Některé matematické struktury používané v kybernetice

Pavel Pták

České vysoké učení technické v Praze
Katedra matematiky a Centrum strojového vnímání
ptak@math.feld.cvut.cz

9. března 2001

Tento text pojednává o některých matematických strukturách, kterých – jak se domnívám – by si mohl a měl být vědom každý student kybernetiky. Objektem zájmu budou především struktury funkcionálně-analytické, topologické a některé algebraické struktury související s pojmem uspořádání (speciálně Booleovy algebry). Krátce bude také pojednáno o kategoriálním pohledu na matematické struktury (tj. pohledu vycházejícím z teorie kategorií). Předpokládá se jen dobrá znalost základní matematiky.

Poznamenejme, že tento text má více méně informativní charakter a nejde do velké hloubky. Organizace textu je velmi ekonomická a *dvojí čtení* je nutností. Pro vážné studium, které jediné umožní dosáhnout toho stupně pochopení, které je potřebné pro výzkumnou práci, uvádíme citace na specializovanou literaturu.

1 Funkcionálně–analytické a topologické struktury

V této kapitole shrneme základní pojmy a konstrukce, patřící do uvedené oblasti. Podrobný výklad lze najít v knihách W. Rudin: Functional Analysis a J. Kelly: General Topology.

Definice. Lineární (= vektorový) prostor H (nad reálnými čísly R či komplexními čísly C jež se nazývají *skaláry*) se nazývá *prostor se skalárním* *součinem*, jestliže ke každé dvojici vektorů $x, y \in H$ je přiřazen skalár (x, y) tak, že platí

(i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ($\overline{\quad\quad}$ značí komplexně sdružené číslo pokud H je nad C, když H je nad R, požadujeme $(x, y) = (y, x)$)

(ii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

(iii) $(x, x) \geq 0$

(iv) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = o$ (o je nulový vektor)

(v) $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y)$ pro každý skalár $\lambda \in R$ (či $\lambda \in C$).

Příklady:

1. Nechť R^n resp. C^n je příslušný n-dimensionální eukleidovský prostor, nechť $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Pak $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ (resp. $(x, y) = x_1 \bar{y_1} + x_2 \bar{y_2} + \cdots + x_n \bar{y_n}$) je skalární součin na R^n (resp. C^n).

2. Nechť N značí množinu přirozených čísel. Nechť ℓ^2 je prostor všech posloupností (reálných či komplexních) $x = (x_1, x_2, \ldots,)$ takových, že $\sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$. Pak

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \ \text{ (resp. } (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y_i})$$

je skalární součin na ℓ^2. V tomto smyslu můžeme prostor ℓ^2 chápat jako nejjednodušší nekonečně dimenzionální prostor se skalárním součinem (nejbližší rozšíření R^n, "nekonečně dimenzionální eukleidovský prostor").

Poznámka. Jak uvidíme, v prostoru se skalárním součinem bude zobrazení $\| \ \|: H \to \langle 0, \infty)$, $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ definovat "normu"; "metrika" na H indukovaná skalárním součinem bude funkce $\rho: H \times H \to \langle 0, +\infty)$, $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Poznámka: Připomeňme, že metrický prostor (X, d) se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

(Cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru M, d: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0,\ m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Konvergentní posloupnost $x_n \to x$ v metrickém prostoru: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0, \quad n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$. Je zřejmé, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.) Tímto pojmem se budeme později ještě podrobněji zabývat v kapitole o metrických prostorech.

Intuitivní obsah úplnosti je zhruba ten, že úplný prostor "nemá díry": Posloupnost prvků, které se "nekonečně přibližují", mají konvergovat (k něčemu z toho prostoru!). Pojem úplnosti je jeden z nejdůležitějších pojmů moderní (čisté i aplikované) matematiky.

Poznamenejme konečně, že každý prostor se skalárním součinem se dá zúplnit, což je již hlubší výsledek z teorie metrických prostorů a prostorů se skalárním součinem. Zúplňování se budeme věnovat později.

Definice (Hilbertův prostor): Nechť H je prostor se skalárním součinem. Prostor H se nazývá *Hilbertův*, jestliže při metrice $\rho(x,y) = \|x - y\| = (x - y, x - y)^{\frac{1}{2}}$ je H úplný metrický prostor.

Příklady:

R^n (resp. C^n) je Hilbertův prostor (R^n je úplný – to je nám známá Bolzano–Cauchyova podmínka)

ℓ^2 je Hilbertův prostor (lze snadno dokázat)

c_{00} = všechny posloupnosti, které jsou "skoro všude" 0 (0 až na konečně mnoho souřadnic); je to prostor se skalárním součinem (je to lineární podprostor ℓ^2, takže skalární součin na c_{00} se shoduje se skalárním součinem na ℓ^2), ale není úplný. Skutečně, posloupnost $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\}$ je cauchyovské v c_{00}, ale není v c_{00} konvergentní – prvek $\{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ mající n-tou souřadnici rovnu $\frac{1}{n}$ do c_{00} nepatří.

Tvrzení: Nechť H je prostor se skalárním součinem. Pak $\forall x, y \in H$

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \text{(Cauchyova nerovnost)}$$

Důsledek: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in H$.

Důkaz tvrzení: Vychutnejme si eleganci tohoto důkazu. Vezměme obecně $\lambda \in \mathbb{C}$ (později budeme specifikovat). Platí $0 \leq \|\lambda x + y\|^2 = |\lambda|^2 \cdot \|x\|^2 + 2 \cdot Re(\alpha\lambda) + \|y\|^2$

[$\alpha = (x, y)$ - zjednodušení zápisu]

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad \text{- jasné} \\ x &\neq 0 \quad \text{dosadíme } \lambda = \frac{-\overline{\alpha}}{\|x\|^2} \\ &\qquad (\bar{\alpha} \text{ je komplexně sdružené k } \alpha) \Longrightarrow \end{aligned}$$

$$0 \leq \|\lambda x + y\|^2 \leq \|y\|^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|x\|^2} \Longrightarrow 0 \leq \|y\|^2 \cdot \|x\|^2 - |\alpha|^2$$

QED (quod errat demonstrandum - z latiny volně znamená "což bylo dokázati").

Trojúhelníková nerovnost se získá kvadrátem tohoto výrazu ($\Rightarrow$ QED pro Důsledek).

Hilbertovy prostory jsou v jistém smyslu nejhezčí lineární prostory s metrikou. Představují nejpřirozenější zobecnění euklidovských prostorů. Mají pozoruhodnou teorii, jejíž řada výsledků je aplikovatelná ve fyzice a inženýrských vědách. Základy teorie Hilbertova prostoru uvádíme v kap. ???.

Pokračujme v "živočichopisu" prostorů.

Definice (normovaný prostor): Nechť X je vektorový prostor (nad R či $\mathbb{C}$). X se nazývá se *normovaný*, jestliže každému $x \in X$ je přiřazeno *nezáporné* číslo (jeho norma) $\|x\|$ tak, že platí ($\forall x, y \in X$, $\forall \alpha$ skalár):

a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

c) $\|x\| > 0$ pokud $x \neq o$.

Ukázali jsme, že každý prostor se skalárním součinem lze chápat jako prostor normovaný (skalární součin (x, y) indukuje normu $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$). Je zřejmé, že norma určuje metriku: Položíme $d(x, y) = \|x - y\|$. Normovaný prostor je tedy možno automaticky chápat jako metrický.

Definice (Banachův prostor). *Banachův prostor* je normovaný prostor $(X, \|.\|)$, kde $\|.\|$ indukuje metriku, v níž je X úplný.

Příklady: Každý prostor se skalárním součinem je normovaný, každý Hilbertův prostor je Banachův.

Důležité příklady (maticové normy): Normy v R^n (resp. C^n), $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ (resp. C^n)

a) $\nu_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

b) $\nu_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ eukleidovská norma

c) $\nu_p(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ $p \geq 1$ (pro $p = 2$ dostáváme eukleidovskou normu)

d) $\nu_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Lehce se zjistí, že ν_ℓ je skutečně norma pro každé $\ell, 1 \leq \ell \leq \infty$.

Jednotkové koule:

$\nu_1(x) \leq 1$ $\nu_2(x) \leq 1$ $\nu_\infty(x) \leq 1$

Dá se snadno ukázat, že Hilbertův prostor má "kulatá jednotková okolí" (tj. jejich koule jsou tzv. striktně konvexní, což znamená, že kdykoliv vezmeme dva body na sféře a spojíme je úsečkou, tato úsečka proniká tuto sféru *jenom* v oněch dvou bodech). Tudíž prostory normované, jejichž normy jsou indukované skalárním součinem, mají jednotková okolí kulatá. Vidíme, že např. ν_1, ν_∞ nejsou indukovatelné skalárním součinem.

V řadě oborů kybernetiky se uvažují normy na daném prostoru matic. Následující tvrzení je základní důležitosti a je třeba ho dobře pochopit. Vyslovme ho pro R^n (pro C^n platí analogicky).

Tvrzení: Nechť ν je norma v R^n. Definujme ohodnocení $\|.\|_\nu$ na prostoru $M^{n,n}$ ($M^{n,n}$ je lineární prostor matic typu n, n) tak, že

$$\|A\|_\nu = \sup_{x\neq 0, x\in R^n} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$$

(vektor x je zde chápán jako "sloupcová matice"). Pak $\| \ \|_\nu$ je norma na $M^{n,n}$. Navíc platí, že $\|A\|_\nu = \max\limits_{x\neq 0, x\in R^n} \dfrac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$, a tedy $\|A\|_\nu = \nu(Ax_0)$ pro nějaký vektor x_0 z jednotkové sféry.

Důkaz: Nejdříve je třeba nahlédnout, že $\| \quad \|_\nu$ je dobře definována, tj. je potřeba ověřit, že $\sup_{x\neq 0, x\in R^n} \dfrac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$ existuje. Nejprve si všimneme, že

$$\sup_{x\neq 0, x\in R^n} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} = \sup_{x\in R^n, \nu(x)=1} \nu(Ax).$$

To je ale zřejmé: Je-li $p = \dfrac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$ a je-li $x \neq 0$, pak z linearity platí, že $p = \dfrac{\nu(A\alpha x)}{\nu(\alpha x)}$. Položíme-li $\alpha = \dfrac{1}{\nu(x)}$, dostaneme $\nu(\alpha \cdot x) = \nu\left(\dfrac{x}{\nu(x)}\right) = 1$ a přitom $p = \dfrac{\nu(A\alpha x)}{\nu(\alpha x)} = \nu\left(A\dfrac{x}{\nu(x)}\right)$.

V dalším kroku potvrdíme, že $\sup\limits_{x\in R^n, \nu(x)=1} \nu(Ax)$ je konečné. Důkaz provedeme sporem (uvědomíme si přitom, že zobrazení $A\colon R^n \to R^n$ dané přirozeným způsobem maticí A: $A(x) = Ax$ je zřejmě spojité (vzhledem k metrice na R^n dané ν).

Nechť $\sup\limits_{x\in R^n, \nu(x)=1} \nu(Ax) = +\infty$. Pak lze najít posloupnost vektorů $x_n \in R^n, \nu(x_n) = 1$ $(n \in N)$ takovou, že $\nu(Ax_n) \geq n$. Jelikož uzavřená jednotková koule v R^n je omezená a uzavřená, můžeme z posloupnosti x_n vybrat posloupnost konvergentní (to plyne z "kompaktnosti" uzavřené jednotkové koule; pokud čtenář o kompaktnosti dosud nic neslyšel, může to pro tento okamžik vzít jako fakt a pak si prostudovat část o kompaktních metrických prostorech probíranou později v tomto textu). Označme tuto vybranou posloupnost x_{n_k} $(k \in N)$. Pak $x_{n_k} \to x$ a tedy $A(x_{n_k}) \to A(x)$ (neboť A je spojité). Ale to je spor, neboť $A(x)$ by muselo být "nekonečně velké". Ukázali jsme, že $\sup\limits_{x\neq 0, x\in R^n} \dfrac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$ existuje (tj. toto supremum je vlastní číslo).

Úplně stejně se ukáže, že místo sup můžeme psát max. Skutečně, nechť

$$\|A\|_\nu = \sup_{x\neq 0} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} = \sup_{x\in R^n, \nu(x)=1} \nu(Ax)$$

(poslední rovnost už známe). Pak lze najít posloupnost y_n takovou, že $\nu(y_n) = 1$ $(n \in N)$ a $\sup \nu(Ay_n) = \|A\|_\nu$. Buď y_{n_k} posloupnost konvergentní vybraná z y_n. Nechť $y_{n_k} \to y$. Pak $\nu(y) = 1$ (to plyne ze spojitosti normy) a $Ay_{n_k} \to Ay$. Je zřejmé, že $\|A\|_\nu = A(y)$ a tedy *velikost normy* $\|A\|_\nu$ *se nabývá v prvku* $y \in R^n$. Můžeme tudíž sup nahradit max, což jsme měli ukázat.

Nyní je už snadné ověřit, že $\| \quad \|_\nu$ je skutečně norma na $M^{n,n}$. Zřejmě stačí ověřit jen trojúhelníkovou nerovnost, ostatní je evidentní. Platí

$$\|A+B\|_\nu = \max_{x\neq 0, x\in R^n} \frac{\nu((A+B)x)}{\nu(x)} \leq \max_{x\neq 0, x\in R^n} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} + \max_{x\neq 0, x\in R^n} \frac{\nu(Bx)}{\nu(x)}.$$

QED.

Poznámka: Je zajímavé, že někdy lze $\| \quad \|_\nu$ určit ryze algebraickými metodami. Platí např. pro ν_2 následující rovnosti:

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}}, \quad &&\lambda_{\max} \ \text{ je největší vlastní číslo matice } A^TA, \\ \|A^{-1}\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}}, \quad &&\lambda_{\min} \ \text{ je nejmenší vlastní číslo matice } A^TA. \end{aligned}$$

Více lze najít ve skriptu E. Krajníka: Maticový počet a ještě více pak v knize G. Golub, Ch. Van Loan: Matrix Computations či v knize M. Fiedler: Speciální matice a jejich použití v numerické matematice.

Poznámka (topologický lineární prostor): V některých aplikacích je potřeba pracovat s lineárními prostory, které mají "topologii", ale nelze je normovat. Teorie těchto prostorů je poněkud obtížnější (viz např. Schaffer: Topological Linear Spaces).

Definice: Lineární (tj. vektorový) prostor se "systémem okolí o" (uniformně pak pro každý bod) se nazývá topologický lineární prostor, jestliže obě operace

$$(x,y) \to x+y$$
$$(\alpha, x) \to \alpha x$$

jsou spojité.

Tvrzení: Každý normovaný prostor je topologický lineární prostor. Naopak to obecně neplatí – např. prostor $C(R)$ spojitých funkcí na R s topologií bodové konvergence není normovatelný. V některých technických vědách se pracuje i s prostory distribucí, které lze studovat ze specializované literatury (viz W. Rudin: Functional Analysis).

Poznamenejme konečně, že existují i lineární prostory, které jsou metrizovatelné, ale ne normovatelné. Takový je např. prostor L_p pro $p < 1$. Tento prostor nemá konvexní okolí σ. Podrobněji viz W. Rudin, Functional Analysis.

2 Metrické prostory

Někdy je třeba zkoumat metriku (resp. systémy okolí bodů) na množinách, které nejsou opatřeny lineární (či jinou) algebraickou strukturou. Pak studujeme metrické či obecněji topologické prostory. Projděme si základní pojmy a některé výsledky.

Definice (metrický prostor): Nechť X je množina, $X \neq \emptyset$. Pak (X, d) se nazývá *metrický prostor*, pokud d je metrika, tj. pokud $\forall x, y, z \in X$ platí ($d\colon X \times X \to R^+$):

(i) $0 \leq d(x, y) < \infty$

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (když požadujeme jen $\Leftarrow$, pak prostor nazýváme pseudometrický, rozdíl v teorii metrických a pseudometrických prostorů je nepatrný)

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

V předchozí části jsme dokázali následující tvrzení.

Tvrzení: Každý normovaný prostor je metrický.

Připomeňme základní pojmy metrických prostorů:

Definice: Metrický prostor (X,d) se nazývá *úplný* (complete), jestliže každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní (rozumí se konvergentní v tom prostoru X). Připomeňme:

x_n *cauchyovská* $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, \forall m,n \geq n_0 \colon d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$

x_n *konvergentní k bodu* $x \in X \iff \forall \varepsilon$ - okolí bodu $O_\varepsilon(x)$ bodu $x \in X$ (ε-okolí bodu x v metrickém prostoru (X,d) je množina $O_\varepsilon(x)$, $O_\varepsilon(x) = \{y | d(x,y) < \varepsilon\}) \exists n_0, \forall m \geq n_0 : x_m \in O_\varepsilon(x)$.

Metrický prostor se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků toho prostoru lze vybrat posloupnost v tom prostoru konvergentní.

Metrický prostor se nazývá *totálně omezený*, jestliže z každé posloupnosti prvků toho prostoru lze vybrat posloupnost cauchyovskou.

Příklady:

Prostor R reálných čísel s obvyklou metrikou $d(x,y) = \lvert x - y \rvert$	prostor úplný (Bolzano – Cauchy podmínka), tento prostor ovšem není kompaktní $x_n = n$ (z posloupnosti nelze vybrat konvergentní)
Interval $< 0,1 >$	je kompaktní, rovněž $< 0,1 >^n$ je kompaktní (podáme důkaz).
Prostor $< 0,1)$	není kompaktní, (posloupnost $x_n = \dfrac{1}{n}$ však je v $< 0,1 >$ cauchyovská, ale není tam konvergentní) je totálně omezený

Ukážeme si, že kompaktní prostory mají řadu příjemných vlastností. Uvidíme např., že v R^n je množina (chápaná jako metrický podprostor) kompaktní právě když je uzavřená a omezená. Obecně platí: kompaktní $\iff$ úplný + totálně omezený (i zde podáme důkaz).

Příklady metrických prostorů: Zajímavý příklad je tzv. ježek: Interval $\langle 0, 1\rangle$ vezmeme nekonečněkrát a pak "slepíme" tyto invervaly v bodě 0. Vzniklý metrický prostor, zvaný zlidověle ježek, je úplný metrický prostor (není ovšem kompaktní).

Metrika d na ježku: $d(x, y) =$ obyčejná vzdálenost na $\langle 0, 1\rangle$, pokud x, y jsou body na jedné "bodlině", jinak

$$d(x, y) = d(x, 0) + d(y, 0)$$

(Můžeme uvažovat i ježka s jinou metrikou, např. tzv. "ruského ježka": Množinově je stejný s předchozím, je ale uvažována jiná metrika: $d(x, y) = d(x, 0)+d(y, 0)$ pro všechny body x, y (tj. i na stejné bodlině; ovšem $d(x, y) = 0$ pokud $x = y$). Název, pracovně používaný známými topology, je odvozen od způsobu cestování v bývalém Rusku: Možnost stěhování musí být potvrzena "bumáškou" v Moskvě ...

Další příklad: X - množina všech železničních stanic, $d(x, y)$ cena jízdenky. Dostaneme konečný metrický prostor (alespoň bychom měli dostat ...)

Uveďme některé důležité výsledky z teorie metrických prostorů. Připomeňme, že v metrickém prostoru (M, d) se posloupnost x_n ($n \in N$) nazývá *metricky diskrétní*, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, $\forall i, j, i \neq j$. Posloupnost, která je metricky diskrétní pro jisté ε, se nazývá *metricky diskrétní řádu ε*.

Věta (posloupnostní princip v metrických prostorech): Z každé nekonečné posloupnosti v metrickém prostoru lze vybrat buď nekonečnou posloupnost cauchyovskou, nebo nekonečnou posloupnost metriky diskrétní ("nebo" je zde užito v nevylučovacím smyslu).

Důkaz (hlavní myšlenka): Vezměme jednotkovou kouli (v metrice d) kolem každého bodu x_n, tj. uvažujme množiny $O(x_n, 1) = \{y \in M \mid d(x_n, y) < 1\}$. Pokud každá z těchto množin obsahuje jen konečně mnoho bodů, lehce najdeme (nekonečnou) metricky diskrétní posloupnost řádu 1. Pokud ne, máme okolí $O(x_p, 1)$, které obsahuje nekonečně mnoho bodů z posloupnosti x_n. Označme tyto body y_n ($n \in N$) a utvořme soustavu všech $\frac{1}{2}$-koulí v metrice d kolem y_n, tj. uvažujme množiny $O(y_n, \frac{1}{2})$. Jestliže každá z těchto množin obsahuje jen konečně mnoho bodů z posloupnosti y_n, pak lehce najdeme (nekonečnou) metricky diskrétní posloupnost řádu $\frac{1}{2}$. Jestliže ne, pokračujeme dál stejně pro $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, atd.

Je zřejmé, že buď pro nějaké $\frac{1}{n}$ dostaneme posloupnost $\frac{1}{n}$-diskrétní, anebo nám zmenšující se koule obsahující pořád nekonečně mnoho bodů lehce umožní najít cauchyovskou podposloupnost. QED.

Tvrzení: Metrický prostor (M, d) je totálně omezený $\iff$ každá metricky diskrétní posloupnost v M je konečná.

Důkaz: Ihned plyne z předchozí věty – pokud se z posloupnosti nedá vybrat cauchyovská, dá se vybrat metricky diskrétní.

Věta: (M, d) je kompaktní $\iff$ úplný a totálně omezený.

Důkaz: Pokud je M kompaktní, pak je zřejmě úplný i totálně omezený (z metricky diskrétní posloupnosti nelze samozřejmě vybrat konvergentní). Předpokládejme naopak, že M je úplný a totálně omezený. Mějme danou posloupnost x_n ($n \in N$). Jelikož M je totálně omezený, nedá se z ní vybrat posloupnost metricky diskrétní. Pak se z ní musí podle posloupnostního principu dát vybrat posloupnost cauchyovská. Jelikož M je úplný, musí tato posloupnost konvergovat. Vidíme, že z každé posloupnosti v M se dá vybrat posloupnost konvergentní. QED.

Věta: Nechť $f\colon M \to R$ je spojitá funkce na kompaktní metrickém prostoru. Pak f nabývá svého maxima (resp. minima) v nějakém bodě z M.

Důkaz: Dokažme to pro maximum (důkaz pro minimum obdržíme přechodem k funkci $-f$). Techniku už známe: Nejprve ukážeme, že f je omezená. Je-li totiž $f(x_n) \geq n$ pro nějakou posloupnost $x_n \in M$, pak vybereme podposloupnost x_{n_k}, která konverguje. Tedy $x_{n_k} \to x$ a tudíž (f je spojitá)

$f(x_{n_k}) \to f(x)$. Ale pak $f(x) = +\infty$, což je spor.

Pokud tedy f je omezená, existuje $\sup\limits_{x \in M} f$. Máme tudíž posloupnost y_n takovou, že $\sup f = \lim f(y_n)$. Ale M je kompaktní, takže y_n má konvergentní podposloupnost, řekněme nějakou posloupnost y_{n_k}. Nechť $y_{n_k} \to y$. Pak nutně $\sup\limits_{x \in M} f = f(y)$. QED.

Nyní budeme formulovat důležitou větu, která charakterizuje kompaktní podmnožiny v R^n (jiný způsob důkazu ukážeme později). Použijeme známou Weierstrassovu větu, která říká, že z každé omezené posloupnosti v R^n se dá vybrat posloupnost konvergentní (důkaz Weierstrassovy věty v R^2, který lze nalézt ve skriptu P. Pták, Calculus II; v R^n se důkaz provede stejně). Připomeňme, že množina S v R^n se nazývá *omezená*, jestliže $S \subset < a, b >^n$ pro nějaké $a, b \in R$.

Věta: $M \subset R^n$ je kompaktní (jakožto metrický prostor s metrikou získanou zúžením Eukleidovské metriky z R^n) $\iff$ M je uzavřená v R^n a omezená.

Důkaz: M je úplný, protože (dokaž!) každý uzavřený podprostor úplného prostoru je úplný (R^n je úplný prostor jak plyne z Weierstrassovy věty – každá cauchyovská posloupnost v R^n je omezená množina). Zbývá ukázat, že v R^n je každá omezená množina totálně omezená. To také ihned plyne z Weierstrassovy věty, ježto z každé omezené posloupnosti lze vybrat cauchyovskou. QED.

Nyní zformulujeme a dokážeme slavnou Banachovu větu o pevném bodě. Znak $\exists!$ je matematická usance používaná namísto "existuje přesně jeden".

Věta (Banachova věta o pevném bodě): Nechť (X, d) je úplný metrický prostor a nechť $f \colon (X, d) \to (X, d)$ je *kontrahující zobrazení* (tj. nechť $\exists K, 0 < K < 1$ tak, že $d(f(x), f(y) < K \cdot d(x, y))$. Pak f má přesně jeden pevný bod, tj.

$$\exists!\, x \in X \text{ tak, že } f(x) = x.$$

Důkaz (náznak, detaily si doplní čtenář snadno sám): Vezměme libovolný bod $x_1 \in X$ a utvořme posloupnost $x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2) = f^2(x_1), \ldots,$

etc. Pak posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v M neboť

$$d(x_m, x_n) \leq K^n \cdot d(x_1, x_n) \text{ pro } n \geq m.$$

Jelikož M je úplný, platí $x_n \to x$. Pak ale nutně $f(x) = x$. Jednoznačnost tohoto pevného bodu je zřejmá (nicméně dokaž přesně!).

Výše uvedená věta je stejně jednoduchá, jako překvapující a geniální. Důkaz má navíc konstruktivní charakter a vlastně také udává přesnost aproximace pevného bodu. Dá se totiž snadno ukázat (proveď!), že při začátku procedury v bodě x_0 platí následující vztahy určující dosaženou přesnost v n-tém kroku aproximace:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq \tfrac{K}{1-K} d(x_{n-1}, x_n), \\ d(x_n, x) &\leq \tfrac{K^n}{1-K} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Možnosti aplikace se ukázaly být značné. Některé jsou již tak "folkloristické", že si je ani neuvědomujeme (např. přibližné metody řešení soustav lineárních rovnic jako Jacobiho metoda či Gaussova–Seidelova metoda mají teoretický základ ve větě o pevném bodě!). Naznačme dvě další typické aplikace, třetí (konstrukce fraktálu) věnujeme speciální sekci.

Příklad: Řešme přibližně rovnici $x^3 + 2x - 1 = 0$.

Řešení: Pišme $g(x) = x - \lambda f(x)$, kde $\lambda \in R$, $0 < \lambda \leq 1$ (vhodné číslo λ bude určeno později). Je jasné, že $f(x) = 0$ právě když $g(x) = x$. Jelikož $f(0) = -1$ a $f(1) = 2$, $f(x)$ má v $< 0, 1 >$ kořen. Volbou vhodného $\lambda \in R$ připravíme situaci pro aplikaci Banachovy věty o pevném bodě. Uplatníme větu o střední hodnotě z diferenciálního počtu:

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(c) \text{ v nějakém bodě } c \in (0, 1).$$

Odtud dostaneme $|g(x) - g(y)| = |g'(c)| \cdot |x - y|$. Jelikož $g'(x) = 1 - \lambda f'(x) = 1 - \lambda(3x^2 + 2)$ a jelikož $2 \leq f'(x) \leq 5$ na $< 0, 1 >$, dostáváme $1 - 5\lambda \leq g'(x) \leq 1 - 2\lambda$. Můžeme volit např. $\lambda = \frac{1}{5}$ a pak máme $|g(x) - g(y)| \leq \frac{3}{5}|x - y|$. Je zřejmé, že $g\colon < 0, 1 > \to < 0, 1 >$ je kontrahující a tudíž můžeme použít konvergenční proceduru věty o pevném bodě. Jestliže např. položíme $x_0 = 0$, dostáváme

$$x_1 = 0,2,\ x_2 = 0,318,\ x_3 = 0,385,\ x_4 = 0,419, x_5 = 0,437, \text{ atd.}$$

Jak dobrou aproximaci jsme již získali? Použijme porovnání uvedené v předchozím odstavci:

$$\begin{aligned}(\tfrac{3}{5})^5 \cdot (\tfrac{5}{2}) \cdot 0,2 &= 0,039\\ (\tfrac{3}{5}) \cdot (\tfrac{5}{2}) \cdot 0,018 &= 0,027.\end{aligned}$$

To druhé kritérium je zde lepší a vidíme tedy, že máme řešení s přesností 0,027. (Skutečné řešení je 0,453.)

Příklad (Picardova věta o existenci lokálního řešení obyčejné diferenciální rovnice): Uvažujme diferenciální rovnici $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Hledejme řešení v obdélníčku D: $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ (kladná čísla a a b jsou zatím neznámá). Předpokládejme, že $f(x,y)$ je Lipschitzovské zobrazení v druhé proměnné, tj. předpokládejme, že

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \text{ při } (x,y_1) \in D, (x,y_2) \in D.$$

Tato podmínka je většinou splněna v úlohách "ze života" ($f(x,y)$ je ovšem jako důsledek Lipschitzovkosti spojitá na D).

