Cvičení z RPZ – Minimaxní úloha

Martin Urban, Vojtěch Franc

26. října 2005

1 Minimaxní úloha

V minulém cvičení jsme použili bayesovské rozhodování pro návrh klasifikátoru, který minimalizoval pravděpodobnost chybné klasifikace. Při návrhu jsme měli k dispozici jak podmíněné pravděpodobnosti pozorování $p(x|y)$ tak apriorní pravděpodobnosti $p(y)$. V tomto cvičení se zaměříme na situaci, kdy apriorní pravděpodobnosti nejsou k dispozici a tudíž nelze použít bayesovské rozhodování.

Ukážeme, že nesprávná volba apriorních pravděpodobností a použití bayesovského rozhodování může vést k chybě mnohem větší, než když problém vyřešíme jako minimaxní úlohu.

Pokusme se toto pozorování zdůvodnit. Nejdříve se blíže podíváme, jak vypadá risk obecné (tj. ne nutně optimální) strategie $d(x)$.

1.1 Risk obecné strategie $d(x)$

Předpokládejme pouze dvě třídy $y \in Y = \{1, 2\}$ a 0/1-ztrátovou funkci W. V tomto případě má bayesovské riziko tvar

$$\begin{aligned} R(d(x)) &= \int_X \sum_{y \in Y} p(x)p(y|x)W(d(x), y)dx && (1) \\ &= \int_X \sum_{y:\ y \neq d(x)} p(y)p(x|y)dx && (2) \end{aligned}$$

Nechť $X_1 \subset X$ značí množinu všech $x \in X$, které jsou pravidlem $d(x)$ klasifikována do třídy 1 a $X_2 \subset X$ množinu všech x, které jsou klasifikována do třídy 2

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x \in X : d(x) = 1\}, \\ X_2 &= \{x \in X : d(x) = 2\} \end{aligned}$$

Je zřejmé, že $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Rovnici (2) můžeme tedy zapsat jako součet dvou integrálů

$$R(d(x)) = \int_{X_1} \sum_{y:\ y \neq d(x)} p(y)p(x|y)dx + \int_{X_2} \sum_{y:\ y \neq d(x)} p(y)p(x|y)dx =$$

$$= \quad p(y=2)\int_{X_1} p(x|y=2)dx + p(y=1)\int_{X_2} p(x|y=1)dx \ .$$

Použitím $p(y=2) = 1 - p(y=1)$ získáme

$$R(d(x)) = p(y=1)\left[\int_{X_2} p(x|y=1)dx - \int_{X_1} p(x|y=2)dx\right] + \int_{X1} p(x|y=2)dx \tag{3}$$

Shrnutí: Rovnice (3) ukazuje, že risk obecné strategie $d(x)$ je pro daná rozdělení $p(x|y=1)$ a $p(x|y=2)$ lineární funkcí apriorní pravděpodobnosti $p(y=1)$ (respektive $p(y=2)$).

Ze vztahu (3) je navíc zřejmé, že pokud se nám podaří nalézt pro dané $p(x|y=1)$ a $p(x|y=2)$ takovou strategie $d(x)$, že platí

$$\int_{X_2} p(x|y=1)dx - \int_{X_1} p(x|y=2)dx = 0 \ , \tag{4}$$

potom je risk na apriorních pravděpodobnostech $p(y=1)$, $p(y=2)$ nezávislý a je roven

$$R(d(x)) = \int_{X_1} p(x|y=2)dx = \int_{X_2} p(x|y=1)dx$$

1.2 Minimaxní rozhodování

Předpokládejme nyní úlohu, kdy známe rozdělení $p(x|y=1)$, $p(x|y=2)$, ale apriorní pravděpodobnosti $p(y=1)$, $p(y=2)$ jsou neznámé. Za těchto podmínek je logické hledat takovou klasifikační funkci $d(x)$, jejíž nejhorší možná chyba vzhledem k $p(y=1)$ je nejmenší (tj. minimalizovat nejhorší případnou chybu):

$$d_m(x) = \underset{d(x)}{\operatorname{argmin}} \max_{p(y=1)} R\left(d(x), p(y=1)\right) \tag{5}$$

Takovémuto postupu se říká **minimaxní rozhodování**.

1.2.1 Vlastnosti minimaxního rozhodování

- Minimalizace nejhorší možné chyby

$$\underset{d(x)}{\operatorname{argmin}} \max_{p(y=1)} R\left(d(x), p(y=1)\right) \tag{6}$$

  odpovídá minimalizaci

$$\underset{d(x)}{\operatorname{argmin}} \max\left\{\int_{X_2} p(x|y=1)dx, \int_{X_1} p(x|y=2)dx\right\} \tag{7}$$

- Risk minimaxního rozhodování $d_m(x)$ nemůže být nikdy menší než risk nejhoršího bayesovského rozhodování (bayesovské rozhodování pro nejnepříznivější $p(y=1)$).
- Pokud pro zadané $p(x|y=1)$, $p(x|y=2)$ existuje bayesovská strategie $d_b(x)$ splňující
$$\int_{X2} p(x|y=1)dx = \int_{X_1} p(x|y=2)dx \ , \tag{8}$$
potom je tato $d_b(x)$ zároveň minimaxním řešením a jedná se o bayesovskou strategii s největší riskem vzhledem k $p(y=1)$ (tj. bayesovskou strategii pro ty nejnepříznivější apriorní pravděpodobnosti $p(y=1)$, $p(y=2)$).

