(u_1, u_2, \ldots)$, položíme

$$u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}.$$

QED.

Příklady: Definujme $L^2_V\langle a, b\rangle$ jako "prostor s váhou $V(t)$": Je-li $V(t)$ nezáporná měřitelná funkce na $\langle a, b\rangle$, je $L^2_V\langle a, b\rangle = \displaystyle\int_a^b V(t)\, f^2(t)\, dt < +\infty$ a skalární součin je definován tak, že $(f, g) = \displaystyle\int_a^b V(t)\, f(t)\, g(t)\, dt$. Dá se ukázat, že $L^2_V\langle a, b\rangle$ je úplný (tj. Hilbertův) prostor (rovnost funkcí opět chápeme "mopdulo množiny míry nula"). V reálném prostoru $L^2_V\langle a, b\rangle$ je systém funkcí

$$y_n(t) = t^n; \quad n = 0, 1, \ldots$$

lineárně nezávislý. Z tohoto systému lze ortogonalizací popsanou v druhé části důkazu předcházející věty získat ortogonální systém funkcí (polynomů)

$$z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} t^k, \quad \lambda_n^{(n)} \neq 0, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Je-li $a = -1, b = 1, V(t) = 1$, nazýváme $z_n(t)$ *Legendreovy polynomy*, je-li $a = -1, b = 1, V(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$, nazýváme $z_n(t)$ *Jacobiovy polynomy* a je-li v posledním případě $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, hovoříme o tzv. *Čebyševových polynomech.* Při $a = 0, b = +\infty, V(t) = e^{-t}$ dostaneme tzv. *Laguerrovy polynomy* a při $a = -\infty, b = +\infty, V(t) = e^{-t^2}$ tzv. *Hermiteovy polynomy.* (Pro bližší seznámení se s uvedenými systémy ortogonálních polynomů odkazujeme čtenáře ke knize V. Jarníka: [12, kap. XIV, par. 9 a 10], či W. Rudina [2].)

Následující věta říká, že separabilní prostory jsou z funkcionálně-analytického pohledu nerozlišitelné.

Věta: Separabilní komplexní (resp. reálný) Hilbertův prostor H je izometricky izomorfní s prostorem ℓ^2 (resp. s ℓ^2 nad reálnými čísly). Důsledek: Pokud H_1, H_2 jsou dva separabilní komplexní (resp. reálné) Hilbertovy prostory, pak lze najít zobrazení $\varphi\colon H_1 \to H_2$, které je lineární izomorfismus a navíc platí $\|u\|_{H_1} = \|\varphi(u)\|_{H_2}$. Speciální důsledek: ℓ^2 je metricky izomorfní s L^2.

Důkaz: Zvolme pevně nějaký úplný ortonormákní systém (W_k) v H (jeho existence je zajištěna předchozí větou). Ukážeme, že odpovídající izomorfní a izometrické zobrazení φ prostoru H na porstor ℓ^2 je dáno následujícím předpisem (koeficienty Fourierovy řady): Pro $x \in H$ položíme

$$\varphi(x) = ((x, \omega_k))_{k=1}^{\infty}\,.$$

Z Besselovy nerovnosti ihned plyne, že $\varphi(x) \in \ell^2$. Odtud je zřejmé, že φ je zobrazení H do ℓ^2. Přitom z vlastností řad dostáváme

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= ((x+y, \omega_k))_{k=1}^{\infty} = \\
&= ((x, \omega_k))_{k=1}^{\infty} + ((y, \omega_k))_{k=1}^{\infty} = \varphi(x) + \varphi(y), \\
\varphi(\lambda x) &= ((\lambda x, \omega_k))_{k=1}^{\infty} = \lambda\,((x, \omega_k))_{k=1}^{\infty} = \lambda\varphi(x).
\end{aligned}$$

Tedy $\varphi\colon H \to \ell^2$ je zobrazení lineární. Na základě Parsevalovy rovnosti dále dostaneme:

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, \omega_k)|^2.$$

Z definice $\varphi(x)$ tedy platí

$$\|\varphi(x)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, \omega_k)|^2.$$

Zbývá dokázat, že jde o zobrazení prostoru H na prostor ℓ^2. Nechť $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} y_k\omega_k$ konverguje, neboť je-li např. $m > n$, pak platí

$$\|\sum_{k=1}^{n} y_k\omega_k - \sum_{k=1}^{m} y_k\omega_k\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} y_k\omega_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |y_k|^2,$$

a tedy posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} y_n w_n$ je Cauchyovská posloupnost v H (neboť $\sum_{k=m}^{n} |y_k|$ musí být libovolně malá při velkém m, n v důsledku konvergence číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$).Tím je dokázána existence takového prvku $x \in H$, že platí

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \omega_k.$$

Pak ale dostáváme rovnosti

$$(x, \omega_p) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k \omega_k, \omega_p \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \omega_k, \omega_p \right) = y_p,$$

což znamená, že $\varphi(x) = y$. **QED.**

Budiž f lineární a spojitý funkcionál na H, tj. budiž $f\colon H \to C$ (resp. $f\colon H \to R$) lineární a spojitá forma. Definice linearity a spojitosti jsou stejné jako v reálném případě. Platí následující pozoruhodná věta, která zobecňuje reprezentační větu pro lineární formy v $\mathbb{C}^n$ (resp. v $\mathbb{R}^n$) a představuje již hlubší výsledek funkcionální analýzy.