Uvažujme prostor $C(\langle x_0 - a, x_0 + a\rangle)$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle x_0 - a, x_0 + a\rangle$. Opatřeme $C(< x_0 - a, x_0 + a >)$ tzv. metriku stejnoměrné konvergence (někdy též nazývanou Čebyševovou metrikou) $d\colon C(\langle x_0 - a, x_0 + a\rangle) \to R^+$ definovanou tak, že

$$d(g,h) = \max_{x \in < x_0 - a, x_0 + a >} |g(x) - h(x)|.$$

Dá se relativně snadno ukázat, že $C(< x_0 - a, x_0 + a >)$ je v této metrice úplný metrický prostor (proveď!). (Poznamenejme zde, že jak asi čtenář nahlédl, je tato metrika indukovaná normou $\|f\| = \max_{x \in \langle x_0 - a, x_0 + a\rangle} |f(x)|$. Tedy $C < x_0 - a, x_0 + a >$ je vlastně Banachův prostor, ale v naší úloze je důležitá jenom úplnost příslušné metriky.)

Přepišme nyní diferenciální rovnici, s kterou jsme začali, do integrálního tvaru. Dostáváme

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Jsouce motivováni tímto vztahem, uvažujme zobrazení

$$T\colon C(< x_0 - a, x_0 + a >) \to C(< x_0 - a, x_0 + a >)$$

takové, že

$$T(f) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Pak najít řešení naší integrální rovnice znamená najít pevný bod zobrazení T, tj. najít $y(x)$ tak, aby $y(x) = T(y(x))$. Potřebujeme, aby T bylo kontrahující.To zajistíme tak, že T zúžíme na vhodný (úplný metrický) podprostor prostoru $C(< x_0 - a, x_0 + a >)$. Jelikož D je kompaktní v R^2 a $f(x,y)$ je spojitá, $f(x,y)$ je omezená na D. Existuje tedy konstanta c taková, že $|f(x,y)| \leq c$ pro každé $(x,y) \in D$. Nechť r je jakékoliv číslo takové, že platí $0 < r < \min(\frac{1}{M}, a, \frac{b}{c})$. Pak lze shora uvedenou diskusi uplatnit i pro interval $|x - x_0| \leq r < a$. Uvažujme konstantní funkci $y_0(x) = y_0$ (pro všechna x taková, že $|x - x_0| \leq r$) a položme

$$B = \{y(x) \in C(< x_0 - a, x_0 + a >) \mid d(y(x), y_0(x)) \leq cr\}.$$

Pak zřejmě B je uzavřený (metrický) podprostor prostoru $C(< x_0 - r, x_0 + r >)$ a tudíž S je také úplný. Navíc platí, že T zobrazuje $C < x_0 - r, x_0 + r >$ do $C < x_0 - r, x_0 + r >$. To je zřejmé, neboť

$$|T(y(x)) - y_0(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\, dt \leq c|x - x_0| \leq cr.$$

Ještě ověříme, že T je kontrahující. Platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} |T(y_1(x)) - T(y_2(x))| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\, dt \\ &\leq \int_{x_0}^{x} M|y_1(t) - y_2(t)|\, dt \\ &\leq M|x - x_0| \max_{t \in < x_0 - r, x_0 + r >} |y_1(t) - y_2(t)| \\ &\leq Mr \cdot d(y_1(x), y_2(x)). \end{aligned}$$

Ale $Mr < 1$ vzhledem k tomu, jak jsme definovali r. Dokázali jsme, že naše diferenciální rovnice má *lokálně* jednoznačné řešení, splňující danou počáteční podmínku.

2.1 Elementární důkaz základní věty algebry

Jako jeden z důsledků provedených topologických úvah dokažme jedno hlubší algebraické tvrzení. Pro svou důležitost je tento výsledek v klasické literatuře uváděn jako tzv. *základní věta algebry*. Poznamenejme, že první důkaz podal K. F. Gauss (1777 - 1855) v r. 1799.

Lemma 1: Buď $p \in \mathbf{C}[x]$ polynom stupně aspoň jedna. Pak

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$$

(tj. formálně $\forall K \geq 0 \exists r > 0 \forall z \in \mathbf{C}\colon |z| > r \Rightarrow |p(z)| > K$).

Důkaz: Nechť $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0$. Pak

$$a_n z^n = p(z) - (a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0),$$

tj.

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |p(z) - (a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)| \\ &\leq |p(z)| + |a_{n-1} z^{n-1}| + \cdots + |a_1 z| + |a_0)|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - \cdots - |a_1 z| - |a_0| \\ &= |z|^n \left[|a_n| - |a_{n-1}| \cdot \frac{1}{|z|} - \cdots - |a_1| \cdot \frac{1}{|z|^{n-1}} - |a_0| \cdot \frac{1}{|z|^n} \right]. \end{aligned}$$

Nyní pro $|z| \to +\infty$ je $|z|^n \to +\infty$,

$$\left[|a_n| - |a_{n-1}| \cdot \frac{1}{|z|} - \cdots - |a_0| \cdot \frac{1}{|z|^n} \right] \to |a_n|.$$

Odtud již tvrzení plyne.

Věta 1: Buď $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ polynom stupně aspoň jedna. Pak funkce $z \mapsto |p(z)|$ má na množině $\mathbf{C}$ absolutní minimum.

Důkaz: Nechť $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,\ n \geq 1, a_n \neq 0$.

Vezměme hodnotu $K = |p(0)| = |a_0|$. Pak dle Lemma 1 existuje $r > 0$ tak, že pro $z \in \mathbf{C},\ |z| > r$ platí $|p(z)| > |p(0)|$.

Označme $S_r = \{z \in \mathbf{C}; |z| \leq r\}$.

Pak S_r je kompaktní množina, a tudéž funkce $z \mapsto |p(z)|$ (která je spojitá na $\mathbf{C}$, a tudíž i na S_r) na ní nabývá svého minimaů nechť je to v bodě z_0. Pak v bodě z_0 má funkce $|p|$ absolutní minimum:

- je-li $z \in S_r$, pak samozřejmě $|p(z_0)| \leq |p(z)|$,
- je-li $z \in \mathbf{C} \backslash S_r$, pak $|z| > r$, a tudíž $|p(z)| > |p(0)| \geq |p(z_0)|$, neboť $0 \in S_r$.

Věta 2: Buď $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ polynom stupně aspoň jedna a nechť v bodě $z_0 \in \mathbf{C}$ platí $p(z_0) \neq 0$.

Pak funkce $z \mapsto |p(z)|$ nemá v bodě z_0 lokální minimum.
Podrobněji:

Existuje $\xi \in \mathbf{C}$ (směr klesání) tak, že pro každé dostatečně malé $t > 0$ platí:

$$|p(z_0 + t\xi)| < |p(z_0)|$$

(tj.

$$\exists \xi \in \mathbf{C},\ \varepsilon > 0 \forall t \in (0, \varepsilon) \colon |p(z_0 + t\xi)| < |p(z_0)|\ ).$$

Důkaz: Označme $b_0 = p(z_0) \neq 0$. Polynom $p(z) - b_0$ má kořen z_0. Označme $m \geq 1$ jeho násobnost. Existuje tedy polynom $q(x) \in \mathbf{C}[x]$, tak, že $p(z) - b_0 = (z - z_0)^m q(z)$, kde $\deg(q) \geq 0,\ q(z_0) \neq 0$. Označme $b_1 = q(z_0)$.

Zvolme $\xi \in \mathbf{C},\ t \in \mathbf{R}$, a počítejme hodnotu $p(z_0 + t\xi)$:

$$\begin{aligned} p(z_0 + t\xi) &= b_0 + (t\xi)^m q(z_0 + t\xi) = b_0 + t^m \xi^m [q(z_0 + t\xi) - b_1 + b_1] \\ &= b_0 + t^m \xi^m b_1 + t^m \xi^m [q(z_0 + t\xi) - b_1]. \end{aligned}$$

Označme $r(t) = q(z_0 + t\xi) - b_1$. Pak $r(t)$ je polynom bez absolutního členu. Existuje tedy $K > 0$ tak, že

$$\forall t \in < 0, 1 > \colon |r(t)| \leq Kt.$$

(Důkaz: Nechť $r(t) = b_s t^s + \cdots + b_1 t = t(b_s t^{s-1} + \cdots + b_1)$. Pak pro $t \in < 0, 1 >$ platí $|r(t)| = |t||b_s t^{s-1} + \ldots |b_1| \leq |t|(|b_s| + \cdots + |b_1|)$. Nyní stačí položit $K = |b_s| + \cdots + |b_1|$.)

Pro libovolné $t \in \mathbf{R}$ nyní platí:

$$p(z_0 + t\xi) = b_0 + t^m \xi^m b_1 + t^m \xi^m r(t) = b_0[1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0} + t^m \xi^m \frac{1}{b_0} r(t)],$$

tj. $|p(z_0 + t\xi)| = |b_0||1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0} + t^m \xi^m \frac{1}{b_0} r(t)|$.

O poslední absolutní hodnotě chceme dokázat, že pro dostatečně malá $t > 0$ je < 1. Kdybychom použili vzorec $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$, tak to nedokážeme. Musíme tedy aspoň dva členy "nechat pohromadě" a zbývající člen "separovat". Protože již máme odhad pro $|r(t)|$, budeme "separovat" člen $t^m \xi^m \frac{1}{b_0} r(t)$. Pro $t \in < 0, 1 >$ platí:

$$\begin{aligned} |p(z_0 + t\xi)| &\leq |b_0|[|1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}| + |t^m \xi^m \frac{1}{b_0} r(t)|] \\ &\leq |b_0|[|1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}| + t^m |\xi^m \frac{1}{b_0}| tK]. \end{aligned}$$

Jestliže nyní součin $\xi^m \frac{b_1}{b_0}$ bude reálné číslo, pak pro t dostatečně malé bude

$$|1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}| = 1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}.$$

Pak bude

$$|p(z_0 + t\xi)| \leq |b_0|[|1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}| + t^{m+1}|\xi^m| \frac{1}{|b_0|} K].$$

Chceme nyní, aby pro každé dostatečně malé $t > 0$ bylo

$$1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0} + t^{m+1}|\xi^m| \frac{1}{|b_0|} K < 1,$$

tj. aby

$$\xi^m \frac{b_1}{b_0} + t|\xi^m| \frac{1}{|b_0|} K < 0.$$

To nastane tehdy, bude-li $\xi^m \frac{b_1}{b_o} < 0$; např. když $\xi^m \frac{b_1}{b_0} = -1$, tj. když $\xi^m = -\frac{b_0}{b_1}$.

Důsledek *(základní věta algebry)*
Buď $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ polynom stupně aspoň jedna. Pek p má v tělese $\mathbf{C}$ aspoň jeden kořen.

Důkaz: Podle Věty 1 nabývá funkce $|p|$ absolutního minima v nějakém bodě $z_0 \in \mathbf{C}$. V tomto bodě z_0 pak dle Věty 2 musí být $p(z_0) = 0$.

Důsledek důsledku: Každý polynom stupně n má (včetně násobnosti) přesně n kořenů.

Důkaz: Jednoduchý indukční argument užívající předchozí důsledek.

2.2 Fraktál jakožto pevný bod

Ukážeme si, že na fraktál lze pohlížet jako na pevný bod jistého kontraktivního zobrazení na jistém úplném metrickém prostoru. Představme nejprve onen úplný metrický prostor. Bude to jistý "hyperprostor" (tj. prostor podmnožin nějakého prostoru) a opatříme ho tzv. Hausdorfovou metrikou. I když při studiu existence (a jednoznačnosti) fraktálu se soustředíme jen na Hausdorfovu metriku v R^n, je užitečné zaujmout nejprve trochu obecnější pozici vzhledem k značné důležitosti Hausdorfovy metriky i v jiných oblastech aplikované matematiky.

Definice 1 (Hausdorfova metrika) *: Nechť X je metrický prostor s metrikou d. Nechť $H(X)$ je množina všech neprázdných kompaktních podmnožin prostoru X. Nechť $A, B \in H(X)$. Položme*

$$d_H(A, B) = \max(\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)),$$

kde jako obvykle $d(a, B)$ značí $\min\limits_{b \in B} d(a, b)$.

Postupně ukážeme, že d_H definuje metriku na $H(X)$ a že je-li X úplný metrický prostor, pak $H(X)$ tvoří s metrikou d_H také úplný metrický prostor.

Nejprve proveďme verifikaci toho, že d_H je metrika na $H(X)$.

Tvrzení 2 *Jestliže $a \in X$ a B je kompaktní podprostor prostoru X, pak vzdálenost $d(a, B)$ bodu $a \in X$ od B definovaná vztahem $d(a, B) = \min\limits_{b \in B} d(a, b)$ existuje (tj. tato hodnota je korektně definovaná). Navíc platí, že $d(a, B) = 0$ právě když $a \in B$.*

Důkaz : Z trojúhelníkové nerovnosti pro metriku d se snadno dokáže, že funkce $v(x) = d(a, x)$ je funkce spojitá na X. Zúžení této funkce na B je funkce spojitá na (kompaktním) prostoru B (b je metrický podprostor prostoru X). Tudíž funkce $v(x)\colon B \to R$ musí nabývat svého minima v nějakém bodě $b_0 \in B$. Tudíž $\min\limits_{b \in B} d(a, b) = d(a, b_0)$.

Předpokládejme, že $d(a, B) = 0$. Pak $d(a, B) = d(a, b_0)$ pro nějaké $b_0 \in B$ a tudíž $b_0 = a$ podle vlastnosti metriky. Tudíž $a \in B$. Naopak, nechť $a \in B$. Pak platí

$$0 \leq d(a, B) = \min_{b \in B} d(a, b) \leq d(a, a) = 0,$$

a tedy $d(a, B) = 0$. ■

Definice 3 *Nechť (X, d) je metrický prostor. Nechť $H(X)$ značí množinu všech neprázdných kompaktních podmnožin prostoru X. Pak ohodnocení $d(A, B)$ pro $A, B \in H(X)$ definované vztahem*

$$d(A, B) = \max(d_A(B), d_B(A)), \text{ kde } d_A(B) = \max_{a \in A} d(a, B),$$

se nazývá Hausdorfova metrika *na $H(X)$.*

Nejprve musíme potvrdit, že Hausdorfova metrika je metrika.

Tvrzení 4 *Nechť A, B jsou neprázdné kompaktní podmnožiny metrického prostoru X (tj. $A, B \in H(X)$). Pak platí:*

(1) Definice $d_A(B) = \max_{a \in A} d(a, B)$ je korektní; navíc platí, že $d_A(B) = d(a_0, b_0)$ pro nějaké $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$.

(2) $d_A(B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$,

(3) $d(A, B) = d(a_0, b_0)$ pro nějaké $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$.

Důkaz : (1) Ukážeme-li, že funkce $v\colon A \to R$ daná vztahem $v(a) = d(a, B)$ je spojitá na A, existence hodnoty $d_A(B)$ jako maxima je dána kompaktností množiny A (Věta ??). Tedy $d_A(B) = d(a_0, B)$ pro nějaké $a_0 \in A$, ale $d(a_0, B) = d(a_0, b_0)$ pro nějaké $b_0 \in B$. Zbývá tedy ukázat spojitost funkce v na A. Stačí ověřit, že pro každé $x, y \in A$ platí $|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y)$. Ale pro každé $b \in B$ máme z trojúhelníkové nerovnosti vztah $d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)$ a tudíž dostáváme $d(x, b) - d(y, b) \leq d(x, y)$. Podobně při záměně $d(x, b)$ za $d(y, b)$. Odtud $|d(x, b) - d(y, b)| \leq d(x, y)$. Ježto tato nerovnost platí pro každé $b \in B$, dostáváme konečně $|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y)$.

(2) Nechť $d_A(B) = 0$ a nechť $a \in A$. Pak $d(a, B) \leq d_A(B)$ a tedy $d(a, B) = 0$. To znamená, že $a \in B$ a tedy $A \subset B$. Naopak, pokud $A \subset B$, platí zřejmě $d_A(B) = 0$.

(3) To plyne ihned z (1). ■

Věta 5 *Hausdorfova metrika na $H(X)$ je metrika.*

Důkaz : Musíme dokázat tři vlastnosti z definice metriky. Nechť $A, B, C \in H(X)$. Pak

$$\begin{aligned} d(A, B) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (d_A(B) = 0 = d_B(A)) \\ &\Leftrightarrow \quad (A \subset B \text{ a současně } B \subset A) \Leftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

Dále je zřejmé, že $d(A, B) = d(B, A)$. Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Nechť a, b, c jsou po řadě body z A, B, C. Pak platí $d(c, A) \leq d(c, a) \leq d(c, b) + d(b, a)$, a tedy pro všechna b, c z B, C platí

$$d(c, A) \leq d(c, b) + d(b, A) \leq d(c, b) + d_B(A).$$

Odtud plyne, že pro všechna $c \in C$ platí

$$d(c, A) \leq d(c, B) + d(A, B) \leq d_C(B) + d(A, B) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Odtud dostáváme, že $d_C(A) \leq d(A,B)+d(B,C)$. Podobně odvodíme nerovnost $d_A(C) \leq d(A,B)+d(B,C)$. Ale $d(A,C) = \max(d_A(C), d_C(A))$ a tudíž $d(A,C) \leq d(A,B)+d(B,C)$. Důkaz je hotov. ■

Příklad 6 *Nechť X je metrický prostor reálných čísel a nechť d je Hausdorfova metrika na $H(X)$. Pak $d([0,2],[1,5]) = 3$ a $d([2,4],[1.6]) = 2$.*

Od tohoto okamžiku se vzhledem k možnosti aplikace soustředíme jen na Eukleidovský prostor R^n (přestože většina úvah a výsledků, které následují, platí stejně dobře pro libovolný úplný metrický prostor). Jak víme, R^n tvoří (s obvykou Eukleidovskou metrikou) *úplný* metrický prostor. Jedním z hlavních výsledků, které teď dokážeme, bude to, že i $H(X)$ s Hausdorfovou metrikou je úplný metrický prostor.

Nejprve učiníme jednu konvenci.

Konvence 7 *Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost v $H(R^n)$. Pak označíme $\{x_n \in A_n\}$ posloupnost $\{x_n\}$ v R^n tak, že $x_n \in A_n$. Dále, pokud $A \in H(R^n)$ a číslo $\delta \in R$ je nezáporné, označíme symbolem $A+\delta$ či A_δ množinu definovanou takto:*

$$A+\delta = \{x \in R^n \mid d(x,A) \leq \delta\}.$$

Před dalšími dvěma pomocnými tvrzeními si uvědomíme, že $A \subset A+\delta$ pro každé $\delta \geq 0$ a že vzhledem ke kompaktnosti A lze použít alternativní vyjádření $A+\delta = \{x \in X \mid d(x,a) \leq \delta$ pro nějaké $a \in A\}$.

Tvrzení 8 *Pokud $A, B \in H(R^n)$ a pokud $\varepsilon > 0$, pak*

1. *$d_A(B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon$*
2. *$d(A,B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B+\varepsilon$ a také $B \subset A+\varepsilon$.*

Důkaz : Nechť $d_A(B) \leq \varepsilon$ a nechť $a \in A$. Pak platí

$$d(a,B) \leq \max_{x \in A} d(x,B) d_A(B) \leq \varepsilon.$$

Odtud máme $a \in B+\varepsilon$ a tedy $A \subset B+\varepsilon$. Druhá část tvrzení plyne ihned z právě dokázané první vlastnosti. ■

Před dalším tvrzením připomeňme, že posloupnost p_n v metrickém prostoru (M,d) se nazývá cauchyovská, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in N$ tak, že $\forall n,m \geq n_0$ platí $d(p_n,p_m) \leq \varepsilon$.

Tvrzení 9 *Nechť $\{A_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $H(R^n)$. Nechť $0 < n_1 < n_2 < \dots$ je nějaký výběr přirozených čísel. Pak každá cauchyovská posloupnost $\{x_{n_i} \in A_{n_i}\}$ bodů v R^n se dá doplnit na cauchyovskou posloupnost $\{x_n \in A_n\}$. Tato rozšířená posloupnost $\{x_n \in A_n\}$ konverguje v R^n k témuž bodu, ke kterému konverguje posloupnost $\{x_{n_i} \in A_{n_i}\}$.*

Důkaz : Nechť $n \in N$ je takové číslo, že $1 \leq n \leq n_1$. Pak podle Tvrzení ? lze psát $d(x_{n_1}, A_n) = d(x_{n_1}, x_n)$ pro nějaké $x_n \in A_n$. Pro $n = n_+$ vychází ovšem $x_n = x_{n_1}$ – pokud $d(x_{n_1}, y) = d(x_{n_1}, A_{n_1}) = 0$, pak $y = x_{n_1}$. Podobně postupujeme pro všechna $n \in N$ taková, že $n_1 < n \leq n_2$ – klademe $d(x_{n_2}, A_n) = d(x_{n_2}, x_n)$ atd. Tímto způsobem obdržíme celou posloupnost $\{x_n \in A_n\}$ a zbývá ukázat, že tato posloupnost je (stále) cauchyovská. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Ježto $\{x_{n_i}\}$ je cauchyovská v R^n a $\{A_n\}$ je cauchyovská v $H(R^n)$, lze najít čísla m_0, n_0 taková, že

$$d(A_r, A_s) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ pro každé } r \geq m_0, s \geq m_0$$

a také

$$d(x_{n_r}, x_{n_s}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ pro každé } r \geq n_0, s \geq n_0.$$

Nechť $m, n \geq m_0$. Pak pro nějaké $j \in N$ a $k \in N$ platí $n_{j-1} < m \leq n_j$, $n_{k-1} < n \leq n_k$. Pokud m, n zvolíme dost velké, zajistíme, aby $j \geq n_0, k \geq n_0$. Pak dostaneme

$$d(x_{n_j}, x_m) \leq d(x_{n_j}, A_m) \leq d(A_{n_j}, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

vidíme, že $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$ pro dostatečně velká $m, n \in N$. Tím je ukázáno, že $\{x_n\}$ je cauchyovská. Zbytek tvrzení je zřejmý. ■

Teď již dokážeme hlavní větu.

Věta 10 *(úplnost "fraktálového prostoru", úplnost Hausdorfovy metriky na hyperprostoru): Metrický prostor $H(R^n)$ je úplný v Hausdorfově metrice. Navíc platí, že pokud $\{A_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $H(R^n)$, pak $A_n \to A$ v $H(R^n)$, kde*

$$A = \{x \in R^n \mid x \text{ je limitou cauchyovské posloupnosti } \{x_n \in A_n\}\}.$$

Důkaz : Pro přehlednost provedeme důkaz v několika krocích.

1. Dokažme, že množina A definovaná ve Větě 10 *je neprázdná.* Za tím účelem stačí najít alespoň jednu cauchyovskou posloupnost $\{x_n \in A_n\}$. Jelikož R^n je úplný prostor, tato posloupnost bude mít limitu a tedy $A \neq \emptyset$. Předpokládáme, že $\{A_n\}$ je cauchyovská v $H(R^n)$. Z toho plyne, že pro nějaká $m_1 \in N$ platí, že kdykoliv $r \geq m_1, s \geq m_1$, pak $d(A_r, A_s) < \frac{1}{2}$. Postupujeme-li analogicky pro $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, atd., získáme posloupnost $0 < m_1 < m_2 < \ldots$ přirozených čísel takovou, že $d(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}$ pro $m, n \geq m_i$.

Nechť x_{m_1} je nějaký bod z A_{m_1}. Jelikož $d(A_{m_1}, A_{m_2}) < \frac{1}{2}$, lze najít bod $x_{m_2} \in A_{m_2}$ takový, že $d(x_{m_2}, x_{m_3}) \leq \frac{1}{4}$. Postupujeme-li analogicky dále, získáme posloupnost $\{x_{m_i} \in A_{m_i}\}$ takovou, že $d(x_{m_i}, x_{m_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$. Stačí ukázat, že tato posloupnost je cauchyovská, podle Tvrzení 9 ji lze rozšířit na celou (cauchyovskou) posloupnost $\{x_n \in A_n\}$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Jelikož řada $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ je konvergentní, dá se snadno ukázat (cvičení ze základního kurzu matematické analýzy!), že pro dost velké $n_\varepsilon \in N$ platí $\displaystyle\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Z toho plyne, že při $k, j \geq n_\varepsilon$ máme

$$\begin{aligned} d(x_{m_k}, x_{m_j}) &\leq d(x_{m_k}, x_{m_{k+1}}) + \cdots + d(x_{m_{j-1}}, x_{m_j}) < \\ &< \sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tudíž posloupnost $\{x_{m_i} \in A_{m_i}\}$ je cauchyovská. Po jejím rozšíření dostaneme cauchyovskou posloupnost $\{x_n \in A_n\}$, která konverguje (neboť R^n je úplný prostor). Jestliže $x_n \to a$, pak $a \in A$ a tudíž $A \neq \emptyset$.

2. *Množina A je uzavřená množina v R^n.* Je třeba ukázat, že A obsahuje všechny limitní body posloupnosti bodů z A. Nechť tedy $\{a_n\}$ je posloupnost taková, že $a_n \in A$ pro každé $n \in N$ a nechť $a_n \to a$. Vzhledem k definici množiny A je každý bod a_n limitou nějaké cauchyovské (a tedy konvergentní) posloupnosti $\{x_{n_i} \in A_i\}$. Naše situace je znázornitelná následujícím schematem:

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & & A \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & \to & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & \to & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & \to & a_3 \\ & & & & & \downarrow \\ & & & & & a \end{array}$$

Jelikož $a_n \to a$, můžeme najít podposloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ $(n_1 > 0)$ takovou, že $d(a, a_{n_i}) \leq \frac{1}{i}$. Jelikož $a_{n_i} \to a_n$, můžeme pro každé $n_i \in N$ najít $m_i \in N$ takové, že $d(a_{n_i}, a_{n_i m_i}) \leq \frac{1}{i}$. Užitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $d(a, a_{n_i m_i}) \leq \frac{2}{i}$. Předpokládejme, že množina $\{m_i \mid i \in N\}$ je nekonečná. Nechť pro pevné (ale libovolné) $m_i \in N$ je $n(i)$ *nejmenší* z těch indexů n_i, pro které platí $d(a, a_{n_i m_i}) \leq \frac{2}{i}$. Tento index ovšem existuje a i pro $n(i)$ platí $d(a, a_{n(i) m_i}) \leq \frac{2}{i}$.

Položme $b_{m_i} = a_{n(i) m_i}$ $(i \in N)$. Pokud je množina $\{m_i \mid i \in N\}$ konečná, pak $d(b_{m_k}, a) \leq \frac{2}{s}$ pro nekonečně mnoho hodnot $s \in N$ a tedy $d(y_{m_k}, a) = 0$, tj. $y_{m_k} = a$.

V obou případech máme posloupnost $b_{m_i} \in A_{m_i}$ takovou, že $b_{m_i} \to a$. Tuto posloupnost můžeme rozšířit do (cauchyovské) posloupnosti $\{b_n \in A_n\}$ a přitom ovšem $b_n \to a$. Podle definice množiny A dostáváme $a \in A$.

3. *Množina A je omezená v R^n.* Ukažme nejprve, že pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme najít $n_0 \in N$ takové, že $A \subset A_n + \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Jelikož $\{A_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $H(R^n)$, existuje $n_0 \in N$ tak, že $d(A_m, A_n) \leq \varepsilon$ pro každé $m, n \geq n_0$. Uvažujme $n \in N, n \geq n_0$ a vezměme $a \in A$. Ukažme, že $a \in A_n + \varepsilon$. Podle definice množiny A musí existovat cauchyovská posloupnost $\{a_n \in A_n\}$ taková, že $a_n \to a$. Podle Tvrzení 8 pak máme při $m \geq n_0$ inkluzi $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Ale $a_m \in A_m$. Vidíme, že $a_m \in A_n + \varepsilon$. Jelikož A_n je kompaktní v R^n, je tudíž omezená a uzavřená. Snadno se ukáže, že množina $A_n + \varepsilon$ je také omezená a uzavřená. Jelikož $a_m \to a$, dostáváme $a \in A_n + \varepsilon$. Tím jsme ukázali, že $A \subset A_n + \varepsilon$, což implikuje, že A je omezená.

4. *Platí: $A_n \to A$ v Hausdorfově metrice $H(R^n)$.* Již jsme ukázali, že A je neprázdná a kompaktní. Tudíž $A \in H(R^n)$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Víme, že $d(A, A_n) \leq \varepsilon$ platí právě tehdy, pokud $A \subset A_n + \varepsilon$ a současně $A_n \subset A + \varepsilon$ (Tvrzení 8). První inkluzi jsme (pro dost velká $n \in N$) právě ukázali. Musíme ověřit tu druhou, tj. $A_n \subset A + \varepsilon$ pro dost velká $n \in N$. Ježto $\{A_n\}$ je cauchyovská v $H(R^n)$, lze najít $n_0 \in N$ tak, že pokud $m, n \geq n_0$, pak $d(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Odtud dostáváme $A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$ $(m, n \geq n_0)$. Nechť $n \in N$ je takové číslo, že $n \geq n_0$ a nechť $b \in A_n$. Je třeba ukázat, že $b \in A + \varepsilon$. Jelikož $\{A_n\}$ je cauchyovská, lze najít čísla $n_i \in N$ taková, že $n < n_1 < n_2 < \dots$ a pro každé $s \in N$ platí $A_m \subset A_k + \dfrac{\varepsilon}{2^{s+1}}$ $(m, k \geq n_s)$.

