

# ROZPOZNÁVÁNÍ S MARKOVSKÝMI MODELY

Václav Hlaváč

Fakulta elektrotechnická ČVUT v Praze  
katedra kybernetiky, **Centrum strojového vnímání**  
hlavac@fel.cvut.cz, <http://cmp.felk.cvut.cz/~hlavac>

---

## PLÁN PŘEDNÁŠKY

- ◆ Motivace, použití.
- ◆ Stochastické konečné automaty.
- ◆ Markovský statistický model.
- ◆ Tři nejčastější úlohy se skrytými markovskými modely (rozpoznávání, hledání nejpravděpodobnější posloupnosti stavů, učení markovských statistických modelů).

# KLASIFIKACE ZÁVISLÁ NA KONTEXTU

- ◆ Místo jednoho rozhodnutí jde o posloupnost rozhodnutí. Tato rozhodnutí jsou na sobě závislá.
  - ◆ Obvyklé aplikace: analýza pozorování měnících se v čase. Například: řečový signál, časová posloupnost tahů rukopisu.
- 
- ◆ Skryté markovské modely (Hidden Markov Model – zkratka HMM) jsou “zlatým standardem” v analýze časových řad.
  - ◆ Důvod? Skrytý markovský řetěz je statistický model, který je ještě zvládnutelný algoritmy s polynomiální složitostí.

## APLIKAČNÍ OBLASTI, např.

- ◆ Rozpoznávání řečových signálů ( $x$  signál z mikrofону,  $k$  fonémy).
- ◆ Vyhledávání slov v promluvě ( $x$  slova,  $k$  označené kusy promluvy).
- ◆ Rozpoznávání rukopisných znaků, on-line ( $x$  tahy pera,  $k$  podpisy).
- ◆ Biomedicínské inženýrství, analýza EKG a EEG signálů ( $x$  signál,  $k$  charakteristiky signálu).
- ◆ Bioinformatika, analýza DNA sekvencí ( $x$  odezvy fluorescenčně označených molekul,  $k \in \{A, C, G, T\}$ ) nebo ( $x \in \{A, C, G, T\}$ ,  $k$  interpretačně významné podposloupnosti).
- ◆ Mobilní robotika ( $x$  body trajektorie robotu,  $k$  interpretace trajektorie).
- ◆ Rozpoznávání v obrazech, ale musí být zvláštní s uspořádáním, např. rozpoznávání registračních značek aut ( $x$  sloupce registrační značky,  $k$  znaky značky).

## DOPORUČENÉ ČTENÍ

Schlesinger M.I., Hlaváč V.: Deset přednášek z teorie statistického a strukturního rozpoznávání, monografie, Vydavatelství ČVUT, Praha 1999, 521 s.

Rabiner L.R.: A tutorial on Hidden Markov Models and selected applications in speech recognition, časopis Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 2, 1989, pp. 257-286.



Michail I. Schlesinger  
Václav Hlaváč



Deset přednášek z teorie  
statistického a strukturního  
**rozpoznávání**

# ANDREJ ANDREJEVIČ MARKOV

- ◆ Narodil se v Rjazani 1856, zemřel 1922 v Petrohradě.
- ◆ Ruský matematik, profesor Univerzity v Petrohradě, člen Ruské akademie věd, stochastické procesy. Rozhodující článek 1912.
- ◆ Markovské řetězce: posloupnosti náhodných proměnných, hodnota následující proměnné je určena hodnotou předchozí proměnné, ale nezávislá na předchozích stavech.
- ◆ Použil metodu na analýzu veršů S. Puškina – Evžen Oněgin.



- ◆ Markovské modely (včetně skrytých) jsou zvláštním případem stochastických konečných automatů.
- ◆ Markovské modely dovolují vyjádřit statistické závislosti dané pořadím pozorování (stavů) jako například v časových řadách.

# KONEČNÝ AUTOMAT $(K, V, X, \delta, k_0, F)$

- ◆  $K$  - konečný počet stavy automatu;
- ◆  $V$  - konečná abeceda vstupních symbolů;
- ◆  $X$  - konečná abeceda výstupních symbolů;
- ◆  $k_0$  - počáteční stav,  $k_0 \in K$ ;
- ◆  $F \subset K$  - cílové stavy;
- ◆  $\delta: K \times V \rightarrow K \times X$  - přechodová funkce stavů.