Věta (Rieszova reprezentační věta): Každý lineární spojitý funkcionál $f\colon H \to \mathbb{C}$ definovaný na Hilbertově prostoru H lze vyjádřit ve tvaru skalárního součinu

$$f(x) = (x, u),$$

kde prvek $u \in H$ je určen funkcionálem f jednoznačně. Přitom

$$\|f\| = \|u\|.$$

Důkaz: Budiž f lineární spojitý funkcionál na H. Položme

$$Q = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Z linearity a spojitosti f plyne, že Q je uzavřený podprostor prostoru H. Zvolme $x' \in H - Q$. Podle jedné z předchozích vět existuje $y' \in Q$ a $z' \perp Q$ tak, že

$$x' = y' + z'.$$

Zřejmě $f(z') \neq 0$. Položme $z_1 = \dfrac{z'}{f(z')}$. Pak zřejmě $f(z_1) = 1$. Budiž x libovolný prvek z H. Označme $f(x) = \alpha$. Zřejmě

$$0 = f(x) - \alpha f(z_1) = f(x - \alpha z_1).$$

Je tedy $x - \alpha z_1 \in Q$ a označíme-li $y = x - \alpha z_1$, můžeme psát

$$x = y + \alpha z_1.$$

Odtud plyne, že ortogonální doplněk podprostoru Q je jednorozměrný podprostor generovaný prvkem z_1. Dále

$$\begin{aligned}(x, z_1) &= (y + \alpha z_1, z_1) = (y, z_1) + \alpha(z_1, z_1)\\ &= \alpha\|z_1\|^2 = f(x)\|z_1\|^2,\end{aligned}$$

a tedy

$$f(x) = \left(x, \frac{z_1}{\|z_1\|^2}\right).$$

Označíme-li $u = \dfrac{z_1}{\|z_1\|^2}$, dostaneme pro každé $x \in H$

$$f(x) = (x, u).$$

Dokažme jednoznačnost tohoto vyjádření. Nechť pro každé $x \in H$ je

$$f(x) = (x, u), \qquad f(x) = (x, v);$$

potom

$$0 = (x, u) - (x, v) = (x, u - v)$$

pro každé $x \in H$. Odtud $u - v = 0$, a tedy $u = v$.

Dokažme, že $\|f\| = \|u\|$. Nejprve je zřejmé, že

$$|f(x)| = |(x, u)| \leq \|x\|\|u\|,$$

a tedy

$$\|f\| \leq \|u\|.$$

Kromě toho

$$|f(u)| = |(u, u)| = \|u\|^2,$$

a tedy

$$\|f\| = \|u\|.$$

QED.

Poznámka: Snadno nahlédneme, že předpis

$$\varphi(x) = (x, u),$$

kde u je pevně vzatý prvek z H, definuje lineární spojitý funkcionál a že $\|\varphi\| = \|u\|$. Vidíme tedy, že prostor H^* je izometrický s prostorem H, kde H^* označuje prostor lineárních forem (funkcionálů) opatřený normou $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|\varphi(x)\|$. Avšak výše definované zobrazení $f \leftrightarrow u$ není striktně vzato izomorfním zobrazením prostoru H^* na H. Odpovídá-li totiž prvku $f \in H^*$ prvek $u \in H$, neodpovídá prvku λf prvek λu, ale prvek $\overline{\lambda} u$. Platí totiž

$$\lambda f(x) = f(\lambda x) = (\lambda x, u) = (x, \overline{\lambda} u).$$

Abychom mohli říci, že uvažované zobrazení je izomorfní, musíme v prostoru H^* pozměnit definici násobení číslem (komplexním). Zřejmě stačí položit

$$g = \lambda f \Leftrightarrow g(x) = \overline{\lambda} f(x).$$

Vzhledem k uvedenému izometrickému (anti)izomorfismu se někdy zjednodušeně píše $H = H^*$ (pro Hilbertovy prostory nad reálnými čísly ovšem máme "přímý" izometrický izomorfismus $H = H^*$).

5.0.1. Vlastní hodnoty lineárních zobrazení v Hilbertově prostoru

V tomto paragrafu naznačíme, jak lze zobecnit teorii samoadjungovaných (či symetrických) matic na nekonečnědimenzionální Hilbertův prostor. Přitom není bez zajímavosti, že některé důkazy se obecnějším případě spíše zjednoduší.

Uvažme nejprve, že Rieszova věta umožňuje následující kostrukci "adjungovaného" operátoru. Nechť $A\colon H \to H$ je lineární a omezený oprátor a $y \in H$. Uvažujme zobrazení $f\colon H \to \mathbb{C}$ (resp. R) takové, že $f(x) = (Ax, y)$. Toto je samozřejmě spojitá lineární forma na H a tudíž má podle Rieszovy věty reprezentaci pomocí skalárního součinu. Lze tedy najít $y^* \in H$ tak, že $(x, y^*) = (A(x), y)$. Takto lze postupovat pro každé $y \in H$ a tudíž dopstáváme zobrazení - označme ho A^* - zobrazující H do H. Toto zobrazení nazýváme adjungované k A.

Jinými slovy: Píšeme-li hodnoty (v bodech $x \in H$) lineární omezené formy (Ax, y) na H ve tvaru skalárních součinů, je zobrazení adjungované k zobrazení A určeno rovností

$$(x, A^*y) = (Ax, y) \qquad \text{pro všechna } x \in H. \tag{5.1}$$

(Jak snadno nahlédneme, určuje předchozí rovnost - při daném $y \in H$ - hodnotu A^*y jednoznačně; adjungované zobrazení je nyní lineárním omezeným zobrazením H do H.)

Snadno lze dokázat, že

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2)^* &= A_1^* + A_2^*,\\ (\lambda A)^* &= \overline{\lambda} A^*,\\ (A_1 * A_2)^* &= A_2^* * A_1^*.\end{aligned}$$

Velmi důležité jsou tzv. *samoadjungovaná lineární zobrazení* $A\colon H \to H$. Jsou to zobrazení splňující rovnost $A^* = A$, tj. rovnost

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

pro všechna $x, y \in H$. Těmi se teď budeme výhradně zabývat (obecnou konstrukci A^* jsme uvedli jednak jako užitečnou aplikaci Rieszovy věty, jednak pro její častý výskyt v příkladech aplikované matematiky).

Příklady:

1. Jak víme, každému lineárnímu zobrazení přísluší $A\colon C^n \to C^n$ (resp. $A\colon R^n \to R^n$) jistá matice (a_{ij}) $i, j = 1, 2, \ldots, n$ v tom smyslu, že rovnost $y = Ax$ (kde $x = \{x_k\}_{k=1}^n$, $y = \{y_k\}_{k=1}^n$) je ekvivalentní se systémem rovností

   $$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, n.$$

   Adjungovanému zobrazení přísluší v témže smyslu matice, transponovaná (včetně adjunkce prvků) k (a_{ij}). Pro reálné lineární zobrazení je podmínka $A = A^*$ je tedy ekvivalentní s podmínkou, že matice (a_{ij}) je symetrická.