Nyní opět uplatníme standardní trik s konvergentní řadou. Jelikož n, $n_1 \geq n_0$, máme $A_{n_1} \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$. Ale $b \in A_n$ a tedy existuje $a_{n_+} \in A_{n_1}$ s vlastností $d(b, a_{n_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Teď využijeme vztah $A_m \subset A_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{s+1}}$ a nahlédneme, že pro $s = 1, m = n_1, k = n_2$ lze najít $a_{n_2} \in A_{n_2}$ s vlastností $(d(a_{n_1}, a_{n_2})) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$ (využili jsme toho, že $a_{n_1} \in A_{n_1}$). Dále postupujeme indukcí – analogická argumentace dává $a_{n_3} \in A_{n_3}$ s vlastností $d(a_{n_2}, a_{n_3}) \leq \frac{\varepsilon}{2^3}$, atd. Užitím trojúhelníkové nerovnosti máme

$$d(b, a_{n_s}) \leq \varepsilon(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^s}) < \varepsilon.$$

Podobně odvodíme, že $d(a_{n_i}, a_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$ při $n_j \geq n_i$. Tudíž $\{a_{n_i}\}$ je cauchyovská posloupnost v R^n a tedy konverguje k nějakému bodu $a \in R^n$. Zřejmě $d(b, a) \leq \varepsilon$, a tedy $b \in A + \varepsilon$. Jelikož b byl libovolně vybraný prvek z A_n, vidíme, že $A_n \subset A + \varepsilon$. Tím je důkaz Věty 10 ukončen. ■

Poznámka: Ukázali jsme, že $H(R^n)$ je úplný prostor. Vzhledem k inženýrským aplikacím jsme se omezili na R^n. Tato věta platí zcela obecně – $H(X)$ je úplný metrický prostor pokud X je úplný metrický prostor. Důkaz probíhý přesně tak, jak jsme ho prováděli pro R^n, jen v jednom bodě musíme být pozorní – obecně totiž neplatí, že je-li A množina totálně omezená v metrickém prostoru, pak i $A+\varepsilon$ je totálně omezená. Je-li však množina aproximovatelná "až na libovolné ε" množinami kompaktními,musí být totálně omezená (tento bod jedině vyžaduje trochu komplikovanější důkaz, lišící se od důkazu pro R^n). Takto i v obecném případě dokážeme, že A je uzavřená (stejný důkaz jako pro R^n) a totálně omezená i obecně a tedy musí být kompaktní. Důsledek: Je-li X Banachův prostor, pak $H(X)$ je úplný metrický prostor.

Ještě je namístě poznamenat, že místo $H(X)$ můžeme vzít množinu $K(K)$ všech uzavřených podmnožin X s konečným diametrem. Lze pak rovněž zavést Hausdorfovu metriku v $K(X)$, i když "vzdálenosti" množin se pak obecně nebudou realizovat v bodech. Prostor $K(X)$ bude nicméně opět úplný metrický prostor (ovšem $H(R^n) = K(R^n)$).

Poté co jsme dokázali, že hyperprostor $H(R^n)$ je úplný, můžeme provést konstrukci fraktálu jakožto pevného bodu jistého zobrazení. Toto zobrazení se nazývá *kolážové*. Připomeňme si obecnou definici kolážového zobrazení.

Definice: Nechť X je úplný metrický prostor a nechť $H(X)$ je prostor kompaktních podprostorů v X opatřený Hausdorfovou metrikou. Nechť $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ jsou spojitá zobrazení z X do X. Definujme $\psi\colon H(X) \to H(X)$ takto:

$$\psi(A) = \psi_1(A) \cup \psi_2(A) \cup \cdots \cup \psi_m(A).$$

Toto zobrazení ψ se nazývá kolážové zobrazení určené zobrazeními $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$.

Všimněme si, že ψ je korektně definované (spojitý obraz kompaktu je kompakt a konečné sjednocení kompaktů je kompakt!). Důležité pozorování přináší následující tvrzení: Kolážové zobrazení určené kontrakcemi je zase kontrakce. I když toto tvrzení platí obecně, vyslovme jej jen pro R^n, neboť jen v R^n plánujeme jeho aplikaci.

Tvrzení: Nechť $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ jsou kontraktivní zobrazení s koeficienty kontrakce $r_1, r_2, \dots, r_m (r_i < 1$ pro každé i, $i \leq m)$. Pak příslušné kolážové zobrazení určené $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ je kontraktivní zobrazení z $H(R^n)$ do $H(R^n)$, jehož koeficient kontrakce je roven číslu $\max(r_1, r_2, \dots, r_m)$.
Důkaz: Nejprve učiňme pozorování, které vyslovíme jako lemma vzhledem k jeho samostatnému významu.

Lemma: Nechť $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \in H(R^n)$ a nechť $A = A_1 \cup A_1$, $B = B_1 \cup B_2$. Pak

$$d(A,B) \leq \max(d(A_1, B_1), d(A_2, B_2)).$$

Důkaz lemmatu: Vezměme $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$. Pak dostáváme nerovnosti

$$d(b_1, A) = \min_{a \in A} d(b, a) \leq \min_{a \in A}(d(b_1, a) d(b_1, A_1))$$

a tudíž $d_{B_1}(A) \leq d_{B_1}(A_1)$. Dále vidíme, že

$$\begin{aligned} d_B(A) &= \max_{b \in B} d(b, A) = \max(d_{B_1}(A), d_{B_2}(A)) \\ &= \max(d_{B_1}(A_1), d_{B_2}(A_2)). \end{aligned}$$

Podobně odvodíme $d_A(B) \leq \max(d_{A_1}(B_1), d_{A_2}(B_2))$. Požadovaná nerovnost pak ihned plyne z definice $d(A, B)$.

Nyní se vraťme k důkazu našeho tvrzení. Dokažme ho pro $m = 2$ (obecně se důkaz vede analogicky). Vezměme dvě obecné množiny $K, L \in H(R^n)$ a použijme předchozí lemma na množiny $A = \psi_1(K) \cup \psi_2(K)$, $B = \psi_1(L) \cup \psi_2(L)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} d(\psi(K), \psi(L)) &\leq \max(d(\psi_1(K), \psi_1(L)), d(\psi_2(K), \psi_2(L)) \\ &\leq \max(r_1 d(K, L), r_2 d(K, L)) \\ &\leq \max(r_1, r_2) \cdot d(K, L). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden.

Nyní můžeme vyslovit hlavní větu tohoto paragrafu.

Věta (existence a jednoznačnost fraktálu): Nechť $P \in H(R^n)$, tj. nechť P je neprázdná omezená a uzavřená množina v R^n. Nechť $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ jsou kontraktivní zobrazení v R^n, jejichž koeficienty kontrakce jsou po řadě čísla $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Nechť $\psi\colon H(R^n) \to H(R^n)$ je kolážové zobrazení určené zobrazeními $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, tj. nechť $\psi(A) = \psi_1(A) \cup \psi_2(A) \cup \cdots \cup \psi_m(A)$ pro každé $A \in H(R^n)$. Pak ψ je kontraktivní zobrazení na $H(R^n)$, jehož koeficient kontrakce r je roven $\max(r_1, r_2, \ldots, r_m)$. Dále platí, že pokud $P \in H(R^n)$, pak posloupnost množin $\{\psi^k(P)\}$ má v $H(R^n)$ limitu $Q \in H(R^n)$ a tato limita Q *nezávisí* na výběru iniciální množiny P. Konečně, Q je *jediný* prvek z $H(R^n)$, pro který platí $\psi(Q) = Q$.

Důkaz: Zobrazení $\psi\colon H(R^n) \to H(R^n)$ je kontraktivní zobrazení na úplném metrickém prostoru. Můžeme tedy na ψ aplikovat větu o pevném bodě. Z ní plyne, že $\psi^k(P) \to Q$, že $Q \in H(R^n)$ je pevný bod ψ (tj. $\psi(Q) = Q$) a že tento pevný bod nezávisí na startovací množině.

Pevný bod kolážového zobrazení $\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \cdots \cup \psi_n$ nazveme *fraktálem* určeným zobrazeními $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$. Uveďme nejdůležitější příklady fraktálů.

Příklad 1 (Cantorovo diskontinuum): Nechť $\psi_1, \psi_2\colon R^1 \to R^1$ jsou (kontraktivní) zobrazení definovaná takto: $\psi_1(x) = \frac{1}{3}x, \psi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Pak fraktál příslušný ke kolážovému zobrazení $\psi = \psi_1 \cup \psi_2$ je známé Cantorovo diskontinuum. (Všimněme si, že při $P = \langle 0, 1 \rangle$ bude "akce" iterací tohoto kolážového zobrazení přesně "vyjímání" intervalů, známých z klasické konstrukce Cantorova diskontinua, viz obrázek dole).

Příklad 2 (Sierpińského koberec): Nechť $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \colon R^2 \to R^2$ jsou (kontraktivní) zobrazení definovaná takto:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}, 0), \quad \psi_3(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot (1, \sqrt{3}).$$

Pak fraktál příslušný k $\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \psi_3$ je známý Sierpińského koberec ("Sierpiński gasket"). (Všimněme si, že při P vzatém jako rovnostranný trojúhelník v R^n s počátkem v levém dolním rohu bude "akce" iterací tohoto kolážového zobrazení přesně "vyjímání" menších rovnostranných trojúhelníků známé z klasické konstrukce Sierpińského koberce, viz obrázek dole).

Příklad 3 (Kochova křivka, sněhové vločky, kapradí, atd.):

(Více o fraktálech lze najít v knize ??????????? Mathematics for Computer, Graphics, matematicky hlubší pojednání o hyperprostorech lze nalézt v knize ?????? Hyperspaces of closed and convex subspaces)

3 Topologický prostor.

Při studiu některých otázek (např. i v oblasti image processing) je vhodné uvažovat struktury ještě obecnější než metrický prostor. Axiomatizuje se buď

"soustava všech otevřených množin" či "soustava všech okolí všech bodů" či třeba "operace uzavírání množin". Hovoříme pak o topologickém prostoru.
Definice (topologický prostor v řeči otevřených množin):

Nechť X je (nosná) množina a nechť τ je soubor podmnožin množiny X (tj. $\tau \subset \exp X$; $\exp X$ značí množinu všech podmnožin množiny X). Pak dvojice (X, τ) se nazývá topologický prostor, jestliže platí:

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$ (uzavřenost na tvoření konečných průniků)

(iii) $A_i \in \tau \quad (i \in I) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ (uzavřenost na tvoření všech (i nekonečných) sjednocení; I obecná indexová množina, nemusí být uspořádaná, může mít libovolnou mohutnost)

Topologický prostor v řeči okolí bodů: Je to dvojice $(X, \bar{\tau})$, kde X je množina a $\bar{\tau}\colon X \to \exp(\exp X)$, $\bar{\tau}\colon x \to \bar{\tau}(x) \subset \exp X$ ($\exp X$ značí jako vždy množinu všech podmnožin množiny X) a přitom platí

(i) $A \in \overline{\tau}(x) \Rightarrow x \in A$

(ii) $A \in \overline{\tau}(x), B \supset A \Rightarrow B \in \bar{\tau}(x)$

(iii) $A, B \in \overline{\tau}(x) \Rightarrow A \cap B \in \bar{\tau}(x)$

(iv) $A \in \bar{\tau}(x) \Rightarrow \exists B \in \bar{\tau}(x)$ tak, že $\forall y \in B$ platí $A \in \bar{\tau}(y)$.

Tato definice vychází z abstrakce vlastností množiny okolí bodů v topologickém prostoru. Vlastnost (iv) je důležitá a zajišťuje (zhruba řečeno) to, aby pro jakoukoliv množinu platilo, že uzávěr jejího uzávěru zůstal uzavíráním nezměněn (viz podmínka (iv) v následující definici).

Tyto dvě předcházející definice jsou jak lze ukázat (kategoriálně) ekvivalentní. Existuje spousta dalších možných definic topologického prostoru.

Definice topologického prostoru v řeči uzávěrového operátoru (klasická Hausdorffova definice topologie): Topologický prostor je dvojice $(X, ^{-})$, kde X je množina a $^{-}\colon \exp X \to \exp X$ je zobrazení takové, že

(i) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

(ii) $P \subset \overline{P} \qquad \forall P, P \subset X$

(iii) $\overline{P \cup S} = \overline{P} \cup \overline{S} \qquad \forall P, S \subset X$

(iv) $\overline{\overline{P}} = \overline{P} \qquad \forall P \subset X$ (idempotence – uzávěr uzavřené množiny je už ona množina sama).

Předchozí definice topologického prostoru jsou ekvivalentní: Např. $(X, \tau) \rightsquigarrow (X, \bar{\tau}), \quad x \to \bar{\tau}(x)$ tak, že $\bar{\tau}(x) = \{A \in \tau | x \in A\}$, tj. přiřadíme bodu jako jeho okolí všechny nadmnožiny otevřených množin, jež ten bod obsahují. Ekvivalence všech definic se vždy ověří zcela přirozeně. Naznačíme ještě např. cestu od "definice otevřenými množinami" k "uzávěrové definici":

Pro $(X, \tau) \rightsquigarrow (X, ^{-})$ položíme $\overline{P} = \{x \in X \mid \forall A \in \tau, x \in A, A \cap P \neq \emptyset\}$.

Pro přesný popis "ekvivalence definic" můžeme nejlépe použít kategoriálního jazyka. Morfizmy mezi topologickými prostory ("spojitá zobrazení") definujeme pak takto:

a) *Spojitá zobrazení v řeči otevřených množin*: Zobrazení

$$f(X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

je spojité, jestliže $f\colon X_1 \to X_2$ a jestliže $\forall P \in \tau_2$ ("P otevřené v τ_2") platí, že $f^{-1}(P) \in \tau_1$ (tj. $f(P)$ "otevřené" v τ_1. Jinými slovy, požadujeme, aby vzory otevřených byly otevřené).

b) *Spojitá zobrazení v řeči okolí*: Zobrazení

$$f(X_1, \bar{\tau_1}) \to (X_2, \bar{\tau_2})$$

je spojité, jestliže $f\colon X_1 \to X_2$ a jestliže $\forall x \in X_1, \forall A \in \bar{\tau_2}(f(x))$ platí, že $f^{-1}(A) \in \bar{\tau_1}(x)$. Tj. vzory okolí jsou okolí. (Na přímce je toto známá ε, δ definice pro spojitá zobrazení.)

c) *Spojitá zobrazení v řeči uzávěrového operátoru*: Zobrazení

$$f(X_1, ^{-_1}) \to (X_2, ^{-_2})$$

je spojité, jestliže $f\colon X_1 \to X_2$ a jestliže $\forall P \subset X_1$ platí, že $f(\overline{P}^1) \subset \overline{f(P)}^2$ (obraz uzávěru vzoru je podmnožina uzávěru obrazu).

Závěr: Tyto 3 topologické kategorie jsou ekvivalentní ("stejné"), vyjadřují "stejné" struktury, mají "stejné" morfizmy (z pohledu topologie víc nepotřebujeme a můžeme volně přecházet od jedné definice k druhé). Přesné formulace výše naznačených úvah a příslušné důkazy lze najít v článku W. Kropatsch, P Pták (příloha).

(Ještě poznámka k ekvivalenci definic přes otevřené množiny a přes okolí: Je-li $x \in V, V$ okolí x, pak $X - \overline{(X - V)}$ je otevřená množina. (Rovněž si všimněme, že uzávěr je množina sama + všechny body, jejichž každé okolí má s tou množinou $\neq \emptyset$ průnik.)

Uveďme některé důležité topologické pojmy (zvolme např. jazyk otevřených množin, vše lze ovšem formulovat i v jiném topologickém jazyce): Nechť (X, τ) je topologický prostor (τ systém otevřených množin).

Řekneme, že

A je uzavřená ($A \subset X$)	$\iff$	$X - A \in \tau$ ($X - A$ je otevřená)
$\overline{A}$ uzávěr	$\iff$	$\bar{A} = \bigcap B_\alpha, B_\alpha \supset A, B_\alpha$ uzavřená
A^0 vnitřek	$\iff$	$A^0 = \bigcup C_\alpha,\ C_\alpha \subset A,\ C_\alpha$ otevřená
V okolí x	$\iff$	$\exists C,\ x \in C,\ C$ otevřená, $C \subset V$
(X, τ) se nazývá Hausdorfův (také se v literatuře nazývá T_2 prostor)	$\iff$	($x \neq y \Rightarrow \exists C, D$ otevřené tak, že $x \in C,\ y \in D$).

(Dodejme, že pojem Hausdorfův prostor nemá ovšem nic společného s Hausdorfovými axiomy topologie. Felix Hausdorf je zodpovědný za mnoho objevů v matematice.)

Příklady topologických prostorů:

1. Každý metrický prostor lze chápat jako topologický prostor (ovšemže ne naopak). Je-li (M, d) metrický prostor, pak příslušný topologický prostor (M, τ) má (v řeči okolí bodů) za okolí bodů všechny nadmnožiny otevřených okolí (tj. pro $x \in M$ je O okolí bodu x právě když $O_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset O$ pro nějaká $\varepsilon > 0$).

2. Příklad nemetrizovatelného topologického prostoru:

Nechť $X, \operatorname{card} X > \aleph_0$ (tj. nechť X je nespočetná, např. $X = R$), $x_0 \in X$. Všechny body až na x_0 budou diskrétní (tj. pro okolí platí $O_x = \{x\}, x \neq x_0$), bod x_0 má za okolí kokonečné množiny v X (tj. doplňky konečných množin, je jich ovšem hodně).

Pak (X, τ), kde τ je právě definovaná topologie na X, je nemetrizovatelný topologický prostor. (Důvod: Bod x_0 nemá spočetnou bázi okolí, v každém metrickém prostoru je každé okolí bodu x nadmnožinou $O_{\frac{1}{n}}(x)$. Lze zkonstruovat i nemetrizovatelné prostory bližší metrickým prostorům, viz např. E. Čech: Topological Spaces.)

3. Marcus – Wyse topologie (Amer. Math. Monthly 1973) – topologie často používaná v image processing: Nechť $Z^2 = \{(m, n) \mid m, n \in Z\}$ a nechť (Z, τ) je následující topologie:

   Pokud $m + n$ je liché číslo, pak okolí bodu (m, n) jsou všechny nadmnožiny množiny $\{(m, n), (m+1, n), (m-1, n), (m, n+1), (m, n-1)\}$ – tzv. 4-okolí.

   Pokud $m + n$ je sudé, pak bod (m, n) je okolím a tedy všechny nadmnožiny (m, n) jsou jeho okolím (tj. bod (m, n) je diskrétní). Snadno se zjistí, že takto dostaneme topologii. Dá se dále ukázat, že tato topologie dává na všech podmnožinách (topologickou) souvislost stejnou s grafovou 4–cik–cak souvislostí (podrobněji W. Kropatsch, P. Pták, ibid.; je zajímavé si všimnout, že podobný výsledek pro 6–cik–cak či 8–cik–cak okolí neplatí).

Každý metrický prostor je možno chápat jako prostor topologický, ale "metrická" kompaktnost nevystihuje dobře tento pojem v obecnosti. To se daří až užitím následující definice. Zde jsme – řečeno mimochodem – svědky toho, jak i volba správné definice může být velkým objevem.

Definice (kompaktnost v topologických prostorech): Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak K je *kompaktní* $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ každé otevřené pokrytí množiny X má *konečné* podpokrytí (tj. je-li $X = \bigcup D_\alpha$ $(\alpha \in I)$ a každé D_α otevřené $\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tak, že $X = \bigcup_{i=1}^{n} D_{\alpha_i}$).

Následující věta je důležitý nástroj obecné topologie. Důkazová technika je užitečné cvičení s metrickými prostory.

Věta (Lebesgue): "Kompaktní" podle metrické definice je v metrickém prostoru totéž jako kompaktní podle výše uvedené obecné topologické definice.

Důkaz: Nejprve ukážeme, že pro metrické prostory "topologická kompaktnost" implikuje "metrickou kompaktnost". Mějme tedy metrický prostor (M,d) a posloupnost x_n $(n \in N)$ v něm. Máme ukázat, že x_n má konvergentní podposloupnost (předpokládáme, že z každého otevřeného pokrytí prostoru M lze vybrat pokrytí konečné). Víme, že z x_n lze vybrat buď posloupnost cauchyovskou nebo metricky diskrétní (posloupnostní princip pro metrické prostory). Ale metricky diskrétní vybrat nelze (neboť kdyby takovou bylo možno najít – označme ji x_{n_k} a nechť x_{n_k} je metricky diskrétní řádu ε – pak by samozřejmě otevřené pokrytí $\{M - x_{n_k} \mid k \in N\} \cup \{O_\varepsilon(x_{n_k}) \mid k \in N\}$ nemělo konečné podpokrytí). Můžeme tedy vybrat posloupnost cauchyovskou. Označme ji kvůli jednoduchosti zase x_n. Předpokládejme, že x_n k ničemu v M nekonverguje. Pak $\{x_n\}$ je uzavřená množina (každý případný bod z uzávěru množiny $\{x_n\}$ by totiž byl limitním bodem). Jelikož každý z bodů x_n $(n \in N)$ ovšem také není bodem limitním, máme pro každé x_n otevřené okolí O_{x_n} bodu x_n takové, že množina bodů z množiny $\{x_n\}$, která leží mimo O_{x_n} je nekonečná. Odtud je ihned vidět, že můžeme snadno zkonstruovat otevřené pokrytí $\{O_n \mid n \in N\}$ množiny $\{x_n \mid n \in N\}$ tak, že žádná konečná soustava vybraná z $\{O_n \mid n \in N\}$ celé $\{x_n \mid n \in N\}$ nepokrývá. Vezmeme-li tedy otevřené pokrytí $\{O_n \mid n \in N\} \cup (M - \{x_n \mid n \in N\})$ prostoru M, nelze z něj vybrat pokrytí konečné.

Nechť naopak M je "metricky kompaktní" (někdy se tomu také říká posloupnostně kompaktní (= sequentialy compact). Ukážeme, že M je "topologicky kompaktní". Nechť $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ je otevřené pokrytí prostoru M. Nejprve dokážeme důležitou vlastnost o tzv. Lebesgueově čísle: Pro $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ existuje (Lebesgueovo) číslo ε, $\varepsilon > 0$ takové, že pro každý bod $x \in M$ lze ε-okolí bodu x "vnořit" do nějakého U_α (tj. množina $\{y \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ je podmnožina nějaké množiny U_α). Předpokládejme, že to tak není. Pak pro každé $n \in N$ lze najít bod $x_n \in M$ takový, že $\frac{1}{n}$-okolí bodu x_n se nedá vnořit do žádného U_α. Pokud M je "metricky kompaktní", posloupnost x_n musí mít konvergentní podposloupnost, $x_{n_k} \to x$ $(x \in M)$. Pak ale existuje (otevřené) U_α tak, že $x \in U_\alpha$ (U_α je otevřené pokrytí) a tedy body x_{n_k}, které jsou "dost blízko" bodu x musí také (i se svým "dost malým" okolím) ležet v U_α. To je spor.

Dokončeme důkaz. Nechť $U_\alpha \mid \alpha \in I$ je otevřené pokrytí prostoru M. Nechť $\varepsilon > 0$ je (nějaké) jeho Lebesgueovo číslo. Jelikož M je metricky kompaktní, je i totálně omezený (jeden z našich předchozích výsledků).

Nechť $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ je maximální $\frac{\varepsilon}{4}$-síť v M (tj. $d(a_i, a_j) \geq \frac{\varepsilon}{4}$ při $i \neq j$ a každý bod z M je od nějakého a_i ($i \leq k$) vzdálen ne víc, než $\frac{\varepsilon}{4}$; toto tvrzení dokážeme v plné obecnosti později – viz příklady za axiomem výběru). Pak ale soustava okolí $\{O_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i) \mid i \leq k\}$ je pokrytí prostoru M a přitom každé $O_{\frac{\varepsilon}{2}}(a_i)$ je podmnožinou nějakého U_{α_i}. Pak $\{U_{\alpha_i} \mid i \geq k\}$ je konečné podpokrytí vybrané z $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Důkaz je ukončen.

Uveďme ještě některé základní konstrukce s topologickými prostory.

Topologický podprostor (tj. podprostor topologického prostoru). Nechť (X, τ) je topologický prostor, $S \subset X$. Učiňme z S topologický prostor (S, τ') tak, že položíme $\tau' = S \cap \tau$ (tj. do τ' dáme všechny množiny, které vzniknou jako "stopa" otevřených množin $A \in \tau$: A je otevřená, pak $A \cap S$ je stopa A na S). Snadno se ukáže, že pak (S, τ') je sám o sobě topologickým prostorem. Pokud hovoříme o podmnožině topologického prostoru, chápeme ji automaticky s topologickou strukturou podprostoru. Např. výrok "$\langle 0, 1\rangle$ je kompaktní podprostor v R" znamená, že $\langle 0, 1\rangle$ je kompaktní topologický prostor chápaný s topologií "zděděnou" (podprostorovou) z R.

Součin topologických prostorů: Nechť (X_α, τ_α) jsou topologické prostory. Na kartézském součinu $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ definujme topologii takto (specifikujme ji tentokrát v řeči okolí bodů $x \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$, neboť je to nejpraktičtější): Jestliže $x = (x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$, pak U je okolí bodu x v součinové topologii $\bar{\tau}$ pokud

$$U \supset \bigcap_{i \leq n} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}), \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I \text{ je konečná množina}$$

a kde

$$p_{\alpha_i} : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_{\alpha_i}$$

je příslušná projekce, U_{α_i} je nějaké okolí x_{α_i} v $(X_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i})$. Dá se snadno ukázat, že $(\prod_{\alpha \in I}, X_\alpha, \bar{\tau})$ je topologický prostor (dán v řeči okolí). Tento topologický prostor se nazývá topologický součin prostorů X_α ($\alpha \in I$).

Konvergence v topologickém prostoru: Definujeme $x_n \to x$ (x_n *konverguje* k x) v topologickém prostoru $\iff$ $\forall$ okolí bodu x obsahuje "skoro všechna" (tj. všechna až na konečně mnoho) x_n. V topologickém prostoru ovšem znalost všech konvergentních posloupností často nestačí na plné určení topologie (musíme uvažovat tzv. usměrněné sítě – viz např. J. Kelly: Topological Spaces).

Topologický prostor X je souvislý $\stackrel{\text{def.}}{\equiv}$ nelze zapsat jako disjunktní sjednocení dvou otevřených množin v X (resp. dvou uzavřených v X). Příklady:

Prostor R reálných čísel je souvislý, prostor Q racionálních čísel není souvislý ($Q = \{x | x < \sqrt{2}\} \cup \{x \mid x > \sqrt{2}\}$). Vezmeme-li např. $X = A \cup B$ (v R), kde $A = (-\infty, -1\rangle$, $B = \langle 0, +\infty)$, pak X je uzavřený podprostor R, který není souvislý (A, B jsou "clopen" v X).

Přehled:

Topologické prostory $\supset$ metrické prostory $\supset$ normované prostory $\supset$ prostory se skalárním součinem.

Úplné metrické prostory $\supset$ Banachovy prostory $\supset$ Hilbertovy prostory

(Uvědomme si, že *úplnost není topologický pojem* – nedá se v topologických prostorech definovat. Příklad: Topologický prostor R reálných čísel je homeomorfní s otevřeným intervalem $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (použij zobrazení arctg : $R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ale R je úplný jakožto metrický prostor, kdežto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ není.)

4 Uspořádání na množině (svazy, úplné svazy, Booleovy algebry)

Tato kapitolka přináší úvod do teorie uspořádaných množin.

Definice: Nechť M je množina ($M \neq \emptyset$). Částečné uspořádání (zn. $\leq$) je binární relace, která je *reflexivní, antisymetrická* a *tranzitivní.*

REFL: $a \leq a \qquad \forall a \in M$,

ANTISYM: $a \leq b, b \leq a \;\Rightarrow\; a = b$

TRANS: $a \leq b, b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$

Částečné uspořádání $\leq$ se nazývá *lineární* (resp. *řetězec*), pokud jsou každé dva prvky $a, b \in M$ v uspořádání $\leq$ srovnatelné (tj. $\forall a, b \in M$ buď $a \leq b$ nebo $b \leq a$).

Částečné uspořádání $\leq$ na M se nazývá *dobré*, pokud je lineární a každá neprázdná podmnožina má (v sobě při uspořádání zděděném z M!) nejmenší prvek.

Dvojice $(M, \leq)$, kde M je neprázdná množina a $\leq$ je částečné uspořádání se nazývá částečně uspořádaná množina (zkráceně Čum).