Důkazy tvrzení naleznete v dodatku.

Úloha

Úlohu minimaxního rozhodování vyzkoušíme na jednoduchém příkladě. Jsme opět postaveni před problém klasifikace pohlaví osob (muž/žena) na základě jediného příznaku (např. délka vlasů). Tentokrát ale neznáme apriorní pravděpodobnosti $p(y=\text{muž})$, $p(y=\text{žena})$. Známe pouze rozdělení

$$\begin{aligned} p(x|y=\text{muž}) &= N(10,5)\ , \\ p(x|y=\text{žena}) &= N(25,10)\ . \end{aligned}$$

Cílem je navrhnout klasifikátor, který nám zaručí minimální pravděpodobnost chybné klasifikace i pro tu nejnepříznivější hodnotu apriorních pravděpodobností $p(y=\text{muž})$, $p(y=\text{žena})$ (tj. pro něž je pravděpodobnost chybné klasifikace maximální).

Zadání:

Numerickou simulací ověřte, že bayesovská strategie pro nejnepříznivější hodnotu apriorních pravděpodobností je zároveň minimaxním řešením.

Postup:

Pro různé hodnoty apriorních pravděpodobností (např. pro $p(\text{žena}) = 0.1, 0.2, ..., 0.9$) spočtěte:

- Bayesovskou strategii a její risk (viz. minulé cvičení).
- Hodnoty integrálů $\int_{X_2} p(x|y=1)dx$, $\int_{X_1} p(x|y=2)dx$.
- Bayesovské riziko strategie rozhodování, která je optimální $p(y=\text{žena}) = 0.25$.

K výpočtu použijte funkci `bayeserr.m`. Výsledky zakreslete do grafu. Na základě naměřených výsledků určete minimaxní strategii a její risk.

Dodatek

Tvrzení 1. Minimalizace nejhorší možné chyby

$$\underset{d(x)}{\operatorname{argmin}} \max_{p(y=1)} R\left(d(x), p(y=1)\right) \tag{9}$$

odpovídá minimalizaci

$$\underset{d(x)}{\operatorname{argmin}} \max \left\{ \int_{X_2} p(x|y=1)dx, \int_{X_1} p(x|y=2)dx \right\} \tag{10}$$

Důkaz: V kapitole 1.1 jsme odvodili, že risk strategie $d(x)$ je lineární funkcí $p(y = 1)$. Na intervalu $p(y = 1) \in \langle 0, 1\rangle$ tedy risk nabývá maxima vždy alespoň v jednom z okrajových bodů, tj. pro $p(y = 1) = 0$ nebo $p(y = 1) = 1$:

$$\begin{aligned} \max_{p(y=1)} R\left(d(x), p(y=1)\right) &= \max\left\{R\left(d(x), 0\right), R\left(d(x), 1\right)\right\} \\ &= \max\left\{ \int_{X_2} p(x|y=1)dx, \int_{X_1} p(x|y=2)dx \right\} \end{aligned}$$

Tvrzení 2. Risk minimaxního rozhodování $d_m(x)$ nemůže být nikdy menší než risk nejhoršího bayesovského rozhodování (bayesovského rozhodování pro nejnepříznivější $p(y = 1)$).
Důkaz: Z definice bayesovského rozhodování $d_b(x)$ plyne, že jeho risk je pro dané $p(y = 1)$ nejmenší možný. Neexistuje strategie, která by pro dané $p(y = 1)$ měla menší risk. Risk minimaxní strategie je pro všechna $p(y = 1) \in \langle 0, 1\rangle$ stejný. Žádné minimaxní rozhodování nemůže mít menší risk, než je bayesovský pro nejnepříznivější $p(y = 1)$.

Tvrzení 3. Pokud pro zadané $p(x|y = 1)$, $p(x|y = 2)$ existuje bayesovská strategie $d_b(x)$ splňující (8), potom je tato $d_b(x)$ zároveň minimaxním řešením a jedná se o bayesovskou strategii s největší riskem vzhledem k $p(y = 1)$ (tj. bayesovskou strategii pro ty nejnepříznivější apriorní pravděpodobnosti $p(y = 1)$, $p(y = 2)$).
Důkaz: Pokud pro bayesovskou strategii $d_b(x)$ platí (8)), potom je risk této strategie pro všechna $p(y = 1) \in \langle 0, 1\rangle$ konstantní. Z toho jednak plyne, že jde o bayesovskou strategii s největším riskem (viz. důkaz Tvrzení 2), jednak, že jde o minimaxní strategii (protože $R(d_b) = \max_{p(y=1)} R(d_b)$, a žádná jiná strategie nemůže mít menší maximální risk $\max_{p(y=1)} R(d(x))$ vzhledem k $p(y = 1)$).

Poznámka: Tvrzení 3 nedokazuje, že pro každá $p(x|1)$, $p(x|2)$ musí existovat bayesovské rozhodování, které je zároveň minimaxním rozhodováním!