2. Je-li integrální operátor dán jádren $K(s,t)$, je adjungovaný operátor dán jádrem $L(s,t) = \overline{K(t,s)}$. Podmínka $A = A^*$ je ekvivalentní s podmínkou $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$.

   Buď A samoadjungované zobrazení H do H. Společnou hodnotu výrazů (Ax, y) s (x, Ay) označme $A(x, y)$. Platí pak

   $$\begin{aligned}A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= \lambda_1 A(x_1, y) + \lambda_2 A(x_2, y),\\ A(x, y) &= \overline{A(y, x)}.\end{aligned}$$

   Takové zobrazení $A(x, y)$ na kartézském součinu $H \times H$ budeme nazývat *bilineární hermiteovská forma.* Tato forma je omezená v tom smyslu, že platí

   $$|A(x, y)| \le \|A\|\, \|x\|\, \|y\|.$$

Položíme-li $y = x$, dostaneme kvadratickou formu

$$A(x,x) = (Ax,x) = (x,Ax).$$

Vzhledem k tomu, že pro samoadjungovaná zobrazení A platí

$$\overline{(y,Ax)} = (Ax,y) = (x,Ay),$$

pro každé x dostáváme, že číslo $A(x,x) = (Ax,x) = \overline{(Ax,x)}$ je reálné. Vidíme tedy, že příslušná kvadratická forma nabývá jen reálných hodnot.

Označme

$$m = \inf_{\|x\|=1} A(x,x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} A(x,x), \quad L = \sup_{\|x\|=1} |A(x,x)|.$$

Zřejmě platí

$$L = \max(|m|,|M|).$$

Protože pro všechna x, pro něž je $\|x\| = 1$, platí

$$m \le A(x,x) \le M,$$

pro všechna $x \ne 0$ máme rovněž

$$m \le A\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) \le M.$$

Odtud plyne, že

$$m\|x\|^2 \le A(x,x) \le M\|x\|^2,$$

pro všechna $x \in H$ (pro $x = 0$ jsou tyto nerovnosti triviální). Snadno nahlédneme, že čísla m, M mají tu vlastnost, že m resp. M je největší resp. nejmenší konstanta, pro kterou platí první resp. druhá nerovnost v celém H. Dále plyne, že

$$|A(x,x)| \le L\|x\|^2,$$

pro všechna $x \in H$, přičemž číslo L je nejmenší konstantou, pro kterou tato rovnost platí v celém H.

Dokažme, že

$$L = \|A\|.$$

Protože

$$|A(x,x)| \le \|A\|\,\|x\|^2$$

platí pro všechna $x \in H$ a protože L je nejmenší konstantou, pro niž rovnost $|A(x,x)| \leq L\|x\|^2$ platí v celém H, je $L \leq \|A\|$. Důkaz obrácené nerovnosti je komplikovanější. Přímým výpočtem zjistíme, že pro každé $\lambda > 0$ máme

$$\begin{aligned} & A(\lambda x \pm \frac{1}{\lambda}Ax, \lambda x \pm \frac{1}{\lambda}Ax) \\ = \;& \lambda^2(Ax,x) \pm 2\|Ax\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}(A^2x, Ax) \end{aligned}$$

(neboť $(A^2x,x) = (Ax,Ax) = \|Ax\|^2$), a tedy

$$\begin{aligned} 4\|Ax\|^2 &= A(\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax, \lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax) - \\ &\quad -A(\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax, \lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax) \\ &\leq L\left[\|\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax\|^2 + \|\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax\|^2\right] \\ &= 2L\left[\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2\right]. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejdříve, že $\|Ax\| \neq 0$ (a tedy také $\|x\| \neq 0$). Výraz $\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2$ má derivaci podle λ rovnou

$$\frac{2}{\lambda^3}\|x\|^2\left(\lambda^4 - \frac{\|Ax\|^2}{x^2}\right).$$

Tento výraz je záporný, pokud $\lambda \in \left(0, \sqrt{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}\right)$, je kladný, pokud $\lambda > \sqrt{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$. Funkce $\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2$ proměnné λ má tedy v intervalu $(0, +\infty)$ absolutní minimum, kterého nabývá v bodě $\lambda = \sqrt{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$. Dosadíme-li toto λ do nerovnosti

$$4\|Ax\|^2 \leq 2L\left[\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2\right],$$

dostaneme ihned nerovnost

$$4\|Ax\|^2 \leq 4L\|Ax\|\,\|x\|,$$

a tedy máme $\|Ax\| \leq L\|x\|$. Tato nerovnost platí ovšem i v případě, že $\|Ax\| = 0$, a plyne z ní, že $\|A\| \leq L$, což jsme měli dokázat.

Číslo λ nazýváme *vlastní hodnotou* lineárního zobrazení A, existuje-li nenulové x tak, že
$$Ax = \lambda x, \tag{5.2}$$
tj. má-li rovnice
$$(A - \lambda I)x = 0$$
netriviální řešení. Je-li λ vlastní hodnotou zobrazení A, nazýváme každé řešení předchozích dvou rovnic *vlastním vektorem*, příslušným k vlastní hodnotě λ. Množina všech vlastních vektorů, příslušných k dané vlastní hodnotě λ, je lineární prostor kladné (eventuelně i nekonečné) dimenze.

Číslo 0 je vlastní hodnotou lineárního zobrazení A právě tehdy, když rovnice $Ax = 0$ má netriviální řešení, tj. když A není prosté zobrazení.

Je-li x vlastním vektorem příslušným k vlastní hodnotě λ, je také αx vlastním vektorem příslušným k λ. Z toho plyne, že každé vlastní hodnotě λ příslušejí také jisté vlastní vektory mající normu 1. Buď x takový vektor. Protože platí
$$A(x,x) = (Ax,x) = (\lambda x, x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda$$
a protože kvadratická forma $A(x,x)$ nabývá jen reálných hodnot, je λ reálné. Kromě toho zřejmě máme i rovnost $m \leq \lambda \leq L$.