Příklady:

(i) $(R, \leq)$, kde $\leq$ je obvyklé uspořádání na reálných číslech, je Čum lineární uspořádání, není dobré (např. $(0, 1)$ nemá v sobě nejmenší prvek)

(ii) $(R^n, \leq)$, kde $\leq$ je uspořádání "po složkách" – je Čum, není lineární

(iii) M nechť je podmnožinou $\exp X$; vezmeme-li na M uspořádání $\leq$ dané inkluzí ($A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$), vznikne částečně uspořádaná množina, není lineární

(iv) $(N, \leq)$, kde N je množina přirozených čísel, $\leq$ obvyklé uspořádání "menší nebo rovno", je Čum, $\leq$ je dobré uspořádání.

Každá podmnožina částečně uspořádané množiny je (s příslušnou zděděnou relací) také částečně uspořádaná množina. Kartézský součin Čum'ů je Čum při uspořádání "po složkách".

Definice: Buďte $(M, \leq), (K, \prec)$ Čum'y. Zobrazení

$$\varphi\colon (M, \leq) \to (K, \preceq) \text{ se nazývá } \textit{izotonní} \overset{\text{def.}}{\equiv} (a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \preceq \varphi(b)).$$

φ je *izomorfizmus* $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ takové *prosté* zobrazení *na* K tak, že zobrazení φ i φ^{-1} jsou izotonní

φ je *vnoření*, pokud $\varphi\colon M \to K$ prosté a $\varphi\colon M \to \varphi(M)$ izomorfizmus.

Pozorování: Každou Čum $(M, \leq)$ lze izotonně vnořit do Čum všech podmnožin množiny M, tj. existuje vnoření $(M, \leq) \to (\exp M, \subset)$. Tedy Čum typu $(\exp M, \subset)$ je v jistém smyslu universální.

Důkaz: $a \to \varphi(a) = \{x \in M \mid x \leq a\}$

Podmínky minimality pro Čum (duálně: podmínky maximality)

Definice: Nechť $(M, \leq)$ je Čum. Pak $a \in M$ nazveme minimální $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ v M neexistuje x tak, že $x < a$ (duálně: $a \in M$ maximální).

Uvědomme si rozdíl mezi minimální a nejmenší (nejmenší je takový prvek $a \in M$, že $x \geq a \ \forall x \in M$). Nejmenší prvek je porovnatelný se všemi x; minimálních prvků může být víc.

Příklad: R - reálná čísla s obvyklým uspořádáním. R ovšem nemá minimální prvek. Další příklad: vezměme v $(\exp R, \subset)$ podmnožinu kokonečných (kokonečná $\equiv$ doplněk konečné) množin uspořádanou $\subset$, tato nemá minimální prvek v M.

Důležitá otázka v teorii uspořádaných množin byl problém dobrého uspořádání. Ukázalo se, že tento problém nutně vede k použití tzv. axiomu výběru (tj. každou množinu lze dobře uspořádat $\Leftrightarrow$ přijmeme axiom výběru). Shrňme několik ekvivalentních vyjádření.

Věta: Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) *Axiom výběru:* Pro každou množinu M existuje funkce $\varphi\colon (\exp M - \{\emptyset\}) \to M$ (φ vybírá prvek z každé neprázdné podmnožiny množiny M).

(ii) *Zernelova věta:* Každou množinu lze dobře uspořádat (tj. pro každou množinu M existuje uspořádání $\leq$ s tou vlastností, že každá podmnožina má nejmenší prvek v sobě).

(iii) *Hausdorfova věta:* Každý řetězec (tj. každá lineárně uspořádaná množina) v částečně uspořádané množině je obsažen v nějakém maximálním řetězci (maximální $\equiv$ nelze již dále zvětšit).

(iv) *Kuratowského – Zornova věta* (populární *"Zornovo lemma"*): Je-li každý řetězec v částečně uspořádané množině M shora omezený, je každý prvek v M "obsažen" (tj. je $\leq$ než) v některém maximálním prvku (tj. pokud R je řetězec v M a pokud $\exists a \in M, a \geq r \ \forall r \in R \Rightarrow \forall b \in M$ existuje maximální prvek v M, nějaké $c \in M$, tak že $b \leq c$).

Předchozí tvrzení (která jsou ovšem ekvivalentní axiomu výběru) mají bohatou aplikaci i v jiných oborech matematiky než jen v teorii množin a uspořádání.

Příklad: Každý lineární (= vektorový) prostor L má bázi. (Bázi chápeme v obvyklém smyslu známém z lineárních prostorů.)

Důkaz: Náš Čum tady bude podmnožina $(\exp L, \subset)$, jejíž prvky jsou soustavy lineárně nezávislých vektorů. Podle Zornova lemma tato množina má max. prvek. Skutečně, je-li $\mathscr{S}_\alpha, \alpha \in I$, řetězec v mém Čum (tj. každá $\mathscr{S}_\alpha$ je lineárně nezávislá a tyto soustavy jsou inkluzí "lineárně" uspořádané – slovo lineárně je zde trochu přetíženo), pak sjednocení $\bigcup \mathscr{S}_\alpha$ je lineárně nezávislá soustava vektorů a tedy patří do mého Čum. Max. prvek (= max. lin. nezáv. soustava vektorů) už musí být báze (dokaž!). (Přidáním jednoho vektoru by se ztratila lineární nezávislost; sjednocením LN vznikne LN. Úvahy platí i pro nekonečnou dimenzi, jelikož M je $LN \iff$ každá konečná podmnožina M je LN; ježto pak tato nekonečná množina patří do zkoumaného řetězce (je LN), platí podle Zornova lemmatu, že je to báze. Podrobněji je tato úloha rozebrána ve skriptu P. Pták, Introduction to Linear Algebra.)

Příklad: Nechť (P, d) je metrický prostor. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pak v M existuje maximální metricky diskrétní podmnožina řádu ε (tj. existuje soustava bodů tak, že každé dva mají vzdálenost $\geq \varepsilon$ a navíc taková, že po přidání jakéhokoli bodu už ta množina *není* metricky diskrétní řádu ε; tato soustava se nazývá někdy *maximální ε-síť*).
Důkaz: Cvičení na Zornovo Lemma. (Budeme uvažovat metricky diskrétní soustavy řádu ε, uspořádáme je inkluzí, ověříme Zornovo lemma a vezmeme maximální element.)

Definice (Svaz): Částečně uspořádaná množina $(M, \leq)$ se nazývá *svaz* (lattice), jestliže každá dvojice prvků $a, b \in M$ má (v M) supremum a infimum (vzhledem k $\leq$). Připomeňme, že $c = a \wedge b$ je *infimum* $\overset{\text{def}}{\equiv} c \leq a, c \leq b$ a navíc platí:

Pokud $c' \leq a, c' \leq b$, pak $c' \leq c$. (Infimum je největší dolní závora.)

(Podobně $c = a \vee b$ supremum $\equiv$ duální def., nejmenší horní závora.)

Příklad: Nechť $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \}$. Uvažujme Čum $(M, \leq)$, kde M se skládá ze všech sudoprvkových podmnožin Ω, $\leq$ je inkluze $\subset$.

Je to svaz? Ano.

Např.

$$a = \{1, 2\}, b = \{2, 3\}, \quad a \wedge b = \emptyset, a \vee b = \Omega.$$

Příklad: Totéž pro $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, M rovněž "sudoprvky" v Ω, $\leq$ inkluze. Pal Čum $(M, \leq)$ *není* svaz. Např.

$$a = \{1, 2, 3, 4\}, b = \{2, 3, 4, 5\}$$

neexistuje infimum, neboť $\{2,3\},\{3,4\}$ jsou dvě nesrovnatelné dolní závory).

Definice: Nechť $(M,\leq)$ je částečně uspořádaná množina. Pak $(M,\leq)$ se nazývá *úplný svaz*, jestliže každá podmnožina množiny M má (v M) supremum a infimum. Jinými slovy, je-li $A\subset M$, pak existují $c,d\in M, c=\inf A; d=\sup A$. (Připomeňme, že $c=\inf A$, jestliže $\forall a\in A, c\leq a$ a jestliže navíc platí $c'\leq a\ \forall a\in A\Rightarrow c'\leq c$. Tedy $c=\inf A$ je největší dolní závora množiny A.

Sup A je definováno duálně.)

Příklady: $<0,1>$ je úplný svaz; $(\exp P,\subset)$ je úplný svaz pro každou množinu P ($\exp P$ je jako vždy množina všech podmnožin P).

Poznámka: Nejmenší prvek 0 a největší prvek 1 musí v úplném svazu být. Pokud Čum $(M,\leq)$ má největší prvek, pak existence infima stačí k existenci suprema (a duálně). Platí totiž:

Tvrzení: $(M,\leq)$ je úplný svaz $\iff 1\in M$ (M má největší prvek) a $\inf A$ existuje (vM) pro každou neprázdnou podmnožinu $A, A\subset M$. (Tj. když M má největší prvek a všechna infima $\Rightarrow$ má všechna suprema)

Důkaz: Je-li $B\subset M$ a $A=\{x\mid x\geq b\ \forall b\in B\}$, pak $A\neq\emptyset$ $(1\in A)$ a $\inf A=\sup B$ (cvičení).

Následující pozoruhodné tvrzení osvětluje vnitřní vlastnosti úplných svazů. (Je zajímavé, že platí i opačné tvrzení, takže jde zde o *charakterizaci* úplných svazů.)

Věta (Tarski – věta o pevném bodě pro úplné svazy): Nechť $(L,\leq)$ je úplný svaz a nechť $f\colon L\to L$ je izotonní zobrazení (tj. $f\colon L\to L$ zachovává uspořádání $(x\leq y\Rightarrow f(x)\leq f(y))$. Pak f má pevný bod (i.e. $\exists a\in L\colon f(a)=a$).

Důkaz: Položme $S=\{x\in L\mid x\leq f(x)\}$. Pak $S\neq\emptyset$, neboť $0\in S$ (0 je nejmenší prvek). Položme $a=\sup S\Rightarrow\forall x\in S\colon x\leq f(x)\leq f(a)$ (f je izotonní). Tudíž (jak plyne z definice suprema)

$$a=\sup S\leq f(a)\Rightarrow a\in S\ (a\leq f(a)); f \text{ izotonní}$$

$$\Rightarrow f(a)\leq f(f(a))\Rightarrow f(a)\in S\Rightarrow f(a)\leq\sup S=a.$$

Q.E.D.

Věta (klasika – Cantorova – Bernsteinova věta): Nechť B, C jsou množiny, nechť $f\colon B \overset{\text{inj}}{\to} C, g\colon C \overset{\text{inj}}{\to} B$ (inj znamená injektivní = prosté) $\Rightarrow \exists$ izomorfizmus $i\colon B \to C$ (tj. lze zkonstruovat *prosté* zobrazení B *na* C).

Jinými slovy, je-li $\operatorname{card} B \leq \operatorname{card} C$ a $\operatorname{card} C \leq \operatorname{card} B$, pak $\operatorname{card} B = \operatorname{card} C$. Tato věta je základní důležitosti v teorii množin.

Důkaz (užitím Tarského věty o pevném bodě): Nechť $h\colon \exp B \to \exp B$ ($\exp B$ je množina všech podmnožin $B, \exp B$ je úplný svaz vzhledem k inklusi) je definováno takto: $X \subset B$,

$[B - g(C - f(X))] = h(X) \ldots$ složení izoton. zobrazení je izoton
$\Rightarrow h$ je izotonní.

Pak $\exists$ pevný bod, $X_0 \subset B$, tj. lze najít $X_0 \subset X$ tak, že $h(X_0) = X_0$. Zbývá dokázat, že zobrazení

$$\begin{array}{ll} i(x) = f(x) & \text{pokud } x \in X_0 \\ i(x) = g^{-1}(x) & \text{pokud } x \in X - X_0 \text{ je izomorfismus.} \end{array}$$

To je snadné. QED.

Poznámka: Jak již řečeno, platí naopak: Pokud L je svaz a každé izotonní zobrazení má pevný bod, pak L je úplný svaz (Davis, 1955).

Poznámky o některých svazech (svazy, které v životě můžeme často potkat):

Modulární svaz: Svaz $(M, \leq)$ se nazývá *modulární*, jestliže v něm platí

$$a \geq b \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = b) \vee (a \wedge c).$$

Příklad: Svaz (lineárních) podprostorů lineárního prostoru vzhledem k inklusi je modulární svaz (odtud jeho název, neboť lineární prostor se též nazývá lineární modul).

Důkaz: Nechť M je množina všech lineárních podprostorů lineárního prostoru P ($M = L(P)$). Uspořádejme ji inkluzí. Je to zřejmě svaz. Nechť $A, B, C \in L(P)$. Máme ukázat, že $A \supset B \Rightarrow A \wedge (B \vee C) = B \vee (A \wedge C)$ (zde $\wedge$ vychází jako průnik, ale $\vee$ vychází jako lineární spojení!). Zřejmě $A \wedge (B \vee C) \supset (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$. Ukažme opačnou inkluzi. Nechť $x \in A$ a také $x \in B \vee C \Rightarrow x = b + c$, $c = x - b$, $x \in A \wedge C \Rightarrow x \in B \vee (A \wedge C)$.

Definice (Modulární orthokomplementární svaz): Nechť $(L, \leq, ', 0, 1)$ je trojice taková, že vůči $\leq$ je to svaz s 0 a 1 a navíc $': L \to L$ je unární operace s vlastnostmi:

$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Rightarrow b' \leq a', \\ a \vee a' \quad &= 1 \\ a \wedge a' \quad &= 0. \end{aligned}$$

Pak L se nazývá *modulární orthokomplementární* svaz.

Příklad: $L(R^n)$ - svaz lineárních podprostorů v R^n (uspořádání inkluse), $': L(R^n) \to L(R^n),\ A \in L(R^n),\ A' \equiv$ ortogonální doplněk v R^n k (prostoru) A. Takto dostaneme modulární orthokomplementární svaz.

Poznámka (Věta Kaplanski, Von Neumann): Existuje svazová charakterizace svazů, které jsou geometrie (tj. svazů, které jsou svazově izomorfní s $L(R^n)$.

Poznámka (zajímavá klasika – Möbius):

Mějme tři vektory v_1, v_2, v_3 v R^3, které jsou v "obecné" poloze (lineárně nezávislé a žádný není kolmý k rovině dané zbývajícími dvěma vektory). Označme L "modulární podorthoprostor" v $L(R^3)$ generovaný v_1, v_2, v_3. Pak L je topologicky hustý v R^3, tj.

$$\forall \varepsilon > 0, \forall \vec{v},\ \|\vec{v}\| = 1,\ \exists \vec{w} \in L \text{ tak, že } \|\vec{v} - \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\| < \varepsilon.$$

Jinými slovy, jestliže vezmeme tři nezávislé jednotkové vektory a budeme iterovat operace tvoření rovin generovaných dvěma vektory vektorů a tvoření normálního vektoru k těmto rovinám (tj. tvoření vektorového součinu dvou vektorů), dostaneme jako výsledek množinu vektorů, jejichž zkrácení na jednotkové vektory je soustava vektorů topologicky hustá na jednotkové sféře. Tedy ze tří vektorů těmito jednoduchými operacemi dostaneme "skoro" všechny vektory. (Bylo by možná zajímavé se na to podívat podrobněji a najít nějaká kvantitativní ohodnocení rychlosti konvergence (k danému $\vec{w}$) v závislosti na konfiguraci počátečních vektorů. Může to být známé – je třeba nahlédnout do dobré monografie z projektivní geometrie ...).

Věta (McNeillovo zúplnění, Dedekindovy řezy):

Každou Čum je možno izomorfně zobrazit (ve smyslu izomorfizmu svazů *do*) do jistého úplného svazu. Platí dokonce obecnější tvrzení (McNeillovo zúplnění): Každou částečně uspořádanou množinu $(M, \leq)$ je možno izomorfně (ve smyslu uspořádání) zobrazit do jistého úplného svazu S, přičemž toto zobrazení zachovává všechna infima i suprema, která existovala v M.

$$\begin{aligned}&(\exists\varphi\colon (M,\leq) \hookrightarrow (L,\preceq),\ L \text{ úplný svaz}\\ &\varphi(\inf A) = \inf\varphi(A),\ \varphi(\sup A) = \sup\varphi(A)\end{aligned}$$

pokud ovšem $\inf A$ a $\sup A$ existují.)

Důkaz (náznak): Buď S množina všech ideálů v M. ($I \subset M$, $I \neq \emptyset$ se (v tomto kontextu) nazývá *ideál*, jestliže:

(i) $x \in I, y \leq x \Rightarrow y \in I$

(ii) $X \subset I, p = \sup(X)$ existuje v $M \iff p \in I$).

Uspořádejme S inkluzí $\subset$ ($(S, \subset)$ je pak částečně uspořádaná množina). Pak $1 \in S$ a S je uzavřená na tvoření průniků (neboť průnik ideálů je ideál) $\Rightarrow S$ je úplný svaz. Zobrazení $a \to \varphi(a)$, kde $\varphi(a)$ je hlavní ideál daný prvkem a: $\varphi(a) = \{x \in M \mid x \leq a\}$. Toto bude žádané zobrazení. Tj. je třeba dokázat: $c = \bigwedge\limits_A a \overset{?}{\Rightarrow} \varphi(c) = \bigcap\limits_A \varphi(a)$ (nalevo infimum podmnožiny, napravo průnik).

$$d = \bigvee_A a \Rightarrow \varphi(d) = \bigvee_{a\in A} \varphi(a)$$

(zde ovšem $\bigvee$ stojící napravo *nemusí být* $\bigcup$).

(Např. $d = \bigvee\limits_A a \to \varphi(d) \supset \bigvee \varphi(a)$ podle definice ideálu, jestliže $a \in I$, $\forall a \in A \Rightarrow \bigvee\limits_A a \in I$, etc. - jako cvičení, resp. Kuroš: kniha.)

Nyní ukážeme důležitou souvislost uspořádání ve svazu s "univerzálně algebraickým" pojetím pojmu svaz. V knihách, určených i pro nespecialisty či uživatele, se tato souvislost často bez komentáře používá.

Definice (alternativní definice svazu):

Množina S s dvěma binárními operacemi $\bigwedge, \bigvee$ se nazývá "svaz", pokud platí $(a, b \in S)$:

(i) $a \wedge a = a, a \vee a = a$ (idempotence)

(ii) $a \wedge b = b \wedge a,\ a \vee b = b \vee a$ (komutativita)

(iii) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ (asociativita obou operací)

(iv) $a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$ (absorbovatelnost)

Věta: Definice svazu vycházející z uspořádání je ekvivalentní s definicí "svazu" vycházející z algebraických operací $\wedge, \vee$ (při podmínkách (i) až (iv)).

Důkaz (náznak myšlenky, je to jednoduché cvičení): Od svazu ke "svazu":

$$(S, \leq) \text{ svaz} \to \{\inf(a,b) \to a \wedge b, \sup(a,b) \to a \vee b\}$$

Vzhledem k uspořádání dostáváme dvě operace, pro něž musíme ověřit podmínky (i) – (iv). To je snadné.

Naopak od "svazu" ke svazu:

$$(S, \wedge, \vee)\text{"svaz"} \;\to a \leq b \overset{\text{def.}}{\equiv} a \wedge b = a(\text{ resp. } \iff a \vee b = b, \text{ to je totéž }).$$

Pak $\leq$ činí z S svaz.

Oba přechody možné a často se používají, tedy svaz (při $\leq$) a "svaz" (při $\wedge, \vee$)je ekvivalentní přístup.

Definice: Nechť S je svaz. S se nazývá *distributivní*, jestliže $\forall a, b, c \in S$ platí následující vlastnosti:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

Příklady:

1. $(\exp S, \subset)$ je distributivní svaz
2.

není distributivní

3. Svaz $L(R^n)$ podprostorů v lineárním prostoru R^n $(n \geq 3)$ není distributivní (otestuj jednodimenzionální podprostory v R^3). To je klasický příklad modulárního svazu, který není distributivní (příklad často používaný v kvantové fyzice).

Nejhezčí svaz je ovšem Booleovský svaz. Zde ho máme.

Definice: Distributivní svaz S s 0 a 1 se nazývá *booleovský svaz (Booleova algebra)*, pokud ke každému prvku $a \in S$ existuje prvek $a' \in S$ (komplement) tak, že platí ($a, b \in S$):

$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Rightarrow b' \leq a', \\ a \wedge a' \quad &= 0, \qquad\qquad a \vee a' = 1. \end{aligned}$$

Poznámka: $\forall a \ \exists! a'$ (existuje *právě jeden* komplement); lze snadno dokázat.

Příklady: 1. $(\exp P, \subset)$ je Booleova algebra, operace $'$ je množinový komplement, $0 = \emptyset, 1 = S$.

2. Abstraktní Booleova algebra $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ se dá definovat jen axiomy svazu (jsou 4) a komplementu (jsou 3). Takto se to obvykle dělá.

Příklad (vymezení Booleovy algebry podmnožin jisté množiny – ne nutně všech): Nechť $\Delta \subset \exp S$, S množina, $\bigcap$ je průnik, $\bigcup$ je sjednocení, $^-$ je komplement (v S).

Nechť $(\Delta, \cap, \cup, ^-)$ splňuje toto:

1. $\emptyset \in \Delta$
2. $A, B \Rightarrow A \cup B \in \Delta$
3. $A \in \Delta \Rightarrow A' = S - A \in \Delta$.

Pak Δ je Booleova algebra s operacemi $\bigcup, \bigcap, ^-$ a $0 = \emptyset, 1 = S$.

Tvrzení: Každá konečná Booleova algebra je (booleovsky) izomorfní s algebrou $(\exp S, \subset)$ pro nějakou konečnou množinu S. Důsledek: Je-li B konečná Booleova algebra, pak $\operatorname{card} B = 2^n$ a B může být chápána jako množina n-tic z 0 a 1 (charakteristické funkce na množině $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$.

Důkaz: Konečná Booleova algebra B musí mít konečný počet atomů (atom $\equiv$ nejmenší prvek větší než 0). Pak lze užitím distributivity snadno ukázat, že všechny prvky B jsou v jednoznačné korespondenci se supremy množin atomů. Jestliže B má n atomů, pak zřejmě B je izomorfní s $\exp\{1, 2, \ldots, n\}$. Tedy $\operatorname{card} B = 2^n$.

Dá se ukázat, že dokonce *každá* (i nekonečná) *Booleova algebra je Booleovsky izomorfní s množinovou booleovskou algebrou.* Tato pozoruhodná věta (ekvivalentní ale s axiomem výběru, takže je nelze dokázat v naivní matematice) je základem mnoha moderních matematických teorií.

Věta (Stone, 1936): Každá Booleova algebra "je" (tj. je booleovsky izomorfní s) Booleovou algebrou podmnožiny nějaké množiny. (Tj. pokud $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ je *abstraktní* Booleova algebra, pak můžeme identifikovat B s množinou nějakých podmnožin nějaké množiny S tak, že abstraktní operace $\wedge, \vee, '$ přejdou v množinové operace $\bigcap, \bigcup$ a abstraktní komplement $'$ přejde v množinový komplement $^{-}$ (vše se koná v "univerzu" S).

Výše uvedenou větu si teď dokážeme. Nejprve pár pojmů.

Definice: Nechť je dána Booleova algebra $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$. *Stavem* na B (alternativně *pravděpodobnostní mírou* na B) rozumíme zobrazení $s\colon B \to \langle 0, 1\rangle$ takové, že

(i) $s(1) = 1$ (první 1 je v B, druhá 1 je v R)

(ii) pokud $a \wedge b = 0$, pak $s(a) + s(b) = s(a \vee b)$

Pokud s nabývá jen hodnot 0 a 1, říkáme, že s je *dvouhodnotový stav (dvouhodnotová míra).*

Značení:
$\mathscr{S}(B)$ - množina všech stavů na B
$\mathscr{S}_2(B)$ - množina všech dvouhodnotových stavů na B.

Definice: Nechť B je Booleova algebra. Pak $I \subset B$ se nazývá (booleovský) *ideál* (v B) jestliže platí (samozřejmě $\leq$ a $\vee$ je příslušná relace a operace v B):

(i) $a \in I, b \leq a \Rightarrow b \in I$

(ii) $a, b \in I \Rightarrow a \vee b \in I$

(iii) $1 \notin I$

Definice: Ideál na Booleově algebře B nazvěme *selektivní*, jestliže $\forall a \in B$ buď $a \in I$ nebo $a' \in I$.

Příklad: Pro $a \neq 1$ je $I_a = \{x \in B \mid x \leq a\}$ ideál; nemusí ovšem být selektivní.

Příklad: $B = \exp N$ (B je Booleova algebra všech podmnožin N, N množina přirozených čísel), I – konečné podmnožiny N, je ideál, I není selektivní (množina všech sudých čísel nepatří do I, její doplněk – množina všech lichých čísel – tam také nepatří).

Tvrzení: Pokud $s \in \mathscr{S}_2(B)$, pak $I = \{a \in B \mid s(a) = 0\}$ je selektivní ideál.
Platí i opačné tvrzení: Selektivní ideál indukuje dvouhodnotovou míru.

Důkaz je zřejmý. Skutečně, je-li I selektivní ideál, pak

$$s\colon B \to \{0,1\} \text{ tak, že } s(a) = 0 \iff a \in I \text{ dává } s \in \mathscr{S}_2(B).$$

Následující tvrzení má fundamentální význam pro teorii Booleových algeber. Dokazuje se v něm, že každá Booleova algebra má "dost" selektivních ideálů (resp. dvouhodnotových měr). Předpokládá se axiom výběru (toto tvrzení je s ním ve skutečnosti ekvivalentní).

Tvrzení: Nechť $a \in B, a \neq 1$. Pak existuje selektivní ideál I takový, že $a \in I$.

Důkaz: Položme $I_a = \{x \in B \mid x \leq a\}$. Vezměme množinu $\mathscr{J}$ všech ideálů na B, které obsahují a. Tudíž $I_a \in \mathscr{J}$ a tedy $\mathscr{J} \neq \emptyset$. Uspořádejme $\mathscr{J}$ inkluzí. Pak $\mathscr{J}$ má maximální prvek (ověř předpoklady Zornova lemmatu – sjednocení rostoucího řetězce ideálů je ideál!). Označme ho I. Tvrdíme, že I je selektivní.

Sporem: Nechť I není selektivní. Pak existuje $b \in B$ tak, že ani b ani b' nepatří do I. Vezměme nyní ideál $\tilde{I}$ generovaný tím maximálním I a I_b ($I_b = \{x \in B \mid x \leq b\}$). Existuje skutečně takový ideál v B, který obsahuje $\tilde{I} \cup I_b$? Pokud ano, máme spor, neboť $\tilde{I}$ je striktně větší než I.

Položme $\tilde{I} = \{u \vee v,\ u \in I, v \in I_b\}$. Dá se snadno ukázat, že $\tilde{I}$ splňuje podmínky (i), (ii) z definice ideálu (použije se distributivita).

Zbývá dokázat, že $1 \notin \tilde{I}$. Předpokládejme, že $1 \in \tilde{I}$. Pak ale $1 = u \vee v = u \vee b$. Odtud

$$b' \wedge 1 = b' \wedge (u \vee b) \Rightarrow b' = (b' \wedge u) \vee (b' \wedge b) = b' \wedge u \Rightarrow b' \leq u \Rightarrow b' \in I$$

– spor. QED.

Tvrzení: Pokud $a \not\leq b, a, b \in B \Rightarrow \exists\ s \in \mathscr{S}_2(B), s(a) = 1, s(b) = 0$.

Důkaz: $a \not\leq b \Rightarrow c = a \wedge b' \neq 0$ (kdyby $a \wedge b' = 0 \Rightarrow b \vee (a \wedge b') = (b \vee a) \wedge (b \vee b') = b$; distributivní zákon tedy dává

$$b \vee a = b \Rightarrow a \leq b \quad \text{spor}).$$

Tudíž existuje (podle předchozích úvah) dvouhodnotový stav $s \in \mathscr{S}_2(B)$ tak, že $s(c) = s(a \wedge b') = 1$. Pak $s(a \wedge b') = 1 \Rightarrow s(a) = 1, s(b') = 1 \Rightarrow s(b) = 0$. QED.

Teď už snadno dokážeme Stoneovu větu (tj. najdeme pro B množinovou representaci). B bude (Booleovsky) izomorfní s jistou soustavou podmnožin množiny $\mathscr{S}_2(B)$, určitěji B bude izomorfní se soustavou všech podmnožin množiny $\mathscr{S}_2(B)$, které jsou typu $S_a = \{s \in \mathscr{S}_2(B) \mid s(a) = 1\}$ pro nějaké $a \in B$. Příslušný izomorfismus $B \to (\Delta, \bigcup, \bigcap, ^{-}, \emptyset, \mathscr{S}_2(B)$, kde $\Delta \subset \exp \mathscr{S}_2(B)$ se skládá ze všech S_a, $a \in B$, bude definován takto:

$$\begin{aligned}
&0 \to \emptyset\\
&1 \to \mathscr{S}_2(B)\\
&a \wedge b \to S_a \cap S_b\\
&a \vee b \to S_a \cup S_b\\
&a' \to S_a'\\
&a \to S_a \subset \mathscr{S}_2(B)
\end{aligned}$$

Snadno se ověří s užitím předchozího tvrzení, že toto zobrazení je booleovský izomorfismus. QED.