# AUTONOMNÍ STOCHASTICKÝ KONEČNÝ AUTOMAT

- ◆ Zobecnění konečného automatu.
- ◆ Přejchodová funkce stavů:  $\delta_s: X \times K \times K \times V \rightarrow \mathbb{R}$
- ◆ Počáteční stav:  $p: K \rightarrow \mathbb{R}$ .
- ◆ Autonomní stochastický automat: zvláštní případ, kdy vstupní abeceda  $V$  obsahuje jediný symbol. Vyjadřuje situaci, kdy na vstupu nezáleží.
- ◆ Později uvidíme, že **autonomní stochastický automat je ekvivalentní se (skrytými) markovskými řetězy.**

Automat funguje ve shodě s rozdělením pravděpodobnosti

$$p(x, k) = p(x_1, \dots, x_n, k_0, \dots, k_n) = p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1})$$

To znamená, že automat:

- ◆ na počátku generuje náhodný stav  $k_0$  s pravděpodobností  $p(k_0)$  a přejde do něj,
- ◆ v  $i$ –tém okamžiku generuje dvojici  $(x_i, k_i)$  s pravděpodobností  $p(x_i, k_i | k_{i-1})$ . Na výstupu dává symbol  $x_i$  a přechází do stavu  $k_i$ .

# PŘÍKLAD: GENERATIVNÍ MARKOVSKÝ MODEL (model počasí)

Stochastický konečný automat.

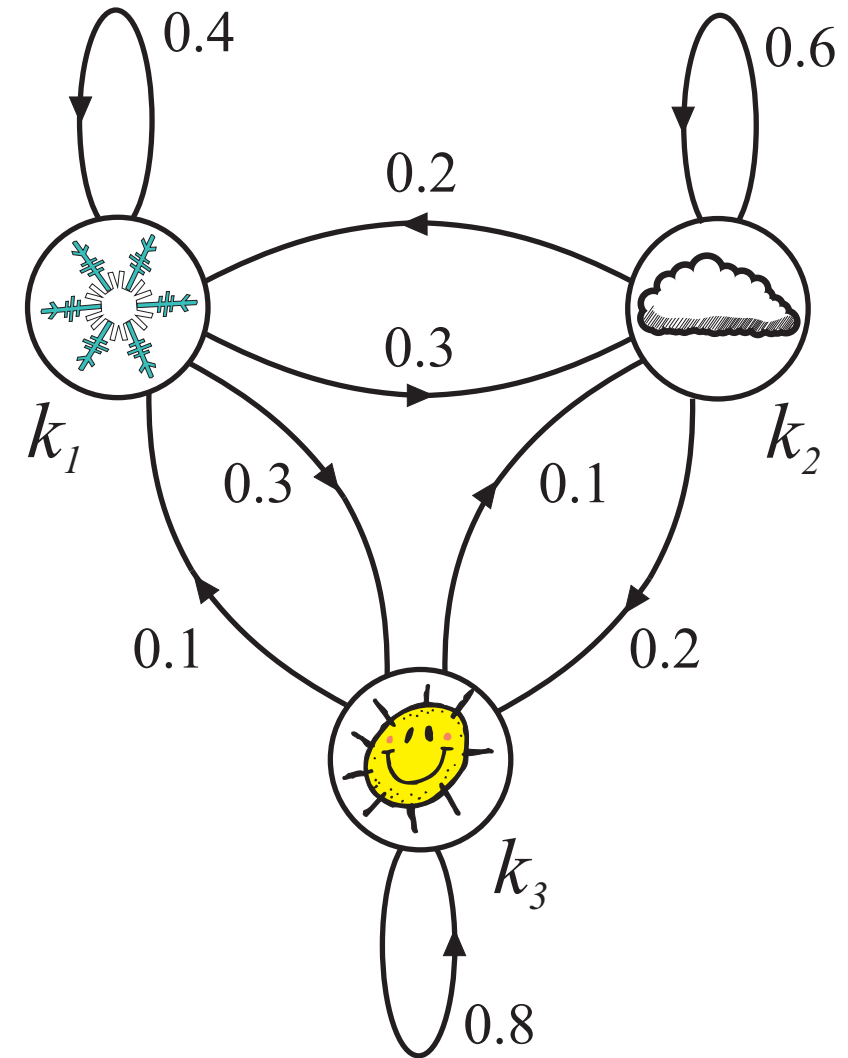
Stav  $k_1$ : dešťové nebo sněhové srážky.

Stav  $k_2$ : zataženo.

Stav  $k_3$ : slunečno.

Přechodová matice stavů

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$



# ZNAČENÍ POSLOUPNOSTÍ

Náhodné posloupnosti

pozorování  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$

skryté stavy  $k = (k_0, k_1, k_2, \dots, k_n) \in K^{n+1}$

Značení posloupností:  $(x_a, x_{a+1}, \dots, x_b) = x_a^b$

pozorování  $x = x_1^n$

skryté stavy  $k = k_0^n$

# MARKOVSKÉ POSLOUPNOSTI SE SKRYTÝMI STAVY

◆ Statistický model  $p(x, k) = X^n \times K^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ .

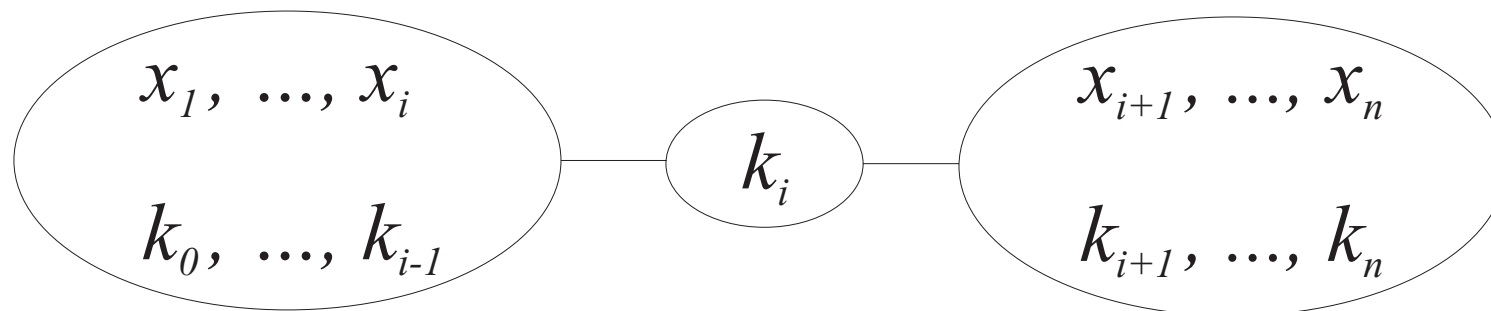
◆ Markovský řetěz:

Předpokládáme, že pro všechny posloupnosti

$$x = (x_1^i, x_{i+1}^n) \text{ a } k = (k_0^{i-1}, k_i, k_{i+1}^n)$$

platí

$$p(x, k) = p(k_i) p(x_1^i, k_0^{i-1} | k_i) p(x_{i+1}^n, k_{i+1}^n | k_i). \quad (1)$$



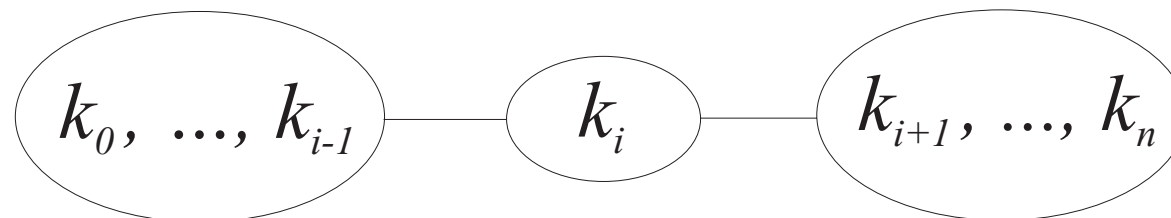
# JEN (SKRYTÉ) STAVY

- ◆ Vyjdeme z markovské podmínky

$$p(x, k) = p(k_i) p(x_1^i, k_0^{i-1} | k_i) p(x_{i+1}^n, k_{i+1}^n | k_i) .$$

- ◆ Pro skryté stavy po sčítání přes všechna možná pozorování  $x$  vyplývá markovská vlastnost posloupnosti

$$p(k) = p(k_i) p(k_0^{i-1} | k_i) p(k_{i+1}^n | k_i) .$$



V rovnici  $p(x, k) = p(k_i) p(x_1^i, k_0^{i-1} | k_i) p(x_{i+1}^n, k_{i+1}^n | k_i)$  budeme sčítat přes posloupnost skrytých stavů  $k_{i+2}^n$  a potom posloupnost pozorování  $x_{i+2}^n$  a získáme

$$\begin{aligned} p(x_1^{i+1}, k_0^{i+1}) &= \sum_{x_{i+2}^n} \sum_{k_{i+2}^n} p(x, k) = p(x_1^i, k_0^i) \sum_{x_{i+2}^n} \sum_{k_{i+2}^n} p(x_{i+1}^n, k_{i+1}^n | k_i) \\ &= p(x_1^i, k_0^i) p(x_{i+1}, k_{i+1} | k_i) \end{aligned}$$

Využijeme předchozí vztah rekurzivně a získáme

$$p(x, k) = p(x_1, \dots, x_n, k_0, \dots, k_n) = p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1})$$