Dostáváme tedy tvrzení: Vlastní hodnoty samoadjungovaného zobrazení jsou reálné a leží v intervalu $< m, L >$. Dále platí: Je-li $x_j (j = 1,2)$ vlastní vektor příslušný k vlastní hodnotě λ_j samoadjungovaného zobrazení A, pak platí
$$\lambda_1(x_1,x_2) = (Ax_1,x_2) = (x_1,Ax_2) = \lambda_2(x_1,x_2).$$
Je-li tedy $\lambda_1 \neq \lambda_2$, je nutně $(x_1,x_2) = 0$. Tím jsme dokázali, že vlastní vektory, příslušné různým vlastním hodnotám samoadjungovaného zobrazení A, jsou navzájem ortogonální.

Obraťme se k metodám, kterými lze najít vlastní hodnoty daného zobrazení A. Platí tato důležitá věta.

Věta: Nechť A je samodajungované zobrazení H do H. Je-li $x_0 \in H$ vektor, pro který platí
$$\|x_0\| = 1, \qquad |(Ax_0,x_0)| = L$$
(tj. x_0 je bod, v němž funkce $|(A(x,x)|$ nabývá na jednotkové svéře svého maxima), je $\lambda_0 = (Ax_0,x_0)$ vlastní hodnotou zobrazení A. Vektor x_0 je vlastním vektorem příslušným k této vlastní hodnotě λ_0 a kromě toho $\|Ax_0\| = \|A\|$ (tj. i reálná funkce $\|Ax\|$ nabývá na jednotkové sféře svého maxima v bodě x_0).

Důkaz: Mějme splněny shora vyslovené předpoklady. Protože
$$|A(x_0,x_0)| \leq \|Ax_0\|\,\|x_0\| = \|Ax_0\| \leq \|A\|,$$

dostáváme

$$\|Ax_0\| = \|A\|.$$

Jelikož

$$\begin{aligned}\|Ax_0 - \lambda_0 x_0\|^2 &= \|Ax_0\|^2 - 2\lambda_0(Ax_0, x_0) + \lambda_0^2 \\ &= \|Ax_0\|^2 - \lambda_0^2 = 0,\end{aligned}$$

vidíme, že λ_0 je vlastní hodnotou a vektor x_0 je k ní příslušným vlastním vektorem.
QED.

Absolutní hodnota kvadratické formy $A(x, x)$ nemusí ovšem obecně na jednotkové sféře nikde nabývat svého maxima. Platí však následující důležité tvrzení, které budeme nejprve obecně formulovat pro zobrazení totálně omezená. Připomeňme, že zobrazení se nazývá *totálně omezené*, jestliže zobrazuje omezenou množinu na totálně omezenou. Pro zobrazení do konečnědimenzionálních prostorů ovšem totálně omezené zobracení znamená přesně to, co zobrazení spojité.

Uveďme jednu velmi důležitou aplikaci Ascoliho–Arzelovy věty. Připomeňme, že zobrazení $f\colon M \to K$ mezi dvěma metrickými prostory se nazývá *totálně omezené*, jestliže pro každou (metricky) omezenou množinu $L \subset M$ je $f(L)$ totálně omezená. Je zřejmé, že každé lineární zobrazení $f\colon R^n \to R^m$ je totálně omezené (pro $R^m, m \in N$, ovšem omezené a totálně omezené množiny splývají), ale hlavní aplikace nalézáme pro některé operátory v nekonečně dimenzionálních prostorech. Zde je situace složitější, např. identické zobrazení z nekonečnědimenzionálního prostoru do sebe není *nikdy* totálně omezené (neboť jednotková koule tam nikdy není totálně omezená).

Věta: Nechť $C\langle 0,1\rangle$ je (Banachův) prostor spojitých funkcí na $\langle 0,1\rangle$ opatřený sup normou. Nechť $F\colon C\langle 0,1\rangle \to C\langle 0,1\rangle$ je zobrazení definované takto:

$$F(f)(s) = y(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt,$$

kde $K(s,t)$ je funkce spojitá v $\langle 0,1\rangle$. Pak F je totálně omezené zobrazení.

Důkaz: Nechť $L \subset C\langle 0,1\rangle$ je omezená množina v $C\langle 0,1\rangle$, tj. nechť existuje konstanta $R > 0$ taková, že pro každé $f \in L$ platí $\|f\| \leq R$. Podle Ascoliho-Arzelovy věty máme ověřit, že množina $F(L)$ je stejně omezená a stejně spojitá. Funkce z množiny $F(L)$ jsou stejně omezené:

$$\|y(s)\| = \|F(f)\| = |\int_0^1 K(s,t)f(t)dt| \leq \int_0^1 |K(s,t)||x(t)|dt \leq R \cdot \max_{(s,t)\in\langle 0,1\rangle^2} |K(s,t)|.$$

Funkce z množiny $F(L)$ jsou stejně spojité: Nechť $\varepsilon > 0$. Z kompaktnosti $\langle 0,1\rangle^2$ a spojitosti $K(s,t)$ plyne, že $K(s,t)$ je stejnoměrně spojitá a odsud, že existuje $\delta >$

0 tak, že pro všechna $s', s'' \in \langle 0,1\rangle$, $|s'-s''|<\delta$ a pro všechna $t\in\langle 0,1\rangle$ platí $|K(s',t)-K(s'',t)|<\dfrac{\varepsilon}{R}$. Z toho dále dostáváme, že $|y(s')-t(s'')|\le\int_0^1|K(s',t)-K(s'',t)||f(t)|dt\le\dfrac{\varepsilon}{R}\|f\|\le\varepsilon$ a tedy funkce $y\in F(L)$ jsou stejně spojité. Podle Ascoliho-Arzelovy věty je $F(L)$ totálně omezená množina v $C\langle 0,1\rangle$. **QED.**

Následující tvrzení přináší velmi důležitý příklad (z hlediska aplikací) zobrazení v Hilbertově prostoru $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$, které je totálně omezené.
Tvrzení: Nechť $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ značí Hilbertův prostor (Lebesgueovsky) něřitelných funkcí na $\langle 0,1\rangle$, které jsou integrovatelné v kvadrátu. Nechť $K(s,t)\colon\langle 0,1\rangle^2\to R$ je funkce taková, že

$$\int\int_{\langle 0,1\rangle^2}K^2(s,t)dsdt<+\infty.$$

Definujme zobrazení $A\colon\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle\to\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ předpisem

$$(A(f))(s)=y(s)=\int_0^1K(s,t)f(t)dt.$$

Pak A je lineární totálně omezené zobrazení.