Závěrem si ukážeme jednu hlubší vlastnost stavů na Booleově algebře – rozšiřovací vlastnost stavů z menších na větší Booleovy algebry. K tomu budeme potřebovat následující klasickou větu z obecné topologie.

Věta (součin kompaktních prostorů je kompaktní prostor – **Tichonovova věta**):

Buďte $(X_\alpha \mid \tau_\alpha)$, $\alpha \in I$ kompaktní topologické prostory a buď $X = (\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau)$ topologický součin prostorů X_α, τ topologie součinu. Pak X je kompaktní prostor.

Důkaz: Tento důkaz je poněkud netriviální. 1. Pozorování: Jestliže v jakémkoliv topologickém prostoru T platí, že každá centrovaná soustava množin v tom prostoru má neprázdný průnik uzávěrů (tj. průnik všech množin vzniklých jako uzávěry množin z celého uvažovaného systému), pak T je kompaktní. Připomínáme, že $\{C_\beta \mid \beta \in J\}$, $C_\beta \subset T$ se nazývá centrovaná, pokud $C_{\beta_1} \cap C_{\beta_2} \cap \cdots \cap C_{\beta_n} \neq \emptyset$ při jakémkoliv *konečném* výběru množin ze systému $\{C_\beta \mid \beta \in J\}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in J$. Vidíme tedy, že pokud pro každou centrovanou soustavu $\{C_\beta \mid \beta \in J\} \subset T$ platí $\bigcap\limits_{\beta \in J} \overline{C_\beta} \neq \emptyset$, pak T je kompaktní. To se dokáže jednoduše: Nechť $\{O_\beta \mid \beta \in \tilde{J}, \tilde{J}$ nějaká indexová množina$\}$, je otevřené pokrytí T, z kterého nelze vybrat konečné pokrytí prostoru T. Pak $\{T - O_\beta \mid \beta \in \tilde{J}\}$ je centrovaná soustava uzavřených množin taková, že $\bigcap\limits_{\beta \in \tilde{J}} (T - O_\beta) = \emptyset$.

Připomeňme, že $X = (\Pi_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau)$ má podle definice součinové topologie bázi okolí bodu $x = (x_\alpha)$, tvořenou množinami typu $\bigcap\limits_{\alpha \in K} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, kde K je konečná podmnožina I, U_α okolí složky x_α v topologii τ_α.

Zpět k důkazu Tichonovovy věty: Nechť $\mathscr{B} = \{B_\beta \mid \beta \in J\}$ je centrovaná soustava množin v top. součinu $(\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau)$. Budeme se snažit dokázat, že $\bigcap\limits_{\alpha \in I} \overline{B_\alpha} \neq \emptyset$ (uzávěry jsou brány v topologii τ topologického součinu $(\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau)$). Podle Zornova lemmatu můžeme $\mathscr{B} = (B_\beta)$ rozšířit na *maximální* centrovanou soustavu. Nazvěme ji; $\mathscr{C} = \{C_{\beta'} \mid \beta' \in J'\}$. Je zřejmé, že každá nadmnožina jakéhokoliv $C_p \in \mathscr{C}$ patří do $\mathscr{C}$ a pokud $C \cap C'_\beta \neq \emptyset\ \forall \beta' \in J'$, pak $C \in \mathscr{C}$. Uvažujme projekce $p_\alpha \colon \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha \to X_\alpha,\ \alpha \in I$. Pak $p_\alpha(\mathscr{C})$ je zřejmě centrovaná soustava v $X_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in I, \exists x_\alpha \in X_\alpha, x_\alpha \in \bigcap\limits_{\beta' \in J'} \overline{p_\alpha(C_{\beta'})}$. Dokážeme, že $x = (x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ patří do $\bigcap\limits_{\beta \in J'} \overline{C_{\beta'}}$ a tím bude ukázána kompaktnost prostoru $\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$.

Máme ukázat, že $x \in \overline{C_{\beta'}},\ \forall \beta' \in J'$, tj. že každé okolí bodu $x = (x_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ (okolí v součinové topologii) protíná $\forall C_{\beta'}$. Stačí dokázat, že to platí pro standardní okolí, což jsou konečné průniky $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ při U_α okolí $x_\alpha \in X_\alpha$. Ale jelikož $\forall \alpha \in I, p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ protíná každé z $C_{\beta'}$, musí být $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ rovno nějaké množině $C_{\beta''}$ ze systému $\mathscr{C}$ ($\mathscr{C}$ je maximální). Tudíž i konečné průniky patří do systému $\mathscr{C} \Rightarrow x \in \overline{C_{\beta'}}\ \forall \beta' \in J'$ (ježto jeho každé okolí protíná $C_{\beta'}$!) $\Rightarrow x \in \bigcap_{\beta' \in J'} \overline{C_{\beta'}}$. QED.

Poznámka: Předchozí věta nám dává jiný důkaz věty: $M \subset R^n$ je kompaktní $\iff$ M je uzavřená a omezená. Netriviální bylo dokázat jenom $\Leftarrow$. Je-li M omezená, pak $M \subset \langle a, b\rangle^n$. Jelikož $\langle a, b\rangle$ je kompaktní (dokaž! – snadné cvičení), pak $\langle a, b\rangle^n$ je (podle Tichonovovy věty) kompaktní a M je uzavřený podprostor kompaktu $\Rightarrow$ je to také kompakt.

Je zajímavé si všimnout, jak "Tichonovská topologie" (tj. topologie na součinu) souvisí s "topologií bodové konvergence" funkcí.

Věta: Nechť $P =< a, b >^X$ je množina všech funkcí $f\colon X \to < a, b >$, X nějaká množina. Opatřeme P "topologií bodové konvergence", tj. vezměme (P, τ) tak, že $f_p \to f \iff f_p(x) \to f(x)\ \forall x \in X$. Dá se snadno ukázat, že topologie τ bude mít následující okolí: Je-li $f \in \langle a, b\rangle^X$, pak okolí bodu f v topologii τ jsou právě všechny nadmnožiny množin typu $O(x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{g \in \langle a, b\rangle^X \mid |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\ \forall i \leq n\}$. Pak P je kompaktní prostor.

Důkaz: Topologie bodové konvergence na P je vlastně stejná se součinovou ("Tichonovskou") topologií na $\prod_{x \in X} X_x$, kde $X_x =< a, b >\ \ \forall x \in X$ (X_x je x-tá kopie X). Pak už to plyne z Tichonovovy věty.

Nyní dokážeme výše inzerovanou větu o rozšiřování stavů na Booleově algebře. Nejprve důležité pozorování.

Pozorování: Nechť B je Booleova algebra a nechť $\mathscr{S}(B)$ je množina všech stavů na B (resp. $\mathscr{S}_2(B)$ množina všech dvouhodnotových stavů na B). Pak $\mathscr{S}(B)$ i $\mathscr{S}_2(B)$ je kompaktní prostor (chápán s topologií bodové konvergence). $\mathscr{S}(B)$ je navíc konvexní.

Důkaz: Aplikace Tichonovovy věty:

$\mathscr{S}(B)$ je uzavřený podprostor $\langle 0, 1\rangle^B$ a $\langle 0, 1\rangle^B$ je kompakt. Skutečně, snadno se dokáže, že bodová limita konečněaditivních měr je konedněaditivní míra (proveď! – je to zábavné cvičení).

Poznámka: Platí podobně pro další struktury (i jiné, než Booleova algebra) – stavový prostor na M (= prostor konečněaditivních měr $\mathscr{S}(M)$) je vždy kompaktní! Nic takového (bohužel) neplatí pro σ-aditivní míry.

Věta Horn–Tarki (zde podáváme topologický důkaz): Nechť B_1 je Booleova podalgebra Booleovy algebry B. Pak každý stav $s_1 \in \mathscr{S}(B_1)$ (resp. $s_1 \in \mathscr{S}_2(B)$) je možné rozšířit na stav $s \in \mathscr{S}(B)$ (resp. $s \in \mathscr{S}_2(B)$).

Důkaz: Ukážeme hlavní ideu důkazu pro $\mathscr{S}(B)$. Nechť $e\colon B_1 \to B$ je vnoření (e je prosté zobrazení, které zachovává všechny Booleovské operace). Nechť $s_1 \in \mathscr{S}(B_1)$. Můžeme (a budeme) chápat B_1 přímo jako "podmnožinu" B (ušetří to psaní – místo $e(b) \in B$ píši rovnou $b \in B_1 \subset B$). Uvažujme "rozklady jednotky" v B_1 ($\{P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ je rozklad jednotky v Booleově algebře B_1, jestliže $p_i \wedge p_j' = 0\ \forall i, j, i \neq j$ a $\bigvee\limits_{i \leq n} p_i = 1 \in B_1$). Množina $\mathscr{P}$ všech rozkladů jednotky (v B_1) je částečně uspořádaná relací "zjemnění" a při tomto uspořádání je usměrněná. "Usměrněním" se myslí, že každé dva rozklady jedničky mají společné zjemnění. To je zřejmé – společné zjemnění dostaneme provedením průniků "každý s každým" (využíváme distributivitu). Pak je-li P, Q rozklad, máme $P \wedge Q \leq P, P \wedge Q \leq Q$ ($\wedge$ značí společné zjemnění). Položme (pro P rozklad jedničky v B_1, $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$)

$$F_P = \{\bar{s} \in \mathscr{S}(B) \mid \bar{s}(p_i) = s_1(p_i)\ \forall i \leq n\}.$$

Pak $\{F_P \mid P \in \mathscr{P}$ tady probíhá *všechny* rozklady jednotky v $B_1\}$ je usměrněná soustava uzavřených množin v (kompaktu) $\mathscr{S}(B)$

$$\Rightarrow \bigcap_{P \in \mathscr{P}} F_P \neq \emptyset$$

(průnik vzat přes všechny rozklady jednotky v B_1).

Tudíž $\exists s \in \mathscr{S}(B)$ tak, že $s \in \bigcap F_P$. Stačí už jen dokázat, že s je hledaná extenze stavu s_1 (to je snadné). QED.

(Detaily tohoto důkazu a zobecnění: P. Pták: Extensions of States on Logics, Bull. Polish Academy Sci. – Math. 33, 9–10, (1983), 493–497.)

Poznámka: Vzniká otázka, zda tvrzení analogická předchozím větám platí také pro Booleovy σ-algebry, jak je známe z teorie pravděpodobnosti. (Booleova σ-algebra B je Booleova algebra, ve které existují suprema i infima všech *spočetných* podmnožin v B.) Je zajímavý a trochu překvapivý fakt, že tomu tak vůbec není. Stoneova reprezentační věta *neplatí* pro Booleova σ-algebry. Dá se dokázat jen značně slabší výsledek (i když dosti významný v teorii Booleových σ-algeber a i jinde), že každá Booleova σ-algebra je jen homomorfním obrazem množinové Booleova σ-algebry (to říká známá Loomisova–Sikorského věta). Je to ještě horší: Nejen, že existují Booleovy σ-algebry, které nejsou množinově representovatelné, ale dá se dokonce ukázat, že existují Booleova σ-algebry, které nemají ani jeden dvouhodnotový σ-aditivní stav. Pokud jde o rozšiřování stavů, věta o rozšíření stavu neplatí ani pro množinově representovatelné Booleova algebry – např. Lebesgueova míra na σ-algebře Borelovských množin na $\langle 0,1\rangle$ se nedá rozšířit na $\exp\langle 0,1\rangle$ (tj. Lebesgueovu míru nelze rozšířit na σ-aditivní míru definovanou na všech podmnožinách intervalu $\langle 0,1\rangle$). Pro podrobnější studium viz Halmos: Lectures on Boolean Algebras.

Poznámka o tenzorovém součinu booleovských algeber (tensor product, free product): Filosofie konstrukce tensorového součinu dvou (event. více) algebraických struktur je vždy zhruba tato: K daným dvěma strukturám hledáme jednu strukturu, která tyto dvě dané struktury "těsně" a nezávisle obsahuje. Někdy jsou s tím problémy. Pro dané dvě Booleovy algebry B_1, B_2 ale množinová representace dovoluje tvořit tenzorový součin snadno. Nechť $(S_1, \Delta_1), (S_2, \Delta_2)$ jsou množinové representace B_1, B_2 (tj. $\Delta_1 = B_1, \Delta_2 = B_2$). Vezměme $S = S_1 \times S_2$ a uvažujme (S, Δ), kde Δ je Booleova algebra (podmnožin množiny $S_1 \times S_2$), která je (Booleovsky) generovaná všemi "obdélníčky" $A_1 \times A_2$, kde $A_1 \in \Delta_1, A_2 \in \Delta_2$. Dá se snadno ukázat, že Δ se skládá *přesně* ze všech konečných disjunktních sjednocení takových obdélníčků. Pak (S, Δ) je tensorový součin Booleových algeber B_1, B_2. (Tento tenzorový součin má i další sympatické vlastnosti, např. dané dva stavy na B_1, B_2 dovolují rozšíření na celý tenzorový součin.)

Poznámka o volných Booleových algebrách:

Definice: Booleova algebra B se nazývá volná, pokud má "volné generátory", tj. pokud $\exists$ množina $G, G \subset B$ tak, že pokud $f\colon G \to \tilde{B}$ je zobrazení do Booleovy algebry $\tilde{B}$, pak f lze (jednoznačně) rozšířit na Booleovský morfismus $\tilde{f}\colon B \to \tilde{B}$. Charakterizovat volné Booleovy algebry (resp. dokázat jejich existenci) byl důležitý problém pro mnoho aplikací Booleových algeber. Charakterizace je následující (detailní a zajímavý výklad, dosažitelný pro každého, je v Halmosově knize, je to ovšem trochu netriviální a vyžaduje to čas a silnou motivaci).

1. Volné Booleovy algebry jako Lindenbaum–Tarského algebry: Utvoříme "algebru" booleovských slov nad danou abecedou a "vyfaktorizujeme" ji podle ekvivalence "být tautologicky ekvivalentní". Dostaneme Booleovu algebru. To je známé i z elementárních kurzů (i na ČVUT FEL). Tyto algebry jsou volné. (Dá se ukázat, že takto můžeme konstruovat volné algebry v každé třídě algeber.)

2. Volné Booleovy algebry získané "Stoneovou dualitou" (s užitím Tichonovovy věty): Platí následující pozoruhodná věta: Nechť $\{0, 1\}$ je dvoubodová množina, chápaná jako diskrétní topologický prostor. Utvořme topologický (Tichonovův) součin $P = \{0, 1\}^I$ (I je množina). Pak Booleova algebra všech podmnožin P, které jsou současně uzavřené i otevřené v P, tvoří volnou Booleovu algebru s I generátory. (Důsledek: Konečná Booleova algebra je volná $\iff$ má 2^{2^n} prvků. To lze ovšem dokázat i elementárně.)

5 Slovo o teorii kategorií

Stále více se prosazuje i v inženýrských vědách moderní jazyk teorie kategorií. Nejde samozřejmě jen o jazyk, ale o celkové chápání matematických struktur, které se se vznikem teorie kategorií značně povýšilo. Vhodná literatura pro každého je kniha S. MacLane: Categories for working mathematician. V tomto textu ovšem naznačíme jen něco ze samotných základů teorie kategorií.

Definice: *Kategorie* je třída O objektů a třída morfizmů M. Třídu morfizmů lze psát jako disjunktní sjednocení: $M = \bigcup [A, B]; (A, B) \in O \times O$.

Symbol $[A, B]$ značí *množinu* morfizmů "z A do B". Dále se předpokládá, že platí

(i) asociativita: je definována funkce $[A, B] \times [B, C] \to [A, C]$ ("skládání morfizmů") – značíme $\alpha\beta$ tak, že $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)\ \forall \alpha, \beta, \gamma$, pro které má skládání smysl

(ii) existence identity: $\forall A \in O, \exists 1_A \in [A, A]$ (jednotkový morfizmus, identita), tak, že $1_A\alpha = \alpha, \beta 1_A = \beta$.

Příklady:

1. *Set* – kategorie množin. Objekty jsou množiny, morfizmy jsou zobrazení, skládání morfizmů je obvyklé skládání zobrazení (u všech "konkrétních" kategorií chápáno skládání takto)

2. *Lin* – kategorie lineárních prostorů a lineárních transformací

3. *Top* – kategorie topologických prostorů a spojitých zobrazení.

   Říkáme, že *kategorie je malá*, jestliže třída jejích objektů tvoří (jen) množinu. Např. *Set* není malá, "množina" všech množin jak známo neexistuje, hovoříme pak o třídě resp. vlastní třídě objektů.

4. Každá částečně uspořádaná množina $(M, \leq)$ může být chápána jako (malá) kategorie; O-prvky M; $a \to b \overset{\text{def}}{\equiv} a \leq b$.

5. Jednoobjektová kategorie je přesně pologrupa s jednotkou (monoid). Teorie jednoprvkových kategorií má stejné axiomy jako teorie pologrup.

Jedním z přínosů teorie kategorií je naznačení možnosti studia struktur bez toho, že bychom využívali přímo vnitřní strukturu objektů. Jinými slovy, ukazuje se, že mnohé vlastnosti objektů můžeme definovat jen pomocí "šipek", tj. pomocí morfizmů. Zde jsou příklady.

Definice: Morfizmus $\alpha\colon a \to b$ se nazývá *monomorfizmus* (injektivní zobrazení)

$$\forall f, g \quad \text{morfizmy} \quad (f\alpha = g\alpha \Rightarrow f = g);$$

pak a nazýváme *podobjekt* objektu b.

Všimněme si, že např. v kategorii *Set* tato definice přesně vymezuje prosté zobrazení. Totiž pokud

α není prosté $\Rightarrow$

2 prvky z A jsou zobrazeny do jednoho z B;

stačí pak pro f vzít konstantní zobrazení:

$f(C) =$ jeden z těchto dvou prvků,

pro g stačí vzít konstantní zobrazení:

$g(C) =$ druhý z těchto dvou prvků;

f, g různé, ale $f\alpha = g\alpha$.

Definice (pojem duální k monomorfismu): $e\colon a \to b$ *epimorfizmus* (na) $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ $(ef = eg \Rightarrow f = g)$, pak b se nazývá *faktorobjekt* objektu a.

Definice: Morfismus $\alpha\colon a \to b$ se nazývá *isomorfismus*, jestliže α je i monomorfismus i epimorfismus.

Další důležitá otázka je tato: lze "pomocí šipek" definovat "kartézský" součin?

Definice: Nechť $\mathscr{C}$ je kategorie, $\{A_i\}_{i\in I}$ objekty v $\mathscr{C}$.

Součin množiny $\{A_i\}_{i\in I}$ je dvojice $(\pi(A_i), \pi_i), i \in I$, taková, že

(i) $\pi(A_i)$ je objekt v $\mathscr{C}$

(ii) $\forall j \in I, \pi_j : \pi(A_i) \to A_j$ jsou morfizmy

(iii) $\forall (C, f_i), i \in I$, s vlastnostmi (i), (ii)

$\exists!$ (existuje přesně jeden) $\mathscr{C}$-morfizmus

$f : C \to \pi(A_i)_{i\in I}$ tak, že platí

$f_i = \pi_i f \ \forall i \in I.$

Již jen objev této definice je přínos teorie kategorií (hle, zase jeden ze základních příspěvků pro bádání již při volbě definice!). Dá se ukázat (což je velmi významné, jakkoliv snadné dokázat), že tato definice určuje součin souboru objektů až na isomorfismus (ovšem v té kategorii).

Příklady (cvičení pro čtenáře):

1. V kategorii *Set* je součin roven kartézskému součinu: Jestliže $\{A_i\}$, $i \in I$ je soubor množin, pak $(\pi(A_i), \pi_i\colon \pi(A_i) \to A_i)$ je (kategoriální) součin pokud vezmeme $\pi(A_i) = \prod\limits_{i\in I} A_i$ ("obyčejný" kartézský součin) a $\pi_i\colon \pi(A_i) \to A_i$ jsou kanonické projekce na jednotlivé exempláře A_i v součinu.

2. Kategorie *Top* má všechny součiny: stačí vzít Tichonovský součin.

3. Kategorie *Comp* kompaktních prostorů a spojitých zobrazení má všechny součiny: Tichonovova věta

4. Kategorie metrických prostorů a spojitých zobrazení má konečné i spočetné součiny, nemá nespočetné součiny; pro nejvýše spočetně mnoho metrických prostorů (M_i, d_i) je topologický kartézský součin metrizovatelný, např. můžeme vzít metriku

$$f(x,y) = \sum_{n\in N} \frac{1}{2^n} d_i(x_i, y_i)$$

$(x = (x_i), y = (y_i), d_i$ jsou metriky na příslušných metrických prostorech M_i.

5. Kategorie *Norm* normovaných prostorů nemá ani spočetné součiny (mírně náročnější cvičení).

Pojmy v teorii kategorií můžeme přirozeným způsobem dualizovat (jako jsme již např. získali pojem epimorfismus dualizace pojmu monomorfismu).

Dualizací pojmu součinu dostaneme "kosoučin" (disjunktní sumu) v $\mathscr{C}$: obrátíme prostě všechny šipky.

Příklad: Nechť v *Set* je $(S_i)_{i\in I}$ je soubor množin. Pak

$$\bigcup_{i\in I} S_i, e_i \colon S_i \to \bigcup S_i)$$

kde $\bigcup\limits_{i\in I} S_i$ je disjunktní sjednocení množin S_i s e_i jsou příslušná vnoření, je kosoučin (suma) souboru $(S_i)_{i\in I}$ v *Set*.

Další důležitý pojem je pojem funktoru. Rozumí se jím zobrazení mezi kategoriemi, které se dobře srovnává s kategoriálními vlastnostmi obou uvažovaných kategorií.

Definice (funktor): Nechť $\mathscr{C}$ a $\mathscr{D}$ jsou kategorie.

Funktor (z $\mathscr{C}$ do $\mathscr{D}$) je trojice $(\mathscr{C}, F, \mathscr{D})$,

$$F \colon \text{Morf}\ (\mathscr{C}) \to \text{Morf}\ (\mathscr{D})$$

F je zobrazení morfizmů $\mathscr{C}$ do morfizmů $\mathscr{D}$ splňující

(i) F zachovává identity $(e = \mathrm{id}_{\,\mathrm{a}} \Rightarrow \mathrm{F(e)} = \mathrm{id}_{\,\mathrm{F(a)}})$; jinými slovy, F přiřazuje objektům z $\mathscr{C}$ objekty z $\mathscr{D}$

(ii) F zachovává složení ($F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$)

Příklady:

1. $Id : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ je funktor v každé kategorii.
2. Je-li $\mathscr{C}$ podkategorie kategorie $\mathscr{D}$ (tj. $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ a $\mathscr{C}$ tvoří kategorii s morfismy vzatými z $\mathscr{D}$), pak v $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ (vnoření) je funktor
3. Vždy máme konstantní funktor – vše zobrazíme na danou identitu v druhé kategorii
4. Důležitý příklad je "zapomínající funktor" – zapomene kus informace o dané struktuře.

   Pro každou "konkrétní kategorii" (tj. kategorii, jejíž objekty "žijí" na množině) je $A \to$ nosná množina pro A "zapomínající funktor").

   Příklady: *Top* $\to$ *Set* (ponechá jen nosnou množinu topologického prostoru); *Grp* $\to$ *Set* (ponechá jen nosnou množinu grupy);

   slabší zapomínání: *Banach* $\to$ *Norm* (zapomene úplnost), *Compl. Bool* $\to$ *Bool* (zapomene úplnost vzhledem k uspořádání)
5. *Metr* $\to$ *Compl Metr* (zúplnění) jistá forma "antizapomínámí" – dá se ukázat důležitý fakt, že zúplňování metrického prostoru je funktoriální, tj. dá se rozšířit na morfismy
6. *Order* $\to$ *Compl Lattice* ("zúplnění" vzhledem k danému uspořádání): Dá se ukázat, že MacNeilleovo zúplnění je funktoriální
7. Označme $Comp^{\leftarrow}$ kategorii, jejíž objekty jsou kompaktní prostory a jejíž morfismy "jdou opačným směrem", než v *Comp* (tj. $\alpha\colon a \to b$ v $Comp^{\leftarrow} \iff \alpha\colon b \to a$ je spojité zobrazení). Uvažujme stoneovskou representaci Booleových algeber. Lze ji chápat jako $Bool \to Comp^{\leftarrow}$ a dostáváme funktor, který přiřadí každé Booleově algebře její Stoneův prostor; tento funktor má základní důležitost v teorii Booleových algeber – dá se totiž ukázat, že je to isomorfní funktor na podkategorii $\mathscr{C}$ v $Comp^{\leftarrow}$, která se skládá ze všech kompaktních Hausdorfových 0-dimensionálních prostorů.

Důležitá kategoriální konstrukce, která zobecňuje konstrukci součinu a která se předtím "divoce" vyskytovala na všech matematických strukturách, je konstrukce limity (resp. kolimity) v kategoriích.

Definice: Nechť je dáno $\mathscr{C}$. Nechť I je nějaká malá kategorie (objektů v I je *jen* množina). Nechť $D\colon I \to \mathscr{C}$ je funktor (tzv. diagram v $\mathscr{C}$; pak

$$(L, (l_i)_{i \in Obj\, I}), \text{ kde } l_i\colon L \to D(i)$$

se nazývá *limita diagramu* D, jestliže:

(i) $\forall m : i \to j$ máme $D(m) l_i = l_j$ (komutativní diagram)

(ii) Univerzálnost: Pokud $(\hat{L}, \hat{l}_i)$ má vlastnost (i), pak $\exists !$ morfizmus $k\colon \hat{L} \to L$ tak, že $\hat{l}_i = l_i h\ \forall i \in I$

Všimněme si, že součiny (produkty) jsou limity diskrétních diagramů [nemají vazby (morfizmy) mezi objekty]. Jak se ukazuje, součiny hrají základní roli v konstrukci obecných limit.

Příklady (další důležité limity, resp. kolimity):
Jádro (equalizer) – limita následujícího diagramu

"Pullback" – limita diagramu

Duální pojmy jsou kojádro (coequalizer) a pushout.

Na závěr uvedeme dvě hlubší věty z teorie kategorií. Ukazují sílu kategoriálních konstrukcí (důkazy lze najít v každé monografii z oboru – viz např. McLane).

Věta: $\mathscr{C}$ je úplná ($\mathscr{C}$ má limity všech diagramů) $\iff$ má všechny součiny a jádra a rovněž samozřejmě platí i duální tvrzení: $\mathscr{C}$ je koúplná ($\mathscr{C}$ má kolimity všech diagramů $\iff$ má všechny kosoučiny a kojádra).

Definice: Nechť $\mathscr{A}$ je podkategorie $\mathscr{B}, \mathscr{A}$ je *reflektivní* v $\mathscr{B}$, když

$$\forall B \in \mathscr{B} \text{ existuje } r(B) \in \mathscr{A} \text{ a morfismus } B\colon B \to r(B)$$

tak, že platí: Pokud $\alpha\colon B \to C$ je morfismus v $\mathscr{B}$, pak existuje přesně jeden morfismus $\alpha_r\colon r(B) \to r(C)$ tak, že $\alpha = \alpha_r r_B$. Jestliže každý morfismus r_B $(\forall B \in Obj\mathscr{B})$ je epimorfismus, pak $\mathscr{A}$ se nazývá *epireflektivní*.

Následující pozoruhodná věta říká, že mnohé důležité konstrukce, které se historicky objevily při matematickém výzkumu a které měly většinou "ad hoc" důkazy bez zřetelné vzájemné souvislosti, mají stejnou kategoriální podstatu.

Věta: Následující tvrzení jsou ekvivalentní: Nechť $\mathscr{A}$ je podkategorie $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ je úplná a platí následující (ryze technická, v "praktických" situacích obvykle splněná) podmínka: $\mathscr{A}$ je kategorie lokálně malá a komalá $\equiv$ existuje jen množina morfizmů mezi každými dvěma objekty):

1) $\mathscr{A}$ je epireflektivní [je možné dělat "vylepšovací" (zúplňovací) konstrukce na objekty té větší (tj. horší) kategorie],

2) $\mathscr{A}$ je uzavřená na tvoření součinů a jader v $\mathscr{B}$ (tj. tvoříme-li součiny a jádra v $\mathscr{A}$ způsobem, kterým bychom to dělali v $\mathscr{B}$, zůstaneme v $\mathscr{A}$).

1. Definice. ε, μ jsou třídy morfismů v kategorii A. A je (ε, μ)-kategorie, když:

(1) ε, μ jsou uzavřené na skládání s isomorfismy;

(2) každý A-morfismus f má nějakou faktorisaci $f = m\dot{e}$, kde $m \in \mu, e \in \varepsilon$;

(3) kdykoli čtverec

komutuje a $e \in \varepsilon, m \in \mu$, pak existuje právě jedno $h\colon \beta \to c$ tak, že komutují

2. Definice. Morfismus $f\colon A \to B$ v (ε, μ)-kategorii je

(1) μ-podobjekt β, když $f \in \mu$.

(2) ε-kvocient A, když $f \in \varepsilon$.

