Cvičení z 33RPZ – Nelineární perceptron

Vojtěch Franc
Centrum strojového vnímání, FEL ČVUT Praha

27. duben 2006

1 Úvod

Cílem tohoto cvičení je rozšířit perceptronový algoritmus, tak aby hledal i nelineární klasifikátor (klasifikátor s nelineární diskriminační funkcí). Tohoto cíle lze dosáhnout pomocí metody vyrovnávání příznakového prostoru. My si ukážeme použití této metody pro učení kvadratické diskriminační funkce ve dvourozměrném příznakovém prostoru.

2 Vyrovnávání příznakového prostoru

Perceptronový algoritmus hledá parametry lineárního klasifikátoru, tak aby klasifikátor měl nulovou chybu na zadaných trénovacích datech $\{(\vec{x}_1, y_1), \ldots, (\vec{x}_m, y_m)\}$. Lineární klasifikátor rozhoduje podle znaménka lineární diskriminační funkce

$$f(\vec{x}) = \langle \vec{w}, \vec{x} \rangle + b = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i + b \,, \tag{1}$$

kde vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $b \in \mathbb{R}$ jsou parametry a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je vektor příznaků rozpoznávaného objektu. Všimněte si, že diskriminační funkce (1) je lineární jak v parametrech $(\vec{w}, b)$ tak v příznakovém vektoru $\vec{x}$. Když mluvíme o nelineárním klasifikátoru, tak se tím myslí nelineární s ohledem na příznakový vektor $\vec{x}$. Pro hledání parametrů nelineární klasifikátoru pomocí perceptronu použijeme metodu vyrovnávání příznakového prostoru. Myšlenka této metody je následující: (i) promítneme trénovací vzory ze vstupního prostoru příznaků $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ do nového (vyrovnaného) prostoru $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^N$, ve kterém

se nelineární funkce zobrazí jako lineární; (ii) použijeme perceptronový algoritmus ve vyrovnaném příznakovém prostoru $\mathcal{Z}$. Nalezené parametry určují lineární klasifikátor v prostoru $\mathcal{Z}$ a nelineární ve vstupním prostoru $\mathcal{X}$. Funkci jež mapuje vstupní příznakový prostor na nový označíme $\phi\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$. My se zaměříme na jeden konkrétní případ učení kvadratické diskriminační funkce. Metodu si vysvětlíme na jednoduchém případě, kdy vstupní příznakový prostor $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ bude dvou-dimenzionální $n = 2$ a kvadratická diskriminační funkce má tvar

$$q(\vec{x}) = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_1 \cdot x_2 + w_4 \cdot x_1^2 + w_5 \cdot x_2^2 + b = \sum_{i=1}^{5} w_i \phi_i(\vec{x}) + b. \quad (2)$$

Pokud porovnáme lineární (1) a kvadratickou diskriminační funkci (2) můžeme hned odvodit transformační funkci ϕ, která má tvar

$$\vec{z} = \phi(\vec{x}) \quad \text{a po rozepsání} \quad \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\vec{x}) \\ \phi_2(\vec{x}) \\ \phi_3(\vec{x}) \\ \phi_4(\vec{x}) \\ \phi_5(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1^2 \\ x_1 \cdot x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Vidíme, že vyrovnaný příznaková prostor $\mathcal{Z}$ je 5-dimenzionální. Celé rozšíření percepronového algoritmu na algoritmus hledající kvadratickou diskriminační funkci se provede následovně:

1. Transformuj trénovací data $\{(\vec{x}_1, y_1), \ldots, (\vec{x}_m, y_m)\}$ na $\{(\vec{z}_1, y_1), \ldots, (\vec{z}_m, y_m)\}$ použitím funkce (3).

2. Použij perceptronový algoritmus k nalezení lineárního klasifikátoru z transformované trénovací množiny $\{(\vec{z}_1, y_1), \ldots, (\vec{z}_m, y_m)\}$.

3. Použij nalezené parametry $(\vec{w}, b)$ k rozpoznávání pomocí kvadratické diskriminační funkce (2).

3 Zadání úlohy

1. Implementujte metodu vyrovnávání příznakového prostoru pro kvadratickou funkci a použijte ji ve spojení s perceptronovým algoritmem.

2. Vygenerujte si kvadraticky separabilní data pomocí funkce `createdata` a naučte kvadratický klasifikátor pomocí vašeho programu. Zobrazte trénovací množinu a nalezenou kvadratickou diskriminační funkci. K zobrazení diskrinační funkce použijte `pboundary`.