Důkaz: Využijeme známé tvrzení z integrálního počtu (někdy nazývané Luzinova věta, nebudeme zde dokazovat), která říká, že množina spojitých funkcí na $\langle 0,1\rangle^2$ je hustá v $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$. Jinými slovy, dá se najít posloupnost spojitých funkcí $K_n(s,t)\colon\langle 0,1\rangle^2\to R$ takových, že $\displaystyle\int\int_{\langle 0,1\rangle^2}|K(s,t)-K_n(s,t)|^2dsdt\to 0$ při $n\to+\infty$. Definujme zobrazení $A_n\colon\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle\to\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ předpisem

$$(A_n(f))(s)=\int_0^1K_n(s,t)f(t)dt.$$

Je zřejmé že $A_n\to A$ v operátorové normě $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$; skutečně, $\|A_n-A\|\to 0$. Nyní dokážeme dvě tvrzení: 1. Každé naše zobrazení A_n je totálně omezené. 2. Z toho, že $A_n\to A$ a z toho, že každé A_n je totálně omezené plyne, že i A je totálně omezené.

1. Předpokládejme, že funkce $P(s,t)$ je spojitá na $\langle 0,1\rangle^2$ (a tedy $P(s,t)$ je stejnoměrně spojitá a omezená ma $\langle 0,1\rangle^2$) a platí $\displaystyle\int\int_{\langle 0,1\rangle^2}P(s,t)dsdt<+\infty$. Máme ukázat, že zobrazení $(B(f))(s)=\int_0^1P(s,t)f(t)dt$ (je chápáno jako zobrazení z $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ do $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$) totálně omezené. Zde je důležité si uvědomit, že stačí ukázat, že B je totálně omezené jako zobrazení z $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ do $C\langle 0,1\rangle$. Poslední fakt ihned plyne z jednoduchého pozorování, že každá totálně omezená množina v $C\langle 0,1\rangle$ je totálně omezená v $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ (důkaz: každá cauchyovská posloupnost v $C\langle 0,1\rangle$ je samozřejmě cauchyovská v $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$).

Dokazujme tedy, že B chápané jako zobrazení z $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ do $C\langle 0,1\rangle$ je totálně omezené. Nechť $M \subset \mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ je nějaká omezená množina. Pak tedy platí, že lze nalézt konstantu K takovou, že $\int_0^1 [x(t)]^2 dt \leq K$ pro každé $x(t) \in M$. Podle Ascoliho-Arzelovy věty se teď ptáme, zdali množina funkcí $K(M) = \{y(s) \mid y(s) = \int_0^1 P(s,t)x(t)dt$ pro nějaké $x(t) \in M\}$ je stejně omezená a stejně spojitá.

a) Stejná omezenost:

$$\begin{aligned} |y(s)| &= |\int_0^1 P(s,t)x(t)dt| \leq \int_0^1 |K(s,t)||x(t)|dt \\ &\leq \left(\int_0^1 (K(s,t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (x(T))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq K \cdot \max_{s,t\in\langle 0,1\rangle^2} |P(s,t)|; \end{aligned}$$

je samozřejmé, že posledně napsané max existuje, ježto $|P(s,t)|$ je funkce spojitá na kompaktu.

b) Stejná spojitost: Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak ze stejnoměrné spojitosti vidíme, že existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $s', s'' \in \langle 0,1\rangle$ s vlastností $|s' - s''| < \delta$ platí $|P(s',t) - P(s'',t)| < \dfrac{\varepsilon}{K}$. Z toho dostáváme, že pro každé $x(t) \in M$ platí

$$\begin{aligned} |y(s') - y(s'')| &= |\int_0^1 P(s',t)x(t)dt = \int_0^1 P(s'',t)x(t)dt| \\ &\leq \int_0^1 |P(s',t) - P(s'',t)||x(t)|dt \\ &\leq \left(\int_0^1 \left(K(s',t) - K(s'',t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 (x(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Tím jsme ověřili, že $B(M)$ je totálně omezená v $C\langle 0,1\rangle$ (a tedy i v $\mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$). Dokázali jsme tedy, že $B\colon \mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle \to \mathscr{L}^2\langle 0,1\rangle$ je totálně omezená.

2. Máme ukázat, že pokud každé A_n je totálně omezená a pokud $A_n \to A$ v operátorové normě (a poslední dvě vlastnosti posloupnosti A_n jsme již ověřili), pak i A je totálně omezená. Toto tvrzení platí ve skutečnosti pro *každou* takovou posloupnost zobrazení $A_n\colon P_1 \to P_2$ mezi dvěma normovanými lineárními prostory. Není to těžké dokázat. Přitom se naučíme typickou "diagonální metodu". Stačí dokázat, že každá omezená posloupnost z P_1 se zobrazením A zobrazí na posloupnost, z níž lze vybrat cauchyovskou v P_2 (to je zřejmě ekvivalentní s tím, že A je totálně omezené).

Nechť (x_n) je posloupnost omezená v P_1.