3. Definice. (ε, μ)-kategorie A je ε-co-wellpowered, pokud pro každý A-objekt A platí:

existuje množina ε-kvocientů A $\{e_i : A \to A_i \mid i \in I\}$, která representuje všechny ε-kvocienty A, tj. pro libovolný ε-kvocient $e: A \to A'$ existuje $i \in I$ a isomorfismus $f: A' \to A_i$ tak, že

komutuje.

4. Definice. A je (ε, μ)-kategorie, B je úplná podkategorie A, uzavřená na isomorfismy.

(1) B je uzavřená na produkty v A, když platí: jestliže $\{Bi \mid i \in I\}$ je množina B-objektů a pokud $\prod\limits_{i \in I} B_i$ existuje v A, potom $\prod\limits_{i \in I} B_i$ je B-objekt.

(2) B je uzavřená na μ-podobjekty, když platí: jestliže $m: A \to B$ je prvek μ a B je B-objekt, pak A je B-objekt.

Věta. *A je (ε, μ)-kategorie, která má produkty a je ε-co-wellpowered. Ať každý prvek ε je epimorfismus v A. B je úplná podkategorie A, uzavřená na isomorfismy.*

(1) B je ε-reflektivní v A (tj. každá reflexe je ε-kvocient)

(2) B je uzavřená na produkty a μ-podobjekty v A.

Důkaz. (1) $\Rightarrow$ (2).

B je uzavřená na produkty v A:

Úplná reflektivní podkategorie, uzavřená na isomorfismy, je vždy uzavřená na limity.

JINAK: ať $\{B_i \ i \in I\}$ je množina B-objektů, označíme $B = \prod\limits_{i \in I} B_i$ produkt v A a označme $e: B \to \hat{B}$ reflexi. Podle předpokladů je $e \in \varepsilon$, tudíž epimorfismus. Stačí ukázat, že e je isomorfismus. Označme projekce jako $p_i: B \to B_i$. Protože e je reflexe, existuje pro každé $i \in I$ právě jeden morfismus $f_i: \hat{B} \to B_i$ tak, že

(*)

komutuje.

Protože B je produkt $\{B_i \mid i \in I\}$, existuje právě jeden morfismus $f\colon \hat{B} \to B$ tak, že

(**)

komutuje pro všechna $i \in I$.

Z (*) a (**) a vlastností produktu dostáváme, že $f \cdot e = 1_B$. Potom $e \cdot f \cdot e = e$, a tedy $e \cdot f = 1_{\hat{B}}$, protože e je epimorfismus. Celkově $f \cdot e = 1_B$, $e \cdot f = 1_{\hat{B}}$, čili e je isomorfismus.

B je uzavřená na μ-podobjekty v A:

ať $m\colon A \to B$ je prvek μ, kde B je B-objekt. Označme $e\colon A \to \hat{A}$ reflexi A. Stačí ukázat, že e je isomorfismus. Podle předpokladů je $e \in \varepsilon$, tedy epimorfismus. Protože e je reflexe, existuje právě jeden morfismus $f\colon \hat{A} \to B$ tak, že

komutuje. Protože $e \in \varepsilon, m \in \mu$, díky Def. 1 (3) existuje právě jeden morfismus $h\colon \hat{A} \to A$ tak, že

komutuje. Tedy $h \cdot e = 1_A$, a proto $e \cdot h \cdot e = e$. Protože e je epimorfismus, je $e \cdot h = 1_{\hat{A}}$. Tedy e je isomorfismus.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Ať A je libovolný A-objekt. ať $\{f_j\colon A \to B_j \mid j \in J\}$ je třída všech A-morfismů, kde B_j probíhá všechny B-objekty. Podle předpokladů se každé

f_j faktorisuje jako

kde $m_j \in \mu, e_j \in \varepsilon$. Každý objekt $\bar{B}_j$ leží v B, protože B je uzavřeno na μ-podobjekty. Protože A je ε-co-wellpowered, ze třídy všech e_j se dá vybrat množina $\{e_i \,|\, i \in I\}$, která všechna e_j representuje. Označme $B = \prod\limits_{i \in I} \bar{B}_i$. Potom B je B-objekt, protože B je uzavřena na produkty v A.

Z vlastností produktu existuje právě jeden morfismus že

komutuje pro všechna $i \in I$ ($p_i \colon B \to \bar{B}_i$ jsou projekce).

Ať $A \xrightarrow{e} \hat{A} \xrightarrow{m} B$ je faktorisace r, kde $e \in \varepsilon, m \in \mu$. Ukážeme, že $e \colon A \to \hat{A}$ je reflexe A. Především $\hat{A}$ je B-objekt, protože B je B-objekt a $m \in \mu$.

Ať $f \colon A \to B$ je libovolný morfismus, kde B je b-objekt. Potom $f = f_j$ pro nějaké $j \in J$.

Protože množina $\{e_i \colon A \to \bar{B}_i \,|\, i \in I\}$ representuje všechny ε-kvocienty A, existuje $i \in I$ a isomorfismus $h \colon \bar{B}_i \to \bar{B}_j$ tak, že diagram

(+)

komutuje. Podle předchozího komutuje i diagram

(++)

Položme $\hat{f} = m_j \cdot h \cdot p_i \cdot m$. Díky (+) a (++) komutuje diagram

Protože e je epimorfismus, $\hat{f}$ je jediný morfismus s vlastností $\hat{f} \cdot e = f$, tudíž $e \in \varepsilon$ je reflexe objektu A.

Příklady:

1. Kategorie *KompTop*$_2$ kompaktních Hausdorffových prostorů je epireflektivní podkategorie Top (epireflexe – Čechův-Stoneův obal)

2. Kategorie *Úpl* všech úplných svazů je epireflektivní v kategorii Čumů (s morfismy, které zachovávají všechna existující suprema a infima): Kategoriální interpretace McNeilleova zúplnění.

3. Kategorie *Ekv* ekvivalenci na množině je epireflektivní podkategorie kategorie *ReflSym* reflektivních a symetrických relací na množině.

6 Základy teorie Hilbertova prostoru

(věta o projekci, Fourierova řada v Hilbertově prostoru, Rieszova věta o representaci lineárních forem, vlastní hodnoty lineárních zobrazení)

Nechť H je komplexní lineární prostor. Je-li H současně *úplným metrickým* prostorem, ve kterém je metrika (a tedy i norma) zavedena na základě skalárního součinu, nazýváme H Hilbertovým prostorem.

Osvěžme si základní příklady nekonečnérozměrných Hilbertových prostorů.

Příklad 1. Nechť ℓ^2_C označuje množinu všech posloupností $x = \{x_i\}$ komplexních čísel, pro které $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < +\infty$. Zavedeme-li v ℓ^2_C sčítání a násobení (komplexním) číslem obvyklým způsobem, bude ℓ^2_C komplexní lineární prostor. Skalární součin lze definovat takto: Pro $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$

položíme

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i.$$

Vzhledem k tomu, že pro každé n a platí

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |x_i \bar{y}_i| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\bar{y}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\bar{y}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,\end{aligned}$$

vidíme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$ absolutně konverguje a vlastnosti vyžadované v definici skalárního součinu plynou ze známých vět o konvergentních řadách. O tom, že ℓ^2_C je úplný prostor se lze snadno přesvědčit (cauchyovská posloupnost musí být cauchyovská "po souřadnicích" a tudíž konvergentní po souřadnicích, stačí pak ověřit, že získaná posloupnost patří do ℓ^2_C, což je zřejmé).

Příklad 2. Nechť L^2_C označuje množinu všech Lebesgueovsky měřitelných komplexních funkcí $x(t)$, pro které $\int_0^1 |x(t)|^2 \, dt < +\infty$. Při obvyklé definici součtu a násobení komplexním číslem je L^2_C komplexní lineární prostor nekonečné dimenze. Skalární součin definujeme takto:

$$(x, y) = \int_0^1 x(t) \bar{y}(t) \, dt.$$

Existence takto definovaného skalárního součinu je zajištěna nerovností

$$|(x, y)| \leq \int_0^1 |x(t)||y(t)| \, dt \quad \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |y(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Vlastnosti požadované v definici skalárního součinu plynou snadno z vlastností integrálu. Úplnost prostoru L^2_C lze dokázat analogicky jako v případě prostoru L^2 (viz např. V. Jarník, Integrální počet II, Věta 199 či W. Rudin: Functional Analysis).

Jedním z nejdůležitějších pojmů v teorii Hilbertova prostoru je pojem ortogonality. Prvky $x, y \in H$ nazýváme *ortogonální* (a píšeme $x \perp y$), jestliže $(x, y) = 0$. O prvku $x \in H$ říkáme, že je ortogonální k množině $M \subset H$ (píšeme $x \perp M$), jestliže pro $y \in M$ platí $(x, y) = 0$. Množiny $M_1, M_2 \subset H$

nazýváme ortogonálními (píšeme $M_1 \perp M_2$), jestliže $x \in M_1, y \in M_2 \Rightarrow (x, y) = 0$.

Z definice skalárního součinu a relace ortogonality ihned plyne:

$$x \perp y_1, x \perp y_2 \Rightarrow x \perp \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,$$

$$x \perp y_k, y_k \to y \Rightarrow x \perp y.$$

Odtud snadno plyne

$$x \perp M \Rightarrow x \perp \overline{\text{Span (M)}}.$$

Je zřejmé, že množina všech prvků ortogonálních k dané podmnožině M prostoru H tvoří uzavřený podprostor. Uzavřený podprostor všech prvků ortogonálních k uzavřenému podprostoru Q prostoru H nazýváme *ortogonální doplněk podprostoru Q v H*. (Ortogonální doplněk je zvláštním případem doplňku daný uzavřený podprostor spolu s příslušným doplňkem tvoří rozklad prostoru. Tento rozklad nazýváme ortogonálním rozkladem. Opravňuje nás k tomu následující věta.)

Věta (*věta o ortogonálním rozkladu* alias *věta o projekci*): Nechť Q je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Je-li M ortogonální doplněk podprostoru Q v H, je možné každý prvek $x \in H$ vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru $x = y + z$, kde $y \in Q$ a $z \in M$.

Důkaz. Dokažme nejprve jednoznačnost uvedeného vyjádření. Nechť

$$x = y + z, \quad x = y' + z',$$

kde $y, y' \in Q$ a $z, z' \in M$. Potom $y + z = y' + z'$, a tedy $y - y' = z - z'$. Jelikož je $y - y' \in Q$ a $z - z' \in M$, dostáváme

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') = (y - y', z - z') = 0.$$

Odtud $y = y'$ a pak je ovšem také $z = z'$.

Dokážeme existenci uvedeného vyjádření prvku $x \in H$. Je-li $x \in Q$, stačí položit $y = x, z = 0$. Nechť $x \notin Q$. Označme

$$d = \inf_{y' \in Q} \|x - y'\|^2.$$

Nechť $\{y_n\}$ je posloupnost prvků z Q, pro kterou platí

$$\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\|^2 = d.$$

Nechť $h \neq 0$ je libovolný prvek z Q. Pak zřejmě prvek $y_n \in \varepsilon h$ patří do Q pro každé $n \in N$ a pro každé komplexní číslo ε. Dostáváme tedy

$$
\begin{aligned}
d &\leq \|x - (y_n + \varepsilon h)\|^2 = (x - y_n - \varepsilon h, x - y_n - \varepsilon h) \\
&= (x - y_n, x - y_n) - \varepsilon(h, x - y_n) - \bar{\varepsilon}(x - y_n, h) + |\varepsilon|^2 (h, h).
\end{aligned}
$$

Položíme-li $\varepsilon = \frac{(x-y_n,h)}{(h,h)}$, dostaneme ihned

$$d \leq \|x - y_n\|^2 - \frac{|(x - \bar{y}_n, h)|^2}{\|h\|^2}.$$

Odtud plyne, že pro libovolné $h \in Q$ (pro $h = 0$ je vše triviální) platí

$$|(x - y_n, h)| \leq \|h\| \sqrt{\|x - y_n\|^2 - d}.$$

Nyní již snadno dokážeme, že posloupnost $\{y_n\}$ je cauchyovská. Máme vztahy

$$
\begin{aligned}
|(y_n - y_m, h)| &= |(y_n - x + x - y_m, h)| \leq |(y_n - x, h)| + |(x - y_m, h)| \\
&\leq \|h\| \left(\sqrt{\|x - y_n\|^2 - d} + \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d} \right).
\end{aligned}
$$

Položíme-li $h = y_n - y_m$, dostaneme:

$$|y_n - y_m\| \leq \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d} + \sqrt{\|x - y_m\|^2 - d} \to 0.$$

Prostor H je úplný a Q je uzavřený podprostor H, a tedy existuje $y \in Q$ tak, že $y_n \to y$. Limitním přechodem v nerovnosti $|(x - y_n, h)| \leq \|h\| \sqrt{\|x - y_n\|^2 - d}$ dostaneme, že pro každé $h \in Q$ platí $(x - y, h) = 0$. Odtud plyne, že $x - y \in M$. Položíme-li $z = x - y$, dostaneme žádaný výsledek

$$x = y + z, \quad y \in Q, z \in M.$$

Poznámka.

$$\|x - y\|^2 = \|x - \lim_{n \to \infty} y_n\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\|^2 = d.$$

Důsledek. Nechť M je podprostor prostoru H. K tomu, aby $\bar{M} = H$, je nutné a stačí, aby neexistoval nenulový prvek z H ortogonální k M.

Důkaz. Nechť $\overline{M} = H$ a nechť $x \perp M$. Ukázali jsme, že $x \perp M \Rightarrow x \perp \overline{M} \Rightarrow x \perp H \Rightarrow x \perp x \Rightarrow x = O$. Nechť $\overline{M} \neq H$. Potom existuje $x \in H, x \notin \overline{M}$.

Podle předchozí věty $x = y + z$, kde $y \in \bar{M}$ a $z \perp \overline{M}$. Ovšem $z \neq 0$, neboť $x \notin \overline{M}$.

Posloupnost $\{\omega_k\}$ nenulových prvků Hilbertova prostoru H nazýváme *ortogonální systém*, jestliže prvky tohoto systému jsou navzájem ortogonální, tj. jestliže pro $k \neq p$ je skalární součin $(\omega_k . \omega_p) = 0$. Ortogonální systém nazýváme *ortonormální*, jestliže pro každé $k \in N$ je $\|\omega_k\| = 1$, tj. jestliže $(\omega_k, \omega_p) = \delta_{kp}$.

Příkladem ortogonálního systému může být tzv. trigonometrický systém

$$\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$$

v reálném prostoru $P^2_{2\pi}$ těch měřitelných funkcí $x(t)$ s periodou 2π, které vyhovují podmínce $\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 \, dt < +\infty$. Skalární součin je dán takto:

$$(x, y) = \int_0^{2\pi} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Užitím vzorců

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta),\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta),\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

ihned ověříme, že platí

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \, dt = \int_0^{2\pi} \sin kt \, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \sin kt \, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos kt \cos pt \, dt = \int_0^{2\pi} \sin kt \sin pt \, dt = 0 \qquad \text{pro } k \neq p,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kt \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 kt \, dt = \pi,$$

Tedy zmíněný trigonometrický systém je ortogonálním systémem v $P_{2\pi}$. Vidíme rovněž, že systém

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

je ortonormálním systémem v $P^2_{2\pi}$.

V prostoru L^2_C je příkladem ortonormálního systému systém

$$\left\{e^{2\pi jnt}\right\}, \quad n \text{ celé číslo}, j \text{imaginární jednotka}).$$

Nechť $\{\omega_k\}$ je ortogonální systém v Hilbertově prostoru H a nechť $x \in H$. Pokusme se najít nejlepší aproximaci prvku x lineárními kombinacemi prvních n členů ortogonálního systému $\{\omega_k\}$, tj. snažme se výběrem koeficientů α_k minimalizovat výraz

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2.$$

Vzhledem k tomu, že pro $k \neq p$ máme $(\omega_k, \omega_p) = 0$, dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2 &= \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\right) \\
&= (x,x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\omega_k, x) - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k (x, \omega_k) + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 (\omega_k, \omega_k) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} + \sum_{k=1}^{n} \left|\alpha_k \|\omega_k\| - \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|}\right|^2.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že výraz $\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2$ nabývá minimální hodnoty pro $\alpha_k = \dfrac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2}$.

Takto volená čísla α_k nazýváme *Fourierovy koeficienty* prvku (vektoru) x vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\omega_k\}$. Je-li systém $\{\omega_k\}$ ortonormální, mají Fourierovy koeficienty prvku x tvar

$$\alpha_k = (x, \omega_k).$$

Jsou-li α_k Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\omega_k\}$, dostáváme:

$$0 \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2},$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} \leq \|x\|^2.$$

Jelikož poslední nerovnost platí pro každé přirozené $n \in N$, platí také nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(x, \omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} \leq \|x\|^2.$$

Tato nerovnost je známa pod názvem *Besselova nerovnost.*

Jsou-li α_k Fourierovy koeficienty prvku x vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\omega_k\}$, pak řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ nazýváme *Fourierova řada prvku x* vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\omega_k\}$.

Věta. Fourierova řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ prvku $x \in H$ konverguje v H, tj. existuje takový prvek $x' \in H$, že $x' = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ v H.

Důkaz. Vzhledem k úplnosti Hilbertova prostoru lze užít jako kriteria konvergence Bolzano–Cauchyovy podmínky. Zkoumáme konvergenci posloupnosti částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$. Pak

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_p\|^2 &= \|\alpha_{n+1}\omega_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}\omega_{n+p}\|^2 \\
&= (\alpha_{n+1}\omega_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}\omega_{n+p}, \alpha_{n+1}\omega_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}\omega_{n+p}) \\
&= |\alpha_{n+1}|^2\|\omega_{n+1}\|^2 + \cdots + |\alpha_{n+p}|^2\|\omega_{n+p}\|^2 \\
&= \left(\frac{|(x, \omega_{n+1})|}{\|\omega_{n+1}\|^2}\right)^2 \|\omega_{n+1}\|^2 + \cdots + \left(\frac{|(x, \omega_{n+p})|}{\|\omega_{n+p}\|^2}\right)^2 \|\omega_{n+p}\|^2 \\
&= \frac{|(x, \omega_{n+1})|^2}{\|\omega_{n+1}\|^2} + \cdots + \frac{|(x, \omega_{n+p})|^2}{\|\omega_{n+p}\|^2}.
\end{aligned}$$

Poslední výraz je podle Besselovy nerovnosti úsekem konvergentní řady. Tudíž řada $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ konverguje.

Studujme nyní otázku, kdy součet Fourierovy řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, \omega_k)}{\|\omega_k\|^2} \omega_k$$

je roven vektoru x. Dostáváme postupně

$$
\begin{aligned}
x &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \omega_k\|^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2}.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že rovnost $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k$ nastane právě tehdy, nastává-li v Besselově nerovnosti rovnost, tj. je-li

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x,\omega_k)^2}{\|\omega_k\|^2} = \|x\|^2.
$$

Poslední vztah nazýváme *Parsevalova rovnost.*

Platí-li Parsevalova rovnost, dostáváme rovnost (vH)

$$
x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \omega_k.
$$

Odtud plyne, že $x \in \overline{\mathrm{Span}}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$. Naopak, nechť $x \in \overline{\mathrm{Span}}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$. Pak existují $x_n \in \mathrm{Span}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$ tak, že $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ale $\mathrm{Span}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$ je tvořen lineárními kombinacemi vektorů $\omega_1, \omega_2, \dots$, a tedy $x_n = \sum\limits_{k=1}^{p_n} \mathrm{Span}\,{}_{\mathrm{k}}^{(\mathrm{n})} \omega_{\mathrm{k}}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \dots$. Uvědomíme-li si, že lineární kombinace s Fourierovými koeficienty dávají nejlepší aproximaci, snadno nahlédneme, že platí:

$$
\|x - \sum_{k=1}^{p_n} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2} \omega_k\|^2 \le \|x - x_n\|^2 \to 0.
$$

Odtud plyne, že vybraná posloupnost posloupnosti částečných součtů Fourierovy řady vektoru x (která je ovšem cauchyovská) konverguje k x. Tudíž i celá Fourierova řada prvku x konverguje k x.

Všimněme si ještě, že prvek $x^* = x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2} \omega_k$ je ortogonální ke všem prvkům příslušného ortogonálního systému $\{\omega_k\}$:

$$
\begin{aligned}
(x^*, \omega_p) &= \left(x - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2}\omega_k, \omega_p \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2}\omega_k, \omega_p \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[(x,\omega_p) - \frac{(x,\omega_p)}{\|\omega_p\|^2} \cdot (\omega_p, \omega_p) \right] = 0.
\end{aligned}
$$

Existuje-li tedy prvek, který není součtem své Fourierovy řady, existuje také nenulový prvek ortogonální ke všem prvkům ortogonálního systému $\{\omega_k\}$. Obráceně, existuje-li nenulový prvek $x \in H$ ortogonální ke všem prvkům ortogonálního systému $\{\omega_k\}$, není x součtem své Fourierovy řady vzhledem k $\{\omega_k\}$, neboť všechny Fourierovy koeficienty jsou v tomto případě rovny nule, takže jde o součet řady nulových vektorů.

Shrneme dosažené výsledky do následující věty:

Věta. Nechť $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ je ortogonální systém v Hilbertově prostoru H. Následující podmínky 1. – 4. jsou navzájem ekvivalentní:

1. $x \in H \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(x,\omega_k)|^2}{\|\omega_k\|^2} = \|x\|^2,$

2. $x \in H \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x,\omega_k)}{\|\omega_k\|^2}\omega_k,$

3. $H = \mathrm{Span}\,(\omega_1, \omega_2, \dots)$,

4. $(x, \omega_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \Rightarrow x = 0.$

Platí-li některá z uvedených podmínek, nazýváme ortogonální systém $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ *úplným.*

Věta (Grammův–Schmidtův ortogonalizační proces). V každém separabilním Hilbertově prostoru H existuje úplný ortogonální systém.

Důkaz. 1. Separabilita prostoru H zaručuje existenci posloupnosti $\{x_n\}$, která je hustá v H. Můžeme předpokládat, že $\{x_n\}$ je prostá posloupnost.

Z této posloupnosti sestrojíme úplný ortogonální systém v H. Je-li $x_1 = O$, položíme $n_1 = 2$ a $y_1 = x_1$. Pokud $x_1 \neq 0$, položíme $n_1 = 1$ a $y_1 = x_1$.

Zřejmě je Span $(\mathrm{x_1, x_{n_1}}) = \mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1})$. Nechť dále $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ a nechť $y_1, y_2, \ldots, y_k$ jsou takové lineárně nezávislé vektory, že Span $(\mathrm{x_1, x_2, \ldots, x_{n_k}})$ $= \mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, y_2, \ldots, y_k})$. Ježto konečněrozměrný prostor nemůže být hustý v H, nemohou patřit všechny členy posloupnosti $\{x_n\}$ do Span $(\mathrm{y_1, y_2, \ldots, y_k})$ a existuje tudíž index $m > n_k$ tak, že x_m není lineární kombinací prvků $x_1, \ldots, x_{n_k}$. Za index n_{k+1} zvolíme nejmenší index m s uvedenou vlastností a položíme $y_{k+1} = x_{n_{k+1}}$. Vektory $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}$ jsou potom lineárně nezávislé a platí Span $(\mathrm{x_1, \ldots, x_{n_{k+1}}}) = \mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, \ldots, y_{k+1}})$. Zkonstruovali jsme tedy posloupnost $\{y_k\}$ lineárně nezávislých vektorů tak, že pro každé $k \in N$ platí Span $(\mathrm{x_1, \ldots, x_{n_k}}) = \mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, \ldots, y_k})$. Vzhledem k tomu, že

$$\begin{aligned} \mathrm{Span}\,(\mathrm{x_1, x_2, \ldots}) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Span}\,(\mathrm{x_1, \ldots, x_{n_k}}), \\ \mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, y_2, \ldots}) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, \ldots, y_k}), \end{aligned}$$

dostáváme

$$\mathrm{Span}\,(\mathrm{x_1, x_2, \ldots}) = \mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, y_2, \ldots})$$

a vzhledem k hustotě $\{x_n\}$ v H platí $\overline{\mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, y_2, \ldots})} = H$.

2. Zbývá s použitím posloupnosti $\{y_n\}$ vytvořit ortogonální systém $\{z_n\}$ tak, aby

$$\mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, y_2, \ldots}) = \mathrm{Span}\,(\mathrm{z_1, z_2, \ldots}).$$

Položme $z_1 = y_1$. Pak Span $(\mathrm{y_1}) = \mathrm{Span}\,(\mathrm{z_1})$. Nechť dále $z_1, \ldots, z_n$ jsou takové nenulové ortogonální vektory, že Span $(\mathrm{y_1, y_2, \ldots, y_n})$ $=$ Span $(\mathrm{z_1, z_2, \ldots, z_n})$. Vektor z_{n+1} určíme z následujících podmínek:

$$z_{n+1} = \alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n + y_{n+1}, \qquad (z_{n+1} z_k) = 0;\ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Zřejmě

$$(z_{n+1}, z_k) = (\alpha_1 z_1 + \cdots + \alpha_n z_n + y_{n+1}, z_k) = \alpha_k (z_k, z_k) + (y_{n+1}, z_k).$$

Odtud plyne, že uvedené podmínky jsou splněny pro

$$\alpha_k = \frac{(y_{n+1}, z_n)}{(z_k, z_k)}.$$

Ze známého Steinitzova lemma o záměně plyne, že

$$\mathrm{Span}\,(\mathrm{y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}}) = \mathrm{Span}\,(\mathrm{z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}}).$$

Odtud již stejným způsobem jako při konstrukci posloupnosti $\{y_k\}$ dostaneme

$$\overline{\text{Span}\,(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \dots)} = H.$$

Chceme-li zavést úplný ortonormální systém $\{u_1, u_2, \dots\}$, položíme

$$u_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}.$$

Příklady. Definujme $L^2_V(a,b)$ jako "prostor s váhou $V(t)$": Je-li $V(t)$ nezáporná měřitelná funkce na (a,b), je $L^2_V(a,b) = \int_a^b V(t)\, f^2(t)\, dt < +\infty$ a skalární součin je definován tak, že $(f,g) = \int_a^b V(t)\, f(t)\, g(t)\, dt$. Dá se ukázat, že $L^2_V(a,b)$ je úplný (tj. Hilbertův) prostor. V reálném prostoru $L^2_V(a,b)$ je systém funkcí

$$y_n(t) = t^n; \quad n = 0, 1, \dots$$

lineárně nezávislý. Z tohoto systému lze ortogonalizací popsanou v druhé části důkazu předcházející věty získat ortogonální systém funkcí (polynomů)

$$z_n(t) = \sum_{k=0}^{n} lambda_k^{(n)} t^k, \quad \lambda_n^{(n)} \neq 0, \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Je-li $a = -1, b = 1, V(t) = 1$, nazýváme $z_n(t)$ *Legendreovy polynomy*, je-li $a = -1, b = 1, V(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$, nazýváme $z_n(t)$ *Jacobiovy polynomy* a je-li v posledním případě $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, hovoříme o tzv. *Čebyševových polynomech.* Při $a = 0, b = +\infty, V(t) = e^{-t}$ dostaneme tzv. *Laguerrovy polynomy* a při $a = -\infty, b = +\infty, V(t) = e^{-t^2}$ tzv. *Hermiteovy polynomy.* (Pro bližší seznámení se s uvedenými systémy ortogonálních polynomů odkazujeme čtenáře ke knize V. Jarníka Integrální počet II, kap. XIV, par. 9 a 10, či W. Rudin: Functional Analysis.)

Věta. Separabilní komplexní (resp. reálný) Hilbertův prostor H je izomorfní a izometrický s prostorem ℓ^2_C (resp. ℓ^2).

Důkaz. Ukážeme, že odpovídající izomorfní a izometrické zobrazení φ prostoru H na porstor ℓ^2_C je dáno tímto předpisem: Pro $x \in H$ položíme

$$\varphi(x) = \{(x, \omega_k)\}_{k=1}^{\infty},$$

kde $\{(x,\omega_k)\}_{k=1}^{\infty}$ je úplný ortonormální systém v H. Jeho existenci máme zajištěnu předchozí větou.

Z Besselovy nerovnosti ihned plyne, že $\varphi(x) \in \ell_C^2$. Odtud plyne, že φ je zobrazení H do ℓ_C^2. Přitom platí

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \{(x+y,\omega_k)\}_{k=1}^{\infty} = \\
&= \{(x,\omega_k)\}_{k=1}^{\infty} + \{(y,\omega_k)\}_{k=1}^{\infty} = \varphi(x)+\varphi(y), \\
\varphi(\lambda x) &= \{(\lambda x,\omega_k)\}_{k=1}^{\infty} = \lambda\{(x,\omega_k)\}_{k=1}^{\infty} = \lambda\varphi(x).
\end{aligned}$$

Na základě Parsevalovy rovnosti dostaneme:

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x,\omega_k)|^2,$$

a z definice $\varphi(x)$ vyplývá

$$\|\varphi(x)\|_{\ell_K^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x,\omega_k)|^2.$$

Zbývá dokázat, že jde o zobrazení prostoru H na prostor ℓ_C^2. Nechť $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_C^2$. Potom řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k\omega_k$ konverguje, neboť je-li např. $m > n$, pak platí

$$\|\sum_{k=1}^{n} y_k\omega_k - \sum_{k=1}^{n} y_k\omega_k\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} y_k\omega_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |y_k|^2,$$

a je tedy splněna Bolzano-Cauchyova podmínka konvergence. Tím je dokázána existence takového prvku $x \in H$, že platí

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k\omega_k.$$

Pak ale dostáváme

$$(x,\omega_p) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k\omega_k, \omega_p\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\omega_k, \omega_p\right) = y_p,$$

což znamená, že $\varphi(x) = y$.