Pak posloupnost $(A_1(x_n))$ je totálně omezená množina a tudíž z ní lze vybrat posloupnost cauchyovskou v P_2, řekněme posloupnost $(A_1(x_n^1))$. Posloupnost (x_n^1) je omezená a tudíž lze z posloupnosti $(A_2 x_n^{(1)})$ vybrat posloupnost cauchyovskou v P_2, řekněme posloupnost $(A_2(x_n^2))$. Takto můžeme postupovat dále a získat posloupnost posloupností. Nyní vytvoříme diagonální posloupnost x_k^k. Vidíme, že pro každé $n \in N$ je posloupnost $(A_n x_k^k)$ (indexovaná podle $k \in N$) cauchyovská. Stačí teď ukázat, že i posloupnost (Ax_k^k) je cauchyovská. Platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} \|Ax_k^k - Ax_p^p\| &\leq \|Ax_k^k - A_n x_k^k\| + \|A_n x_k^k - A_n x_p^p\| + \|A_n x_p^p - Ax_p^p\| \\ &\leq \|A - A_n\|(\|x_k^k\| + \|x_p^p\|) + \|A_n x_k^k - A_n x_p^p\|. \end{aligned}$$

Jelikož (x_n) je omezená v P_1, existuje konstanta K taková, že $\|x_k\| \leq K$ v P_1. Jelikož $A_n \to A$, dostáváme, že pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ platí $\|A - A_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2k}$. Navíc lze najít i $k_0 \in N$ tak, že pokud $k > k_0$, $p > k_0$, pak máme $\|Ax_k^k - A_n x_p^p\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Tedy při $n > n_0$, $k > k_0, p > k_0$ dostáváme

$$\|Ax_n^n - Ax_p^p\| < \frac{\varepsilon}{2K}(K + K) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Posloupnost (Ax_k^k) je tedy cauchyovská a tedy A je totálně omezená. **QED.**

Všimeme si, že totálně omezený prostor nemůže být "příliš velký". Vyjádřeno formálně, každý totálně omezený metrický prostor M je separabilní, tj. lze najít spočetnou podmnožinu S v M takovou, že uzávěr $\bar{S}$ v M je roven celému M ($\overline{S} = M$; říkáme, že *S je hustá* v M). Požadovaná množina S se sestrojí snadno: Pro každé $n \in N$ buď S_n maximální $\frac{1}{n}$-diskrétní podmnožina v M. Jelikož M je totálně omezená, musí být každé S_n konečné. Nyní stačí položit $S = \cup_{n \in N} S_n$. Je zřejmé, že S je hustá v M.

Nyní podáme ono důležité tvrzení o "nabývání" maxima kvadratických forem definovaných totálně omezenými zobrazeními.

Věta: Je-li A samoadjungované totálně omezené zobrazení H do H, existuje vektor x_0 tak, že $\|x_0\| = 1$ a $|(Ax_0, x_0)| = L$.

Důkaz: Zvolme body x_n tak, že platí

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{a} \quad |(Ax_n, x_n)| \to L.$$

Vzhledem k tomu, že lze přejít ke vhodně vybrané posloupnosti. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že existuje

$$\lim_{n \to \infty} (Ax_n, x_n) = \lambda_0.$$

Protože posloupnost $\{x_n\}$ je omezená a protože zobrazení A je totálně omezené, lze vybrat posloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že $\{Ax_{n_k}\}$ konverguje v H. Lze tedy předpokládat, že

existuje
$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y_0.$$
Je-li $\lambda_0 = 0$, platí $\|A\| = L = |\lambda_0| = 0$. Potom A je nulové zobrazení a za x_0 lze vzít jakýkoliv jednotkový vektor. Nechť tedy $\lambda_0 \neq 0$. Protože
$$\|Ax_n\|^2 \leq \|A\|^2 = L^2 = \lambda_0^2$$
pro každé $n \in N$, platí také
$$\|y_0\|^2 \leq \lambda_0^2.$$
Protože však rovněž platí
$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \|Ax_n - \lambda_0 x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 \\ & - 2\lambda_0(Ax_n, x_n) + \lambda_0^2 \to \|y_0\|^2 - \lambda_0^2, \end{aligned}$$
vidíme, že $\|y\|^2 = \lambda_0^2$ a tedy $\|Ax_n - \lambda_0 x_n\| \to 0$. Z toho plyne, že posloupnost $\{\lambda_0 x_n\}$ má stejnou limitu jako posloupnost $\{Ax_n\}$, tedy limitu rovnou y_0. Protože $\lambda_0 \neq 0$, existuje i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ a je rovna x_0. Zřejmě $\|x_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$ a tedy
$$|(Ax_0, x_0)| = \lim_{n\to\infty} |(Ax_n, x_n)| = |\lambda_0| = L.$$

QED.

Předcházející dvě věty nám dávají možnost najít vlastní hodnotu λ_0 samoadjungovaného totálně omezeného zobrazení A pokud umíme rozřešit problém nalezení maxima absolutní hodnoty kvadratické formy (Ax, x) na jednotkové sféře v H. Ukážeme, že tímto způsobem (tzv. "metodou extrémů" kvadratické formy) lze najít všechny vlastní hodnoty zobrazení A.

Buď A opět samoadjungované totálně omezené zobrazení H do H. Najděme podle předcházející věty vektor x_0, pro který je $\|x_0\| = 1, |(Ax_0, x_0)| = L$. Jak již víme, je pak číslo $\lambda_0 = (Ax_0, x_0)$ vlastní hodnotou zobrazení A a x_0 příslušným vlastním vektorem.

Označme
$$H_1 = \{x \in H \colon (x, x_0) = 0\}.$$
Pak H_1 je uzavřený podprostor prostoru H, který obecně má nekonečnou dimenzi. Prostor H_1 je uzavřený v H a je tedy opět Hilbertovým prostorem. Protože pro $x \in H_1$ platí
$$(Ax, x_0) = (x, Ax_0) = (x, \lambda_0 x_0) = \lambda_0(x, x_0) = 0$$
dostáváme $A(H_1) \subset H_1$. Zobrazení A/H_1 (tj. A zúžené na H_1) je tedy samoadjungovaným totálně omezeným zobrazením H_1 do H_1. Podle předcházející věty existuje tedy vektor $x_1 \in H_1$ tak, že
$$\|x_1\| = 1, \quad |(Ax_1, x_1)| = \sup_{\|x\|=1, x\in H_1} |(Ax, x)|.$$

Číslo $\lambda_1 = (Ax_1, x_1)$ je vlastní hodnotou zobrazení A, vektor x_1 je vlastním vektorem příslušným k λ_1. Protože

$$\sup_{\|x\|=1, x\in H_1} |(Ax,x)| \leq \sup_{\|x\|=1, x\in H} |(Ax,x)|,$$

dostáváme navíc $|\lambda_0| \geq |\lambda_1|$.

Označíme-li

$$H_2 = \{x \in H_1 : (x, x_1) = 0\},$$

dokážeme opět, že $A(H_2) \subset H_2$; lze tedy v konstrukci induktivně pokračovat dále.

Je zřejmé, že popsaným způsobem sestrojíme

1. nekonečnou posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ vlastních hodnot zobrazení A, přičemž bude platit
$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \ldots ;$$
2. jednotkové vektory x_n $(n \geq 0)$, které jsou vlastními vektory příslušnými k vlastním hodnotám λ_n;
3. uzavřené podprostory H_n $(n \geq 0)$, pro něž platí $A(H_n) \subset H_n$ a také platí
$$H = H_0 \not\supseteq H_1 \not\supseteq \ldots H_n \not\supseteq \ldots,$$
přičemž H_{n+1} je ortogonální k vektorům $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Při shora uvedené konstrukci říkáme, že $\{\lambda_n\}$ je *posloupnost vlastních hodnot zobrazení A, sestrojená metodou extrémů kvadratické formy $A(x,x)$.*

Dokažme především, že $\lambda_n \to 0$. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by kladná konstanta c tak, že $|\lambda_n| \geq c$ pro nekonečně mnoho n. Posloupnost $\left\{\dfrac{x_n}{\lambda_n}\right\}$ by pak byla omezená, takže vzhledem k totální omezenosti zobrazení A by existovala vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že posloupnost $\left\{\dfrac{Ax_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right\} = \{x_{n_k}\}$ by konvergovala. To však není možné, neboť $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ pro všechna $i \neq j$. Tím je podmínka $\lambda_n \to 0$ dokázána.

Buď $x \in H$ libovolný vektor. Pak vektor

$$\xi_n = x - \sum_{k=0}^{n} (x, x_k) x_k$$

patří do H_{n+1}, neboť je ortogonální k vektorům $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \|A\xi_n\| &\leq \Big(\sum_{\|y\|=1, y\in H_{n+1}} \|Ay\|\Big) \|\xi_n\| \\ &= \Big(\sum_{\|y\|=1, y\in H_{n+1}} |(Ay,y)|\Big) \|\xi_n\| = |\lambda_{n+1}|\, \|\xi_n\|. \end{aligned}$$

Protože také platí

$$\|\xi_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |(x, x_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

pro všechna $n \in N$, vidíme, že $\|\xi_n\|$ je omezená posloupnost, takže (vzhledem k podmínce $\lambda_n \to 0$ a vzhledem k nerovnosti $\|A\xi_n\| \leq |\lambda_{n+1}|\|\xi_m\|$) dostáváme

$$A\xi_n \to 0.$$

To tedy znamená, že $Ax = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (x, x_k)Ax_k = \sum_{k=0}^{\infty} (x, x_k)Ax_k$. Protože

$$\begin{aligned} (x, x_k)Ax_k &= (x, x_k)\lambda_k x_k = (x, \lambda_k x_k)x_k \\ &= (x, Ax_k)x_k = (Ax, x_k)x_k, \end{aligned}$$

dostáváme pro každé $x \in H$ rovnosti

$$Ax = \sum_{k=0}^{\infty} (Ax, x_k)x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (x, x_k)x_k,$$

Jinými slovy, hodnoty Ax zobrazení A lze pomocí sestrojené posloupnosti (x_n) vlastních vektorů zobrazení A rozvádět v jistou řadu. Obor hodnot zobrazení A (tj. množina $A(H)$) je částí uzávěru lineárního obalu množiny, obsahující všechny vektory x_n.

Dimenzi lineárního prostoru všech řešení rovnice $(A - \lambda I)x = 0$, kde λ je vlastní hodnota zobrazení A, nazveme *násobností této vlastní hodnoty.* Dá se snadno ukázat, že *každá* nenulová vlastního hodnota λ má konečnou násobnost, neboť rovnice $(A - \lambda I)x = 0$ je pak ekvivalentní s rovnicí $(I - \frac{1}{\lambda}A)x = 0$ a spolu s A je i zobrazení $\frac{1}{\lambda}A$ totálně omezené. Využil by se fakt, že jednotková koule v nekonečnědimenzionálním prostoru není nikdy totálně omezená. Číslo 0 může ovšem mít nekonečnou násobnost – to se stane např. tehdy, když A je nulové zobrazení.

Dokažme závěrem, že v posloupnosti (λ_k), sestrojené metodou extrémů kvadratické formy $A(x, x)$ se vyskytuje každá nenulová vlastní hodnota λ zobrazení A a to právě tolikrát, kolik činí její násobnost.

Kdyby se některá vlastní hodnota $\lambda \neq 0$ v posloupnosti $\{\lambda_k\}$ nevyskytovala, existoval by jednotkový vektor $\tilde{x}$ příslušný k této vlastní hodnotě a tento vektor by byl ortogonální ke všem x_n.

Žádná vlastní hodnota $\lambda \neq 0$ se nemůže v posloupnosti (λ_k) vyskytnout vícekrát, než činí její násobnost p, neboť jinak by se v posloupnosti $\{x_k\}$ vyskytovalo více než p navzájem ortogonálních jednotkových vektorů x_k příslušných k λ, což je ve sporu s definicí násobnosti vlastní hodnoty. Kdyby se tedy některá vlastní hodnota $\lambda \neq 0$ nevyskytovala v posloupnosti $\{\lambda_n\}$ tolikrát, kolik činí její násobnost p, vyskytovala by se tam méně než p-krát. V prostoru všech řešení rovnice $(A-\lambda I)x = 0$ by pak bylo možno najít vektor $\tilde{x}$ ortogonální ke všem vektorům x_k, pro něž $\lambda_k = \lambda$. Tento vektor by pak byl ortogonální i ke všem vektorům x_k, příslušným k vlastním hodnotám $\lambda_k \neq \lambda$, a tedy ortogonální ke všem vektorům x_n, $n \geq 0$.