Budiž f lineární a spojitý funkcionál na H, tj. budiž $f\colon H \to C$ (resp. $f\colon H \to R$) je lineární a spojitá. Definice linearity a spojitosti jsou stejné jako v reálném případě. To ovšem neznamená, že platí všechna dříve dokázaná tvrzení pro reálné normované prostory (např. aditivní a spojitý funkcionál nemusí být homogenní). Platí však následující pozoruhodná věta.

Věta (Rieszova reprezentační věta). Každý lineární spojitý funkcionál f definovaný na Hilbertově prostoru H lze vyjádřit ve tvaru skalárního součinu

$$f(x) = (x, u),$$

kde prvek $u \in H$ je určen funkcionálem f jednoznačně. Přitom

$$\|f\| = \|u\|.$$

Důkaz. Budiž f lineární spojitý funkcionál na H. Položme

$$Q = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Z linearity a spojitosti f plyne, že Q je uzavřený podprostor H. Zvolme $x' \in H - Q$. Podle jedné z předchozích vět existuje $y' \in Q$ a $z' \perp Q$ tak, že

$$x' = y' + z'.$$

Zřejmě $f(z') \neq 0$. Položme $z_1 = \dfrac{z'}{f(z')}$. Pak zřejmě $f(z_1) = 1$. Budiž x libovolný prvek z H. Označme $f(x) = \alpha$. Zřejmě

$$0 = f(x) - \alpha f(z_1) = f(x - \alpha z_1).$$

Je tedy $x - \alpha z_1 \in Q$ a označíme-li $y = x - \alpha z_1$, můžeme psát

$$x = y + \alpha z_1.$$

Odtud plyne, že ortogonální doplněk podprostoru Q je jednorozměrný podprostor generovaný prvkem z_1. Dále

$$\begin{aligned} (x, z_1) &= (y + \alpha z_1, z_1) = (y, z_1) + \alpha(z_1, z_1) \\ &= \alpha\|z_1\|^2 = f(x)\|z_1\|^2, \end{aligned}$$

a tedy

$$f(x) = \left(x, \frac{z_1}{\|z_1\|^2}\right).$$

Označíme-li $u = \dfrac{z_1}{\|z_1\|^2}$, dostaneme pro každé $x \in H$

$$f(x) = (x, u).$$

Dokažme jednoznačnost tohoto vyjádření. Nechť pro každé $x \in H$ je

$$f(x) = (x, u), \qquad f(x) = (x, v);$$

potom

$$0 = (x, u) - (x, v) = (x, u - v)$$

pro každé $x \in H$. Odtud $u = v$.

Dokažme, že $\|f\| = \|u\|$. Nejprve je zřejmé, že

$$|f(x)| = |(x, u)| \leq \|x\|\|u\|,$$

a tedy

$$\|f\| \leq \|u\|.$$

Kromě toho

$$|f(u)| = |(u, u)| = \|u\|^2,$$

a tedy

$$\|f\| = \|u\|.$$

Poznámka. Snadno nahlédneme, že předpis

$$\varphi(x) = (x, u),$$

kde u je pevně vzatý prvek z H, definuje lineární spojitý funkcionál a že $\|\varphi\| = \|u\|$. Vidíme tedy, že prostor H^* je izometrický s prostorem H, kde H^* označuje prostor adjungovaný k H ve smyslu definice uvedené v 3 ????. Avšak výše definované zobrazení $f \leftrightarrow u$ není izomorfním zobrazením prostoru H^* na H. Odpovídá-li totiž prvku $f \in H^*$ prvek $u \in H$, nemusí prvku λf odpovídat prvek λu:

$$\begin{aligned} f \leftrightarrow u \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) = (x, u), \\ \lambda f \leftrightarrow v \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda f(x) = (x, v), \end{aligned}$$

ale

$$\lambda f(x) = f(\lambda x) = (\lambda x, u) = (x, \overline{\lambda} u),$$

takže prvku λf odpovídá prvek $\overline{\lambda} u$. Abychom mohli říci, že uvažované zobrazení je izomorfní, musíme v prostoru H pozměnit definici násobení číslem (komplexním). Zřejmě stačí položit

$$g = \lambda f \Leftrightarrow g(x) = \overline{\lambda} f(x).$$

V dalším textu budeme chápat prostor H^* v právě uvedeném smyslu.

6.1 Vlastní hodnoty lineárních zobrazení v Hilbertově prostoru

V tomto paragrafu naznačíme, jak lze zobecnit teorii samoadjungovaných (či symetrických) matic na Hilbertův prostor. Připomeňme nejprve (viz poznámka za Rieszovou větou), že ke každému funkcionálu $f \in H^*$ existuje právě jeden bod $F(f) \in H$ tak, že pro všechna $x \in H$ je

$$f(x) = (x, F(f)). \tag{1}$$

Dokázali jsme též, že zobrazení F je izometrické izomorfní zobrazení H^* na H. Protože prostory H a H^* jsou izometrické a izomorfní, nelze je z hlediska funkcionální analýzy rozlišit. To nám dává možnost ztotožnit lineární omezený funkcionál f s příslušným bodem $F(f)$, tj. místo $F(f)$ psát f. Místo (1) pak můžeme psát

$$f(x) = (x, f). \tag{2}$$

Nechť A je libovolné lineární omezené zobrazení H do H. Pak je

$$(A^*f)(x) = f(Ax) = (Ax, F(f)),$$

ale také

$$(A^*f)(x) = (x, F(A^*f)).$$

Z toho plyne rovnost

$$(x, F(A^*f)) = (Ax, Ff). \tag{3}$$

Jestliže nerozlišujeme mezi g a $F(g)$ (kde $g \in H^*$), lze místo (3) psát

$$(x, A^*f) = (Ax, f). \tag{4}$$

Jinými slovy: Píšeme-li hodnoty (v bodech $x \in H$) lineárních omezených funkcionálů na H ve tvaru skalárních součinů (x, y), je zobrazení adjungované k zobrazení A určeno rovností

$$(x, A^*y) = (Ax, y) \qquad \text{pro všechna } x \in H. \tag{5}$$

(Jak snadno nahlédneme, určuje (5) - při daném $y \in H$ - hodnotu A^*y jednoznačně; adjungované zobrazení je nyní lineárním omezeným zobrazením H do H.)

Snadno lze dokázat, že

$$\begin{aligned}
(A_1 + A_2)^* &= A_1^* + A_2^*, \\
(\lambda A)^* &= \overline{\lambda} A^*, \\
(A_1 * A_2)^* &= A_2^* * A_1^*.
\end{aligned}$$

Velmi důležité jsou tzv. *samoadjungovaná lineární zobrazení* $A \in (H \to H)$. Jsou to zobrazení splňující rovnost $A^* = A$, tj. rovnost

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

pro všechna $x, y \in H$.

Příklad 1. Jak víme, každému lineárnímu zobrazení přísluší $A\colon C^n \to C^n$ (resp. $A\colon R^n \to R^n$) jistá matice (a_{ij}) $i, j = 1, 2, \dots, n$ v tom smyslu, že rovnost $y = Ax$ (kde $x = \{x_k\}_{k=1}^n$, $y = \{y_k\}_{k=1}^n$) je ekvivalentní se systémem rovností

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Adjungovanému zobrazení přísluší v témže smyslu matice, transponovaná k (a_{ij}). Pro reálné lineární zobrazení je podmínka $A = A^*$ je tedy ekvivalentní s podmínkou, že matice (a_{ij}) je symetrická.

Příklad 2. Je-li integrální operátor dán jádren $K(s,t)$, je adjungovaný operátor dán jádrem $L(s,t) = \overline{K(t,s)}$. Podmínka $A = A^*$ je ekvivalentní s podmínkou $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$.

Buď A samoadjungované zobrazení H do H. Společnou hodnotu výrazů (Ax, y) s (x, Ay) označme $A(x, y)$. Platí pak

$$\begin{aligned} A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) &= \lambda_1 A(x_1, y) + \lambda_2 A(x_2, y), \\ A(x, y) &= \overline{A(y, x)}. \end{aligned}$$

Takový funkcionál $A(x, y)$ na kartézském součinu $H \times H$ budeme nazývat *bilineární hermiteovská forma.* Tato forma je omezená v tom smyslu, že platí

$$|A(x, y)| \le \|A\| \, \|x\| \, \|y\|.$$

Položíme-li $y = x$, dostaneme kvadratickou formu

$$A(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax).$$

Vzhledem k tomu, že pro samoadjungovaná zobrazení A platí

$$\overline{(y, Ax)} = (Ax, y) = (x, Ay),$$

pro každé x dostáváme, že $A(x, x) = (Ax, x) = \overline{(Ax, x)}$ je reálné číslo.

Označme

$$m = \inf_{\|x\|=1} A(x,x), \quad K = \sup_{\|x\|=1} A(x,x), \quad L = \sup_{\|x\|=1} |A(x,x)|. \tag{6}$$

Zřejmě platí

$$L = \max(|m|, |M|). \tag{7}$$

Protože pro všechna x, pro něž je $\|x\| = 1$, platí

$$m \leq A(x,x) \leq M.$$

Pro všechna $x \neq 0$ máme rovněž

$$m \leq A\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right) \leq M.$$

Odtud plyne, že

$$m\|x\|^2 \leq A(x,x) \leq M\|x\|^2, \tag{8}$$

a to pro všechna $x \in H$ (pro $x = 0$ je (8) triviální). Snadno nahlédneme, že čísla m, K definovaná v (6), mají tu vlastnost, že m resp. K je největší resp. nejmenší konstanta, pro kterou platí první resp. druhá nerovnost v (8) v celém H. Z podmínek (8) dále plyne, že

$$|A(x,x)| \leq L\|x\|^2, \tag{9}$$

pro všechna $x \in H$, přičemž číslo L definované v (6) je nejmenší konstantou, pro kterou (9) platí v celém H.

Dokažme, že

$$L = \|A\|. \tag{10}$$

Protože

$$|A(x,x)| \leq \|A\| \, \|x\|^2$$

platí pro všechna $x \in H$, a protože N je nejmenší konstantou, pro niž (9) platí v celém H, je $L \leq \|A\|$. Důkaz obrácené nerovnosti je komplikovanější: Přímým výpočtem zjistíme, že pro každé $\lambda > 0$ máme

$$\begin{aligned} &A(\lambda x \pm \frac{1}{\lambda}Ax, \lambda x \pm \frac{1}{\lambda}Ax) \\ &= \lambda^2(Ax,x) \pm 2\|Ax\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}(A^2x, Ax) \end{aligned}$$

(neboť $(A^2x, x) = (Ax, Ax) = \|Ax\|^2$), a tudíž

$$\begin{aligned} 4\|Ax\|^2 &= A(\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax, \lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax) - \\ &\quad -A(\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax, \lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax) \\ &\leq L\left[\|\lambda x + \frac{1}{\lambda}Ax\|^2 + \|\lambda x - \frac{1}{\lambda}Ax\|^2\right] \\ &= 2L\left[\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2\right]. \end{aligned}$$

Předpokládejme nejdříve, že $\|Ax\| \neq 0$ (takže rovněž $\|x\| \neq 0$). Výraz $\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2$ má derivaci podle λ rovnou

$$\frac{2}{\lambda^3}\|x\|^2\left(\lambda^4 - \frac{\|Ax\|^2}{x^2}\right);$$

tento výraz je záporný, když $\lambda \in \left(0, \sqrt{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}\right)$, kladný, když $\lambda > \sqrt{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$. Funkce $\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2$ proměnné λ má tedy v intervalu $(0, +\infty)$ absolutní minimum, kterého nabývá v bodě $\lambda = \sqrt{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$. Dosadíme-li toto λ do vztahu

$$4\|Ax\|^2 \leq 2L\left[\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Ax\|^2\right],$$

dostaneme ihned nerovnost

$$4\|Ax\|^2 \leq 4N\|Ax\|\,\|x\|,$$

a tedy $\|Ax\| \leq L\|x\|$. Tato nerovnost platí ovšem i v případě, že $\|Ax\| = 0$, a plyne z ní, že $\|A\| \leq L$, což jsme měli dokázat.

Číslo λ nazýváme *vlastní hodnotou* lineárního zobrazení A, existuje-li nenulové x tak, že

$$Ax = \lambda x, \tag{11}$$

tj. má-li rovnice

$$(A - \lambda I)x = 0$$

netriviální řešení. Je-li λ vlastní hodnotou zobrazení A, nazýváme každé řešení předchozích dvou rovnic *vlastním vektorem*, příslušným k vlastní hodnotě λ. Množina všech vlastních vektorů, příslušných k dané vlastní hodnotě λ, je lineární prostor kladné (případně nekonečné) dimenze.

Číslo 0 je vlastní hodnotou lineárního zobrazení A právě tehdy, když rovnice $Ax = 0$ má netriviální řešení, tj. když A není prosté zobrazení.

Je-li x vlastním vektorem příslušným k vlastní hodnotě λ, je také αx vlastním vektorem příslušným k λ. Z toho plyne, že každé vlastní hodnotě λ příslušejí také jisté vlastní vektory mající normu 1. Buď x takový vektor. Protože platí

$$A(x,x) = (Ax,x) = (\lambda x,x) = \lambda\|x\|^2 = \lambda,$$

a protože kvadratická forma $A(x,x)$ nabývá jen reálných hodnot, je λ reálné. Kromě toho je $m \leq \lambda \leq K$.

Dostáváme tedy tvrzení: Vlastní hodnoty samoadjungovaného zobrazení jsou reálné a leží v intervalu $< m, L >$. Dále platí: Je-li $x_j (j = 1,2)$ vlastní vektor příslušný k vlastní hodnotě λ_j samoadjungovaného zobrazení A, pak platí

$$\lambda_1(x_1,x_2) = (Ax_1,x_2) = (x_1,Ax_2) = \lambda_2(x_1,x_2).$$

Je-li tedy $\lambda_1 \neq \lambda_2$, je nutně $(x_1,x_2) = 0$. Tím jsme dokázali, že vlastní vektory, příslušné různým vlastním hodnotám samoadjungovaného zobrazení A, jsou navzájem ortogonální.

Obraťme se k metodám, kterými lze najít vlastní hodnoty daného zobrazení A. Platí tato věta:

Věta. Nechť A je samodajungované zobrazení H do H. Je-li $x_0 \in H$ vektor, pro který platí

$$\|x_0\| = 1, \qquad |(Ax_0,x_0)| = L$$

(tj. x_0 je bod, v němž funkce $|(A(x,x)|$ nabývá na jednotkové svéře svého maxima), je $\lambda_0 = (Ax_0,x_0)$ vlastní hodnotou zobrazení A. Vektor x_0 je vlastním vektorem příslušným k vlastní hodnotě a kromě toho $\|Ax_0\| = \|A\|$ (tj. i reálné funkce $\|Ax\|$ nabývá na jednotkové sféře svého maxima v bodě x_0).

Mějme splněny shora vyslovené předpoklady. Protože

$$|A(x_0,x_0)| \leq \|Ax_0\|\,\|x_0\| = \|Ax_0\| \leq \|A\|,$$

dostáváme

$$\|Ax_0\| = \|A\|.$$

Protože

$$\begin{aligned}\|Ax_0 - \lambda_0 x_0\|^2 &= \|Ax_0\|^2 - 2\lambda_0(Ax_0, x_0) + \lambda_0^2 \\ &= \|Ax_0\|^2 - \text{Span}\,{}_0^2 = 0,\end{aligned}$$

vidíme, že λ_0 je vlastní hodnotou a vektor x_0 je k ní příslušným vlastním vektorem.

Absolutní hodnota kvadratické formy $A(x, x)$ nemusí ovšem obecně na jednotkové sféře nikde nabývat svého maxima. Platí však následující důležité tvrzení: (Připomeňme, že zobrazení se nazývá *totálně omezené*, jestliže zobrazuje omezenou množinu na totálně omezenou. Pro zobrazení do konečnědimenzionálních prostorů ovšem totálně omezené zobracení znamená přesně zobrazení spojité.)

Věta. Je-li A samoadjungované totálně omezené zobrazení H do H, existuje vektor x_0 tak, že $\|x_0\| = 1$ a $|(Ax_0, x_0)| = L$.

Důkaz. Zvolme body x_n tak, že platí

$$\|x_n\| = 1 \quad \text{a} \quad |(Ax_n, x_n)| \to L.$$

Vzhledem k tomu, že lze přejít ke vhodně vybrané posloupnosti, lze bez újmy obecnosti předpokládat, že existuje

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n, x_n) = \lambda_0.$$

Protože posloupnost $\{x_n\}$ je omezená a protože zobrazení A je totálně omezené, lze vybrat posloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že $\{Ax_{n_k}\}$ konverguje. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že existuje

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = y_0.$$

Je-li $\lambda_0 = 0$, je i $\|A\| = L = |\lambda_0| = 0$. A je nulové zobrazení a za x_0 lze vzít jakýkoliv jednotkový vektor. Nechť tedy $\lambda_0 \neq 0$. Protože

$$\|Ax_n\|^2 \leq \|A\|^2 = L^2 = \lambda_0^2$$

pro každé n, platí

$$\|y_0\|^2 \leq \lambda_0^2. \tag{12}$$

Protože však také platí

$$0 \le \|Ax_n - \lambda_0 x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2\lambda_0(Ax_n, x_n) + \lambda_0^2 \to \|y_0\|^2 - \lambda_0^2, \tag{13}$$

je $\|y\|^2 = \lambda_0^2$, takže $\|Ax_n - \lambda_0 x_n\| \to 0$. Z toho plyne dále, že posloupnost $\{\lambda_0 x_n\}$ má stejnou limitu jako posloupnost $\{Ax_n\}$, tedy limitu rovnou y_0. Protože $\lambda_0 \neq 0$, existuje i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Zřejmě $\|x_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$, a tedy

$$|(Ax_0, x_0)| = \lim_{n\to\infty} |(Ax_n, x_n)| = |\lambda_0| = L.$$

Tím je věta dokázána.

Předcházející dvě věty nám dávají možnost najít vlastní hodnotu λ_0 samoadjungovaného totálně omezeného zobrazení A, pokud umíme rozřešit problém nalezení maxima absolutní hodnoty kvadratické formy (Ax, x) na jednotkové sféře v H. Ukážeme, že takto ("metodou extrémů" kvadratické formy) lze najít všechny vlastní hodnoty zobrazení A.

Buď A opět samoadjungované totálně omezené zobrazení H do H. Najděme podle předcházející věty vektor x_0, pro který je $\|x_0\| = 1, |(Ax_0, x_0)| = L$. Jak již víme, je pak číslo $\lambda_0 = (Ax_0, x_0)$ vlastní hodnotou zobrazení A a x_0 příslušným vlastním vektorem.

Označme

$$H_1 = \{x \in H \colon (x, x_0) = 0\}.$$

Pak H_1 je uzavřený podprostor prostoru H, který obecně má nekonečnou dimenzi. Prostor H_1 je tedy opět Hilbertův prostor. Protože pro $x \in H_1$ platí

$$(Ax, x_0) = (x, Ax_0) = (x, \lambda_0 x_0) = \lambda_0 (x, x_0) = 0$$

dostáváme $A(H_1) \subset H_1$. Zobrazení A/H_1 (tj. A zúžené na H_1) je tedy samoadjungovaným totálně omezeným zobrazením H_1 do H_1. Podle předcházející věty existuje tedy vektor $x_1 \in H_1$ tak, že

$$\|x_1\| = 1, \quad |(Ax_1, x_1)| = \sup_{\|x\|=1, x\in H_1} |(Ax, x)|.$$

Číslo $\lambda_1 = (Ax_1, x_1)$ je vlastní hodnotou zobrazení A, vektor x_1 je vlastním vektorem příslušným k λ_1. Protože

$$\sup_{\|x\|=1, x\in H_1} |(Ax, x)| \le \sup_{\|x\|=1, x\in H} |(Ax, x)|,$$

dostáváme navíc $|\lambda_0| \ge |\lambda_1|$.

Označíme-li

$$H_2 = \{x \in H_1 \colon (x, x_1) = 0\},$$

dokážeme opět, že $A(H_2) \subset H_2$; lze tedy v konstrukci pokračovat dále.

Je zřejmé, že popsaným způsobem sestrojíme

1. nekonečnou posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ vlastních hodnot zobrazení A, přičemž bude
$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq \ldots ;$$

2. jednotkové vektory x_n ($n \geq 0$), které jsou vlastními vektory příslušnými k vlastním hodnotám λ_n;

3. uzavřené podprostory H_n ($n \geq 0$), pro něž platí $A(H_n) \subset H_n$ a
$$H = H_0 \not\supseteq H_1 \not\supseteq \ldots H_n \not\supseteq \ldots,$$
přičemž H_{n+1} je ortogonální k vektorům $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Při shora uvedené konstrukci říkáme, že $\{\lambda_n\}$ je *posloupnost vlastních hodnot zobrazení A, sestrojená metodou extrémů kvadratické formy $A(x,x)$*.

Dokažme především, že $\lambda_n \to 0$. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by kladná konstanta c tak, že $|\lambda_n| \geq c$ pro nekonečně mnoho n. Posloupnost $\left\{\dfrac{x_n}{\lambda_n}\right\}$ by pak byla omezená, takže (vzhledem k totální omezenosti zobrazení A) by existovala vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}$ tak, že posloupnost $\left\{\dfrac{Ax_{n_k}}{\lambda_{n_k}}\right\} = \{x_{n_k}\}$ by konvergovala. To však není možné, neboť $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ pro všechna $i \neq j$. Tím je podmínka $\lambda_n \to 0$ dokázána.

Buď $x \in H$ libovolný vektor. Pak vektor

$$\xi_n = x - \sum_{k=0}^{n} (x, x_k) x_k \tag{14}$$

patří do H_{n+1}, neboť je ortogonální k vektorům $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \|A\xi_n\| &\leq \Big(\sum_{\|y\|=1, y \in H_{n+1}} \|Ay\|\Big)\|\xi_n\| \\ &= \Big(\sum_{\|y\|=1, y \in H_{n+1}} |(Ay, y)|\Big)\|\xi_n\| = |\lambda_{n+1}|\ \|\xi_n\|. \end{aligned} \tag{15}$$

Protože (podle (14)) platí

$$\|\xi_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |(x, x_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

pro všechna $n \in N$, vidíme, že $\|\xi_n\|$ je omezená posloupnost, takže (vzhledem k podmínce $\lambda_n \to 0$ a vzhledem k (15)) dostáváme

$$A\xi_n \to 0.$$

To tedy znamená, že $Ax = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (x, x_k) A x_k = \sum_{k=0}^{\infty} (x, x_k) A x_k$. Protože

$$\begin{aligned} (x, x_k) A x_k &= (x, x_k)\lambda_k x_k = (x, \lambda_k x_k) x_k \\ &= (x, A x_k) x_k = (Ax, x_k) x_k, \end{aligned}$$

dostáváme

$$Ax = \sum_{k=0}^{\infty} (Ax, x_k) x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (x, x_k) x_k, \tag{16}$$

a to pro každé $x \in H$. Jinými slovy, hodnoty Ax zobrazení A lze pomocí sestrojené posloupnosti $\{x_n\}$ vlastních vektorů zobrazení A rozvádět ve Fourierovu řadu. Obor hodnot zobrazení A (tj. množina $A(H)$) je částí uzávěru lineárního obalu množiny, obsahující všechny vektory x_n.

Dimenzi lineárního prostoru všech řešení rovnice $(A - \lambda I)x = 0$, kde λ je vlastní hodnota zobrazení A, nazveme *násobností této vlastní hodnoty.* Dá se snadno ukázat, že každá nenulová vlastního hodnota λ má konečnou násobnost, neboť rovnice $(A - \lambda I)x = 0$ je pak ekvivalentní s rovnicí $(I - \frac{1}{\lambda}A)x = 0$, a spolu s A je i zobrazení $\frac{1}{\lambda}A$ totálně omezené. Číslo 0 může ovšem mít nekonečnou násobnost – to se stane např. tehdy, když A je nulové zobrazení.

Dokažme nyní, že v posloupnosti $\{\lambda_k\}$, sestrojené metodou extrémů kvadratické formy $A(x,x)$ se vyskytuje každá nenulová vlastní hodnota λ zobrazení A, a to právě tolikrát, kolik činí její násobnost.

Kdyby se některá vlastní hodnota $\lambda \neq 0$ v posloupnosti $\{\lambda_k\}$ nevyskytovala, existoval by jednotkový vektor $\tilde{x}$ příslušný k této vlastní hodnotě, a tento vektor by byl ortogonální ke všem x_n.

Žádná vlastní hodnota $\lambda \neq 0$ se nemůže v posloupnosti $\{\lambda_k\}$ vyskytnout vícekrát, než činí její násobnost p, neboť jinak by se v posloupnosti $\{x_k\}$ vyskytovalo více než p navzájem ortogonálních jednotkových vektorů x_k příslušných k λ, což je ve sporu s definicí násobnosti vlastní hodnoty. Kdyby se tedy některá vlastní hodnota $\lambda \neq 0$ nevyskytovala v posloupnosti $\{\lambda_n\}$ tolikrát, kolik činí její násobnost p, vyskytovala by se tam méně než p-krát. V prostoru všech řešení rovnice $(A - \lambda I)x = 0$ by pak bylo možno najít vektor $\tilde{x}$ ortogonální ke všem vektorům x_k, pro něž $\lambda_k = \lambda$. Tento vektor by pak byl ortogonální i ke všem vektorům x_k, příslušným k vlastním hodnotám $\lambda_k \neq \lambda$, tedy ortogonální ke všem vektorům x_n, $n \geq 0$.

Vidíme tedy, že pokud by vyslovené tvrzení nebylo správné, existoval by jednotkový vektor $\tilde{x}$, který by byl vlastním vektorem příslušným vlastní hodnotě λ a který by byl ortogonální ke všem x_n, $n \geq 0$.

Potom by však bylo (podle (16))

$$0 \neq \lambda\tilde{x} = A\tilde{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (x, x_k) x_k = O,$$

což je spor. Tím je naše tvrzení dokázáno.

Modifikujme nyní metodu extrémů takto: Postupujme jako dříve, ale postup zastavme u indexu n, pokud by mělo vyjít $\lambda_{n+1} = 0$ (tj. pokud by se zobrazení A na H_{n+1} identicky anulovalo). Tím sestrojíme konečnou nebo nekonečnou posloupnost $\{\lambda_k\}$ tak, že každá vlastní hodnota $\lambda \neq 0$ zobrazení A se vyskytuje v posloupnosti $\{\lambda_k\}$ právě tolikrát, kolik činí její násobnost a že pro každé $x \in H$ platí

$$Ax = \sum_k (Ax, x_k) x_k = \sum_k (x, x_k) \lambda_k x_k. \tag{17}$$

(Vztah (17) plyne ihned z toho, že člen $(Ax, x_k)x_k = (x, x_k)\lambda_k x_k$ nemusíme psát, pokud $\lambda_k = 0$.)

Symbol $\sum_k$ nechť v dalším textu znamená sčítání přes všechna ta k, pro něž je $\lambda_k \neq 0$. Ze vztahu (17) plyne, že když $Ax = 0$, dostáváme

$$0 = (Ax, x_k) = \left(\sum_k (x, x_k) \lambda_k x_k, x_k \right) = (x, x_k) \lambda_k \|x_k\|^2,$$

takže $(x, x_k) = 0$. Je-li tedy $Ax = 0$, je x ortogonální ke všem vlastním vektorům, příslušným nenulovým vlastním hodnotám λ_k.

Jak lze snadno nahlédnout, pro každé $x \in H$ platí

$$x = x' + \sum_k (x, x_k) x_k\,, \tag{18}$$

kde x' je ortogonální ke všem x_k (příslušným k vlastním hodnotám $\lambda_k \neq 0$). Z (18) plyne, že

$$Ax - Ax' + \sum_k (x, x_k) A x_k = Ax' + \sum_k (Ax, x_k) x_k; \tag{19}$$

protože $Ax = \sum_k (Ax_k, x_k)x_k$ (podle (17)), je $Ax' = 0$.

Je-li A prosté zobrazení, plyne z podmínky $Ax' = 0$ podmínka $x' = 0$. Odtud vyplývá – vzhledem k (18) – vztah

$$x = \sum_k (x, x_k)x_k \quad \text{pro všechna } x \in H. \tag{20}$$

Systém $\{x_k\}$ (jednotkových vlastních vektorů, sestrojených metodou extrémů kvadratické formy $A(x, x)$, a odpovídajících vlastním hodnotám λ_k) je tedy v tomto případě úplný (speciálně: je v tomto případě nekonečný).

Naopak, je-li systém $\{x_k\}$ úplný, dostáváme pro každé $x \in H$ rovnost

$$x = \sum_k (x, x_k)x_k\,,$$

takže z rovnosti

$$0 = Ax = \sum_k (x, x_k)Ax_k = \sum_k (x, x_k)\lambda_k x_k$$

plyne (skalárním násobením s x_k) rovnost $(x, x_k)\lambda_k = 0$ pro všechna k, pro která $\lambda_k \neq 0$. Tedy $(x, x_k) = 0$ pro všechna taková k. Vzhledem k úplnosti systému $\{x_k\}$ je i $x = 0$. Zobrazení A je tedy prosté.

Tím jsme dokázali, že platí následující tvrzení: Systém vlastních vektorů x_k, sestrojených modifikovanou metodou extrémů kvadratické formy (Ax, x) (a tedy systém vlastních vektorů příslušným k nenulovým vlastním hodnotám λ_k) je úplný právě tehdy, když (samoadjungované totálně omezené) zobrazení A je prosté.

Nakonec je vhodné si ještě uvědomit, že ze vztahu (17) plyne, že pro všechna $x \in H$ platí

$$A(x, x) = (Ax, x) = \sum_k (x, x_k)\lambda_k(x_k, x) = \sum_k |(x, x_k)|^2\lambda_k.$$

Známe-li tedy všechny nenulové vlastní hodnoty (samoadjungovaného totálně omezeného) zobrazení A, můžeme napsat kvadratickou formu $A(x, x)$ v "diagonálním" tvaru. Čísla (x, x_k) jsou souřadnice vektoru x v souřadnicovém systému daném vektory x_k.

Čtenář snadno nahlédne, že všechny úvahy provedené v této kapitole lze provést i tehdy, zabýváme-li se reálným Hilbertovým prostorem, a že podobné úvahy lze provést i v eukleidovském prostoru R^n (kde se všechny úvahy dokonce zjednoduší, neboť odpadnou "otázky konvergence" a všechny řady budou konečné). Jestliže známe všechny nenulové vlastní hodnoty zobrazení A a jestliže pro každou takovou vlastní hodnotu λ dovedeme sestrojit ortonormální bázi v příslušném prostoru $\{x\colon Ax = \lambda x\}$ – k čemuž slouží např. popsaná metoda extrémů kvadratické formy $A(x,x)$ – máme možnost kvadratickou formu $A(x,x)$ přepsat ve tvaru $\sum\limits_{k}(x,x_k)^2\lambda_k$, kde (x,x_k) jsou souřadnice vektoru x vzhledem k ortonormálnímu systému vektorů $\{x_k\}$. Jak známe z geometrie, v tom je zahrnuta např. úloha převést kuželosečku resp. kvadriku z obecné polohy do polohy středové. Vlastní vektory, příslušné vlastním hodnotám $\lambda_k \neq 0$, udávají pak "hlavní směry" pro příslušnou kuželosečku resp. kvadriku.

7 Brauerova věta kombinatoricky

Podivné chování triangulací simplexů

Vezměte si papír a tužku a nakreslete velký trojúhelník. Ten rozdělte na malé trojúhelníky, např. podobně jako je to uděláno na obr. 15. Ale nemusíte tento vzor příliš věrně napodobovat, dělte svůj trojúhelník, jak vás napadne.

Obr. 15

Očíslujte vrcholy velkého trojúhelníka čísly 0,1,2 a obdobně i vrcholy malých trojúhelníků. Přitom dodržujte toto pravidlo:

Leží-li takový vrchol na straně původního trojúhelníka, jejíž vrcholy byly očíslovány i, j, použijte některé z čísel i, j.
(Tedy vrcholy ležící uvnitř původního trojúhelníka očíslujeme libovolně.)

Nyní úlohu ztížíme. Snažte se (na rozdíl od očíslování velkého trojúhelníka) nepoužít na žádném z malých trojúhelníků všechny hodnoty (tj. předejít situaci, která nastala ve vyšrafovaném trojúhelníku na obr. 15). Nepovedlo se to? Zkuste to znovu jinak.

Opět se to nepovedlo a ani nemohlo. Spernerovo lemma, kterým se budeme v této kapitole zabývat, říká, že je to nemožné. Říká více, totiž že je to nemožné v analogické úloze v libovolné dimenzi: Očíslujeme-li vrcholy podrozdělení simplexu $[A_0, A_1, \ldots, A_n]$ čísly $0, 1, \ldots, n$ tak, že pro vrcholy ležící na stěnách $[A_0, A_1, \ldots, A_n]$ užíváme jen čísla z množiny $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$, spotřebujeme nutně na některý ze simplexů podrozdělení všechna čísla $0, 1, \ldots, n$.

Uvědomme si ještě, o jak samozřejmou věc se jedná v dimenzi 1. Rozdělíme-li úsečku několika body a očíslujeme-li je čísly 0,1 tak, že levý krajní dostane nulu a pravý krajní jedničku, je některá z malých úseček očíslována oběma čísly, např. ta, která začíná poslední nulou.

Spernerovo lemma je i samo o sobě dost zajímavý fakt. Důvod, proč se s ním zde zabýváme, je však především v tom, že bude sloužit za základ důkazů velmi důležitých zásadních vět topologie podprostorů euklidovských prostorů. Abychom pro představu uvedli aspoň jednu, kde důležitost je patrna na první pohled – a souvislost se Spernerovým lemmatem asi vůbec ne – uveďme větu o invarianci oblasti, kterou budeme dokazovat v kap. IX: Jsou-li dvě podmnožiny prostoru $\mathbf{E}_n$ homeomorfní a jedna z nich je otevřená, je otevřená i druhá.

Uveďme ještě jednu poznámku. Spernerovo lemma se též říká jednomu kombinatorickému tvrzení, které s tvrzením v této kapitole nijak nesouvisí. Nelekněte se tedy, když narazíte v literatuře na tento název a nebudete vidět souvislost.

7.1 Jak se setkávají simplexy v podrozdělení většího simplexu

Hlavní tvrzení této kapitoly dokážeme ve dvou etapách. V první z nich dokážeme jistý velice názorný fakt (kterému by asi většina čtenářů bez rozpaků uvěřila), v druhé se pak soustředíme na kombinatorickou podstatu věty.

Je možná trochu překvapující, že názorná první část nám dá víc práce než – nakonec velmi jednoduchá – část druhá. Na druhé straně je ale dobře si uvědomit, že hloubka tvrzení není vždy v délce důkazu. Zde bude první část pracnější a delší, ale budou to konec konců výpočty, které by bylo možné dát, s trochou návodu, za domácí cvičení. V druhé části je ale obrat, na který by asi nebylo tak samozřejmé přijít.

Velmi názorný fakt, který budeme dokazovat v první části, je toto tvrzení:

Buď T podrozdělení n-rozměrného simplexu s a $t = [B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}] \in T$. Pak nastane právě jeden z těchto dvou případů: Buď vnitřek simplexu

t leží uvnitř s a potom se v t setkají právě dva n-rozměrné simplexy z T, nebo t leží na hranici simplexu s a potom je stěnou jediného n-rozměrného simplexu z T.

Nebylo by na škodu, kdyby se čtenář na tomto místě na chvíli zastavil a pokusil se o důkaz sám. Je to užitečné cvičení z lineární geometrie a i když první pokus nebude třeba úspěšný (a k dalším se nebude dostávat trpělivosti), pomůže to k pochopení faktu i možných úskalí.

Jeden z možných postupů v dalším čtení je pořádně si uvědomit zmíněný fakt, přeskočit důkazy v 2.3 až 2.6 a rovnou se pustit do důkazu věty 3.2. Potom bude čtenář vidět, k čemu jsou potřeba úvahy ze zbytku tohoto článku, a vrátí se k nim možná s větší chutí.

Lemma.

Buďte $s = [B_0, \dots, B_n], s' = [B_0, \dots, B_{n-1}, B'_n]$ simplexy v $\mathbf{E}_n$, které nemají společný vnitřní bod. Potom ve vyjádření $B'_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i B_i$, kde $\sum_{i=0}^{n} \beta_i = 1$, je $\beta_n < 0$. Následkem toho ze tří n-rozměrných simplexů v $\mathbf{E}_n$ majících společnou $(n-1)$-rozměrnou stěnu musí mít aspoň dva společný vnitřní bod.

Důkaz. Položme

$$X(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1-\varepsilon}{n} B_i + \varepsilon B'_n.$$

Zřejmě je pro $0 < \varepsilon < 1$ nutně $X(\varepsilon) \in vn_c s'$. Po dosazení za B'_n dostaneme

$$X(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1-\varepsilon}{n} B_i + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon \beta_i B_i = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1-\varepsilon}{n} B_i + \varepsilon \beta_i \right) B_i + \varepsilon \beta_n B_n.$$

Kdyby bylo $\beta_n > 0$, byl by tedy pro malé $\varepsilon > 0$ bod $X(\varepsilon)$ též ve vns. Tím je dokázáno první tvrzení.

Nechť nyní s, s' a $s'' = [B_0, \dots, B_{n-1}, B''_n]$ jsou takové, že $vn_c s \cap vn_c s' = \emptyset = vn_c s' \cap vn_c s''$. Tedy ve výrazech $B'_n = \sum_{i=0}^{n} \beta_i B_i$ a $B''_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i B_i + \gamma_n B'_n$ máme $\beta_n < 0$ a $\gamma_n < 0$. Po dosazení dostaneme

$$B''_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i B_i + \gamma_i \sum_{i=0}^{n} \beta_i B_i = \sum_{i=0}^{n-1} (\gamma_i + \gamma_n \beta_i) B_i + \gamma_n \beta_n B_n,$$

a jelikož $\gamma_n \beta_n > 0$, je $vn_v s'' \neq \emptyset$. $\square$

Lemma.

Buď $s = [B_0, \dots, B_{n-1}]$ simplex z podrozdělení T simplexu $[A_0, \dots, A_n]$. Potom je s stěnou aspoň jednoho n-rozměrného simplexu z T.

Důkaz. Označme $Y = \sum_{i=0}^{n-1}(1/n)B_i$. Tento bod leží uvnitř simplexu s, má tedy kladnou vzdálenost od všech simplexů $t \in T$ takových, že $t \neq s$ a $\dim t \leq n-1$. Kdyby neležel v žádném simplexu dimenze n, měl by tedy kladnou vzdálenost vůbec ode všech simplexů $t \in T$ různých od s, a tedy všechny k němu dost blízké body $z[A_0, \dots, A_n]$ by musely ležet v s.

Pro $\varepsilon > 0$ malé je též vzdálenost bodu Y od bodu $(1-\varepsilon)Y + \varepsilon A_i$ dostatečně malá, takže, zvolíme-li takové malé ε, měli bychom mít

$$A_i + (1-\varepsilon)Y = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}\, B_i,$$

$$A_i = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{ij}\, B_i, \quad \text{kde } \gamma_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{2} - \frac{1-\varepsilon}{n}.$$

Soustava bodů $A_0, \dots, A_n$ je afinně nezávislá, takže $A_1 - A_0, \dots, A_n - A_0$ by měla být lineárně nezávislá soustava, a tedy matice

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} - \gamma_{01}, & \gamma_{12} - \gamma_{02}, & \dots, & \gamma_{1n} - \gamma_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} - \gamma_{01}, & \gamma_{n2} - \gamma_{02}, & \dots, & \gamma_{nn} - \gamma_{0n} \end{pmatrix}$$

by měla být regulární. Součet řádků je však nulový: $\sum_{j=0}^{n}(\gamma_{ij} - \gamma_{0j}) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} - \sum_{j=0}^{n} \gamma_{0j} = 1 - 1 = 0$. Tedy náš předpoklad vedl ke sporu. □

Lemma.

Buď $s = [B_0, \dots, B_{n-1}]$ simplex z podrozdělení simplexu $[A_0, \dots, A_n]$. Potom je buď $vn_c s \subset Vn_c[A_0, \dots, A_n]$, nebo $s \subset hr_c[A_0, \dots, A_n]$.

Důkaz. Napišme B_i jako $\sum_{j=0}^{n}\beta_{ij}\, A_j$ s koeficienty $\beta_{ij} > 0$, $\sum_{j=0}^{n}\beta_{ij} = 1$. Pro bod $X = \sum_{i=0}^{n}\xi_i\, B_i$ máme potom

$$X = \sum_{j=0}^{n}(\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\, \beta_{ij})A_j.$$

Jakmile pro nějaký bod $X_0 \in vn_c s$ (tedy bod, v jehož vyjádření jsou všechna ξ_i^0 kladná) neplatí $X_0 \in vn_c[A_0, \dots, A_n]$, musí být $\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^0 \beta_{ik} = 0$ pro nějaké k. To však znamená, že pro všechna i je $\beta_{ik} = 0$. V takovém případě je $\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \beta_{ik} = 0$ vždy, a tedy každý bod $X \in s$ je v $[A_0, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_n]$. □

7.2 Důkaz tvrzení z odstavce 2.2.

Zachováme značení z 2.2. Podle 2.4 je t stěnou aspoň jednoho n-rozměrného simplexu z T, podle 2.3 nejvýše dvou takových.

Podle 2.5 je $vn_c t \subset vn_c s$ nebo $t \subset hr_c s$. Tedy je potřeba dokázat, že v prvním případě je t společnou stěnou aspoň dvou n-rozměrných simplexů z T, v druhém pak, že je stěnou nejvýš jednoho takového simplexu.

Vezměme první případ. Podle 2.4 máme nějaký simplex $[B_0, \dots, B_{n-1}, B_n] \in T$. Podle předpokladu leží $Y = \sum_{i=0}^{n-1} (1/n) B_i$ uvnitř simplexu s (ten si představujeme vnořen do $\mathbf{E}_n$), a tedy pro dost malá $\varepsilon > 0$ musí bod $X(\varepsilon) = (1+\varepsilon)Y - \varepsilon B_n$ (jehož vzdálenost od Y je $\varepsilon \|B_n - Y\|$) ležet v s, a to blíže k Y než kterýkoli simplex z T, v němž Y neleží. Musí tedy takový bod $X(\varepsilon)$ ležet v simplexu dimenze n, jehož je t stěnou. Nejedná se však o $[B_0, \dots, B_n]$, protože ve výrazu

$$X(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1+\varepsilon}{n} B_i - \varepsilon B_n$$

je koeficient u B_n záporný.

V druhém případě označme $[A_0, \dots, A_{n-1}]$ tu stěnu simplexu s, v níž je t obsažen. Předpokládejme, že kromě $[B_0, \dots, B_n] \in T$ zaručeného lemmatem 2.4 leží v t ještě $[B_0, \dots, B_{n-1}, B'_n]$. Máme

$$\begin{aligned} B_i &= \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} A_j, \quad \beta_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij} = 1, \\ B_n &= \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} A_j, \quad B'_n = \sum_{j=0}^{n} \gamma'_j A_j, \quad \sum_{j=0}^{m} \gamma_j = \sum_{j=0}^{n} \gamma'_j = 1. \end{aligned}$$

Jelikož jde o simplexy a příslušné systémy bodů musí být afinně nezávislé, musí být nutně

$$\gamma_n, \gamma'_n > 0.$$

Máme však dále

$$\begin{aligned} B_n' &= \sum_{i=0}^{n} \beta_i\, B_i = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij}\, A_j + \beta_n \sum_{j=0}^{n} \gamma_j\, A_j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\, \beta_{ij} + \gamma_j \right) A_j + \beta_n\, \gamma_n\, A_n, \end{aligned}$$

takže $\gamma_n' = \beta_n\, \gamma_n$, což znamená, že β_n musí být kladné (připomínám, že γ_n' i γ_n jsou kladná čísla) ve sporu s lemmatem 2.3. □

8 Spernerovo lemma

Nyní již dokážeme větu slíbenou v odst. 1.1. Dokážeme trochu silnější tvrzení, totiž to, že malých simplexů očíslovaných všemi čísly je lichý počet (a tedy musí být aspoň jeden). Toto silnější tvrzení se dokazuje snadněji než tvrzení původní. (Tak tomu někdy bývá u důkazů úplnou indukcí. Tím, že můžeme v indukčním předpokladu užívat silnější tvrzení, získáme někdy více, než o kolik se nám ztíží provedení indukčního a ověření prvního kroku.)

Věta.

Buď T libovolná triangulace simplexu $[A_0, \ldots, A_n]$. Buď ψ zobrazení množiny vrcholů triangulace T do množiny $\{0, 1, \ldots, n\}$ takové, že platí:

Je-li $B \in [A_{i_0}, \ldots, A_{i_k}]$, je $\psi(B) \in \{i_0, \ldots, i_k\}$. Potom počet simplexů $[B_0, \ldots, B_n] \in T$ takových, že

$$\psi(\{B_0, \ldots, B_n\}) = \{0, 1, \ldots, n\},$$

je lichý.

Důkaz provedeme indukcí podle dimenze n.

I. Předpokládejme nejprve, že $n = 1$. Označme p_0 počet těch simplexů z T, které jsou očíslovány $(0, 0)$, a p_1 počet těch simplexů. které jsou očíslovány $(0, 1)$ nebo $(1, 0)$. Těch simplexů, které jsou očíslovány $(1, 1)$, si nevšímáme.

Kolik vrcholů je očíslováno nulou? Spočtěme, kolikrát se nula objevila v jednotlivých simplexech. Tak jsou vnitřní body započítány dvakrát a právě jeden krajní bod jednou. Tedy počet x vrcholů očíslovaných nulou splňuje rovnici

$$2x - 1 = 2p_0 + p_1,$$

a tedy $p_1 = 2(x - p_0) - 1$ je liché číslo.

II. Předpokládejme, že tvrzení je dokázáno pro $n-1$. V dimenzi n se soustřeďme na ty n-rozměrné simplexy z T, které jsou očíslovány buď právě čísly $0, 1, \ldots, n-1$ (množinu všech těchto simplexů označíme S_0 a jejich počet p_0), nebo všemi čísly $0, 1, \ldots, n$ (množinu těchto označíme S_1 a jejich počet p_1). Každý simplex z S_0 má zřejmě právě dvě stěny očíslovány všemi čísly $0, 1, \ldots, n-1$. Buď x počet $(n-1)$-rozměrných simplexů očíslovaných všemi čísly $0, 1, \ldots, n-1$. Ty se objeví jako stěny jen v simplexech z množiny $S_0 \cup S_1$, a jsou-li na hranici simplexu $[A_0, \ldots, A_n]$, jsou nutně ve stěně $[A_0, \ldots, A_{n-1}]$.

V analogii s postupem v části I budeme zjišťovat, jaké je x, z toho, kolik přispějí simplexy z $S_0 \cup S_1$ svými stěnami. Podle tvrzení v 2.2 tak započítáme stěny ležící uvnitř velkého simplexu dvakrát, ty které leží v $[A_0, \ldots, A_{n-1}]$ (jejich počet označme h) jednou. Máme tedy

$$2x - h = 2p_0 + p_1.$$

Podle indukčního předpokladu je h liché, a tedy $p_1 = 2(x - p_0) - h$ je také liché. □

9 Neexistence retrakce koule na sféru a věta o pevném bodě

Kouli není možno retrahovat na její povrch – Euklidovské prostory různých dimenzí nejsou homeomorfní – Homotopie je netriviální vztah – Každé spojité zobrazení koule do sebe má pevný bod

Připomeňme si, že retrakce prostoru X na jeho podprostor A je spojité zobrazení $r\colon X \to A$ takové, že pro všechny body $x \in A$ je $r(x) = x$. Zřejmě neexistuje retrakce "koule" $\mathbf{B}_1$ na "sféru" $\mathbf{S}_0$: $\mathbf{B}_1$ je úsečka a $\mathbf{S}_0$ se skládá z jejích dvou krajních bodů; jelikož tedy množina $\mathbf{S}_0$ je nesouvislá, nemůžeme na ni zobrazit souvislý prostor $\mathbf{B}_1$. Abychom si ujasnili dvourozměrný případ, představme si kružnici $\mathbf{S}_1$ jako pevnou obruč, na níž je napnut kruh $\mathbf{B}_2$ z pružného materiálu. Nyní se pokusme shrnovat $\mathbf{B}_2$ ke kraji. Dříve než ji shrneme celou, nutně někde praskne, a to i v případě neomezené pružnosti (nejde o to, že materiál nevydrží tah, ale o to, že dokud se neroztrhne, stále pokrývá celý kruh – viz obr. 16).

Obr. 16

Je to velmi názorné, dosud jsme však neměli prostředky k tomu, abychom něco takového dokázali. Nyní, s pomocí Spernerova lemmatu, snadno ukážeme, že skutečně retrakce koule $\mathbf{B}_{n+1}$ na sféru $\mathbf{S}_n$ nikdy neexistuje. To samo o sobě je celkem zajímavé; nadto dostáváme mnoho důležitých důsledků. Několik zcela bezprostředních ukážeme v č. 2; v čl. 3 a 4 se soustředíme na dva důsledky o trochu méně bezprostřední, ale zato zvlášť zásadní. Ostatně i v obsahu dalších kapitol bude hrát neexistence retrakce značnou roli.

Technicky bude situace trochu podobná důkazu v předchozí kapitole. Nejprve dokážeme tvrzení z lineární geometrie, které je velmi názorné (1.2 a 1.3) a potom vlastní větu. Formálně dá první část více práce. Těžiště je však v druhé části, kde využijeme Spernerovo lemma. Čtenář může v prvním čtení přeskočit důkaz lemmatu 1.2, uvědomit si jasně, co 1.2 a 1.3 říkají, a věnovat se důkazu věty 1.4. Důkaz lemmatu 1.2 pak může zkusit najít sám, je to jen cvičení v počítání v $\mathbf{E}_n$.

Lemma.

Buď $[A_0, \ldots, A_n]$ rovnostranný simplex o hraně délky 1 (tj. pro $i \neq j$ je vždy $\|A_i - A_j\| = 1$). Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že jakmile je bod X vzdálen od stěny $[A_1, \ldots, A_n]$ o méně než ε, je

$$\min_{k=1,2,\ldots,n} \|X - A_k\| < \|X - A_0\|.$$

Důkaz. Máme pro $i \neq j \neq k$

$$\begin{aligned} 1 &= (A_i - A_j)^2 = [(A_i - A_k) + (A_k - A_j)]^2 \\ &= (A_i - A_k)^2 + (A_j - A_k)^2 + 2(A_i - A_k)(A_k - A_j) \\ &= 2 - 2(A_i - A_k)(A_j - A_k), \end{aligned}$$

takže pro $i \neq j \neq k \neq i$ dostaneme

$$(A_i - A_k)(A_j - A_k) = \frac{1}{2}.$$

Pro $Y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i A_i$, kde $\sum_{i=1}^{n} \eta_i = 1$, $\eta_i \geq 0$, máme tedy

$$\|Y - A_0\|^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i (A_i - A_0)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \eta_i \eta_j,$$

a pro $k > 0$

$$\|Y - A_k\|^2 \sum_{i \neq k} \eta_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \neq k}} \eta_i \, \eta_j -$$

Tedy

$$\begin{aligned} \|Y - A_0\|^2 - \|Y - A_k\|^2 &= \eta_k^2 + \frac{1}{2}(2 \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} \eta_k \, \eta_i) \\ &= \eta_k \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i \right) = \eta_k, \end{aligned}$$

$$\eta_k = (\|Y - A_0\| - \|Y - A_k\|)(\|Y - A_0\| + \|Y - A_k\|).$$

Jelikož zde druhý součinitel je menší nebo roven dvěma (vzpomeňte si na IV.3.2) a největší z čísel η_k je aspoň $1/n$, dostáváme

$$\|Y - A_0\| - \min_{k \neq 0} \|Y - A_k\| \geq \frac{1}{2n}.$$

Nechť je nyní bod X vzdálen do $[A_1, \ldots, A_n]$ o méně než $1/(4n)$. Vyberme $Y \in [A_1, \ldots, A_n]$ tak, aby $\|X - Y\| < \dfrac{1}{4n}$. Potom pro to k, pro něž je $\|Y - A_k\|$ minimální (a tedy $\|Y - A_k\| \leq \|Y - A_0\| - \dfrac{1}{2n}$), dostaneme

$$\begin{aligned} \|X - A_k\| &\leq \|X - Y\| + \|Y - A_k\| \\ &< \frac{1}{4n} + \|Y - A_0\| - \frac{1}{2n} = \|Y - A_0\| - \frac{1}{4n} \\ &\leq \|Y - X\| + \|X - A_0\| - \frac{1}{4n} \leq \|X - A_0\|. \square \end{aligned}$$

Důsledek.

Buď $[A_0, \ldots, A_n]$ rovnostranný simplex. Potom existuje $\varepsilon > 0$ takové, že jakmile bod X je vzdálen od stěny $[A_{i_0}, \ldots, A_{i_r}]$ o méně než ε a číslo j není mezi čísly i_k, je

$$\min_{k=0,\ldots,r} \|X - A_{i_k}\| < \|X - A_j\|.$$

(Stačí aplikovat lemma 1.2 na simplexy tvaru $[A_j, A_{i_0}, \ldots, A_{i_r}]$ a mezi všemi takto získanými čísly ε vzít to nejmenší.) □

Věta.

Neexistuje retrakce koule $\mathbf{B}_{n+1}$ na sféru $\mathbf{S}_n$.

Důkaz. Zřejmě stačí dokázat, že neexistuje retrakce simplexu $s = [A_0, \dots, A_n]$ na jeho hranici (připomeňte si homeomorfismus z věty II.4.4). Vezměme rovnostranný simplex a předpokládejme, že retrakce

$$r\colon [A_0, \dots, A_n] \to hr_c[A_0, \dots, A_n]$$

existuje.

Vezměme nyní $\varepsilon > 0$ z tvrzení 1.3. Jelikož simplex s je kompaktní, je r stejnoměrně spojité zobrazení (viz I.6.1), a tedy existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|r(x) - r(y)\| < \varepsilon.$$

Zvolme nyní podrozdělení T simplexu s takové, že $\mu(T) < \delta$ (uvědomte si, že to jde – viz IV.4.6).

Očíslujme vrcholy B komplexu T tak, abychom dodrželi tuto podmínku:

Pro všechna i je $\|B - A_{\psi(B)}\| \leq \|B - A_i\|$ (jinými slovy, očíslujeme vrchol B indexem některého z nejbližších vrcholů simplexu s). Podle 1.3 vyhovuje očíslování ψ požadavku ve Spernerově lemmatu. Je-li však simplex $[B_0, \dots, B_n] \in T$ libovolný, jsou všechny body $r(B_i)$ vzdáleny o méně než ε od některé z $(n-1)$-rozměrných stěn, a tedy, opět podle 1.3, jsou B_i očíslovány nejvýš n čísly ve sporu s tvrzením Spernerova lemmatu. □

9.1 Okamžité důsledky

Věta 1.4 bezprostředně dává příklady jevů, které jsme zatím byli schopni ilustrovat jen velmi triviálně (v podstatě na kontrastu souvislosti a nesouvislosti) nebo pomocí názorných představ, např. nemožnosti rozšířit zobrazení, nehomotopických zobrazení a speciálně existence podstatných zobrazení na sféry [uvědomte si, že v posledním jsme zatím nebyli schopni rozhodnout, zda nakonec třeba všechna zobrazení do $\mathbf{S}_n$ $(n \geq 1)$ nejsou nepodstatná].

Pouhým přeformulováním dostáváme z věty 1.4 toto tvrzení:

Tvrzení. *Buď X prostor homeomorfní s $\mathbf{B}_{n+1}$, A jeho podprostor, odpovídající při nějakém homeomorfismu prostoru X na $\mathbf{B}_{n+1}$ sféře $\mathbf{S}_n$. Potom žádný homeomorfismus $f\colon A \to Y$ nelze rozšířit na spojité zobrazení $X \to Y$.*

Víme již, že spojité zobrazení $f\colon \mathbf{S}_n \to Y$ se dá rozšířit na $\mathbf{B}_{n+1}$, právě když je homotopické s konstantním zobrazením (viz V.4.2). Z 1.4 tedy dostáváme okamžitě toto tvrzení:

Žádný homeomorfismus $f\colon \mathbf{S}_n \to Y$ není homotopický s konstantním zobrazením.

Přílohy:

W. Kropatsch, P. Pták: The path-connectedness in Z^2 and Z^3 and classical topologies, Structural and Syntactic Pattern Recognition, Sydney 1998 (vyjde v Springer Lecture Notes in Computer Science, 1998)

V. C. Klema, A. J. Laub: The singular value decomposition: Its computation and some applications. IEEE Transactions on automatic control, Vol. AC-25, No. 2, (1980)

P. Pták: Extensions of states on logics, Bull. Polish Acad. Science. Math., Vol. 33, No. 9–10, (1985)

Tyto poznámky jsem sepsal ke své přednášce, konané při CMP, K333. Je to cosi jako "impresionistický pohled" na některé matematické struktury (se snahou po shodě s klasickým "učit znamená spíše zažehnout oheň, než naplnit nádobu").