Vidíme tedy, že pokud by vyslovené tvrzení nebylo správné, existoval by jednotkový vektor $\tilde{x}$, který by byl vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě λ a který by byl ortogonální ke všem x_n, $n \geq 0$.

Potom by však vzhledem k rovnosti $Ax = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x, x_k)\, x_k$ platilo

$$0 \neq \lambda\tilde{x} = A\tilde{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k(x, x_k)x_k = 0,$$

což je spor. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Modifikujme nyní metodu extrémů takto: Postupujme jako dříve, ale postup zastavme u indexu n, pokud by mělo vyjít $\lambda_{n+1} = 0$ (tj. pokud by se zobrazení A na H_{n+1} identicky anulovalo). Tím sestrojíme konečnou nebo nekonečnou posloupnost (λ_k) tak, že každá vlastní hodnota $\lambda \neq 0$ zobrazení A se vyskytuje v posloupnosti (λ_k) právě tolikrát, kolik činí její násobnost a že pro každé $x \in H$ platí

$$Ax = \sum_k (Ax, x_k)x_k = \sum_k (x, x_k)\lambda_k x_k.$$

poslední vztah plyne ihned z toho, že člen $(Ax, x_k)x_k = (x, x_k)\lambda_k x_k$ nemusíme psát, pokud $\lambda_k = 0$.

Symbol $\sum_k$ nechť v dalším textu znamená sčítání přes všechna ta k, pro něž je $\lambda_k \neq 0$. Pokud $Ax = 0$, pak zřejmě dostáváme

$$0 = (Ax, x_k) = \left(\sum_k (x, x_k)\lambda_k x_k, x_k\right) = (x, x_k)\lambda_k \|x_k\|^2,$$

a tedy $(x, x_k) = 0$. Vidíme, že je-li $Ax = 0$, je x ortogonální ke všem vlastním vektorům, příslušným nenulovým vlastním hodnotám λ_k.

Jak lze snadno nahlédnout, pro každé $x \in H$ platí

$$x = x' + \sum_k (x, x_k)x_k\,,$$

kde x' je ortogonální ke všem x_k (příslušným k vlastním hodnotám $\lambda_k \neq 0$). Odtud plyne, že

$$Ax - Ax' + \sum_k (x, x_k)Ax_k = Ax' + \sum_k (Ax, x_k)x_k. \tag{5.3}$$

Jelikož $Ax = \sum_k (Ax_k, x_k)x_k$, je $Ax' = 0$.

Je-li A prosté zobrazení, plyne z podmínky $Ax' = 0$ podmínka $x' = 0$. Odtud vyplývá vztah

$$x = \sum_k (x, x_k) x_k \quad \text{pro všechna } x \in H.$$

Systém (x_k) jednotkových vlastních vektorů, sestrojených metodou extrémů kvadratické formy $A(x,x)$ a odpovídajících vlastním hodnotám λ_k je tedy v tomto případě úplný (speciálně je v tomto případě nekonečný).

Naopak, je-li systém $\{x_k\}$ úplný, dostáváme pro každé $x \in H$ rovnost

$$x = \sum_k (x, x_k) x_k \,,$$

takže z rovnosti

$$0 = Ax = \sum_k (x, x_k) A x_k = \sum_k (x, x_k) \lambda_k x_k$$

plyne (skalárním násobením s x_k) rovnost $(x, x_k)\lambda_k = 0$ pro všechna k, pro která $\lambda_k \neq 0$. Tedy $(x, x_k) = 0$ pro všechna taková k. Vzhledem k úplnosti systému (x_k) je i $x = 0$. Zobrazení A je tedy prosté.

Tím jsme dokázali, že platí následující tvrzení:

Věta: Systém vlastních vektorů x_k, sestrojených modifikovanou metodou extrémů kvadratické formy (Ax, x) (a tedy systém vlastních vektorů příslušným k nenulovým vlastním hodnotám λ_k) je úplný právě tehdy, když (samoadjungované totálně omezené) zobrazení A je prosté.

Nakonec je vhodné si ještě uvědomit, že ze vztahu $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} (x, x_n)\, Ax_n$ plyne, že pro všechna $x \in H$ platí

$$A(x,x) = (Ax, x) = \sum_k (x, x_k) \lambda_k (x_k, x) = \sum_k |(x, x_k)|^2 \lambda_k.$$

Známe-li tedy všechny nenulové vlastní hodnoty zobrazení A, můžeme napsat kvadratickou formu $A(x,x)$ v "diagonálním" tvaru. Čísla (x, x_k) jsou souřadnice vektoru x v souřadnicovém systému daném vektory x_k.

Čtenář snadno nahlédne, že všechny úvahy provedené v této kapitole lze provést i tehdy, zabýváme-li se reálným Hilbertovým prostorem, a že podobné úvahy lze provést i v Eukleidovském prostoru R^n (kde se všechny úvahy většinou zjednoduší, neboť odpadnou "otázky konvergence" a všechny řady budou konečné). Jestliže známe všechny nenulové vlastní hodnoty zobrazení A a jestliže pro každou takovou vlastní hodnotu λ dovedeme sestrojit ortonormální bázi v příslušném prostoru $\{x\colon Ax = \lambda x\}$ – k čemuž slouží např. popsaná metoda extrémů kvadratické formy $A(x,x)$ – máme možnost kvadratickou formu $A(x,x)$ přepsat ve tvaru $\sum\limits_k (x, x_k)^2 \lambda_k$, kde (x, x_k) jsou souřadnice vektoru x vzhledem k ortonormálnímu systému vektorů $\{x_k\}$. Jak známe z geometrie, v tom je zahrnuta např. úloha převést kuželosečku resp. kvadriku z obecné polohy do polohy středové. Vlastní vektory, příslušné vlastním hodnotám $\lambda_k \neq 0$, udávají pak "hlavní směry" pro příslušnou kuželosečku resp. kvadriku.