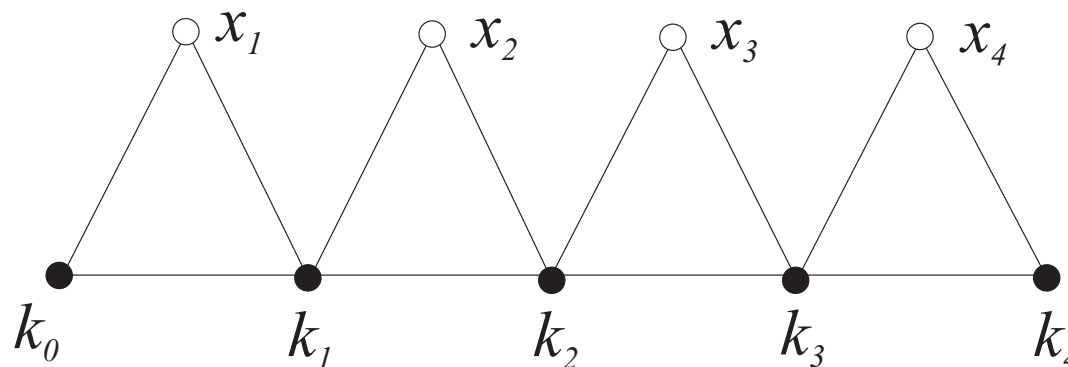
Výpočet složité funkce  $2n + 1$  proměnných se zjednodušil na výpočet  $n$  funkcí  $p(x_i, k_i | k_{i-1})$  o třech proměnných a jedné funkce  $p(k_0)$  jedné proměnné.

- ◆ Uvažujme všechny možné dvojice posloupností  $(x_1^n, k_0^n)$ , které splňují markovskou podmínku (1).
- ◆ Zvolme libovolnou hodnotu  $i$ ,  $0 < i < n$ . Zvolme libovolnou hodnotu skrytého parametru  $k_i = \sigma$ .
- ◆ Z možných dvojic markovských posloupností  $(x_1^n, k_0^n)$  vyberme soubor posloupností, pro něž platí  $k_i = \sigma$ .
- ◆ Být markovskou posloupností potom znamená, že parametry  $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ ,  $(k_0, k_1, \dots, k_{i-1})$  ve vybraném souboru posloupností jsou statisticky nezávislé na parametrech  $(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ ,  $(k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_n)$ .

# POZOR NA NESPRÁVNOU INTERPRETACI

- ◆ Často se uvádí nepřesně zjednodušená interpretace: “Markovská posloupnost je taková, u níž nezáleží na minulosti, ale jen na současnosti.”
- ◆ Tato interpretace je zrádná, protože je sice nesprávná, ale od správné se liší jen málo.
- ◆ Ilustrujme situaci na mechanickém modelu markovské posloupnosti.

- ◆ Uvažujme posloupnosti  $x_1^4$  a  $k_0^4$  reprezentované vrcholy v rovině. Některé vrcholy jsou spojeny pružinami (zobrazenými pomocí úseček) označující statistickou vazbu v markovském modelu.



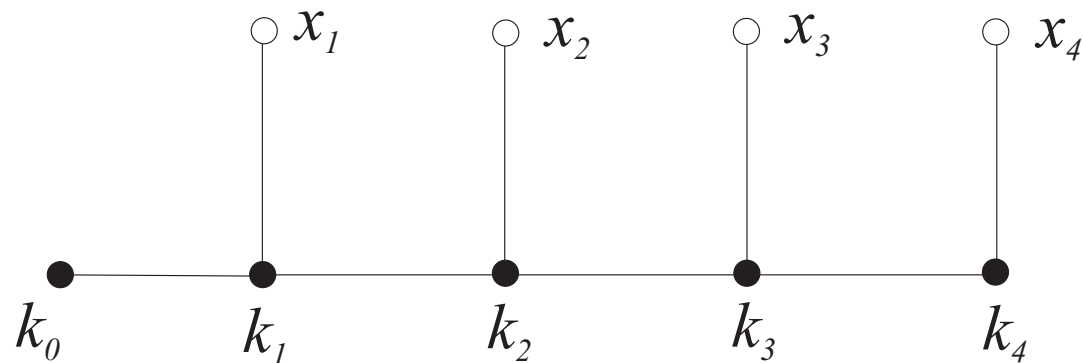
- ◆ Představme si, že např. vrchol  $x_3$  začne oscilovat. Díky vazbám postupně začnou oscilovat všechny ostatní body.
- ◆ Pokud jsou hodnoty  $x_1, \dots, x_4$  fixovány, jsou určeny i hodnoty  $k_0, \dots, k_n$ .
- ◆ Když zafixujeme např. vrchol  $k_3$ , potom se model rozloží na dvě nezávislé části: (a) vrcholy  $k_0, k_1, k_2, x_1, x_2, x_3$ . (b) vrcholy  $x_4, k_4$ .

# DEKOMPONOVATELNÝ STATISTICKÝ MODEL

- ◆ Zvláštní příklad často uvažovaný v literatuře.
- ◆ Předpokládá se:  $p(x_i, k_i | k_{i-1}) = p(x_i | k_i) p(k_i | k_{i-1})$ .
- ◆ Potom platí

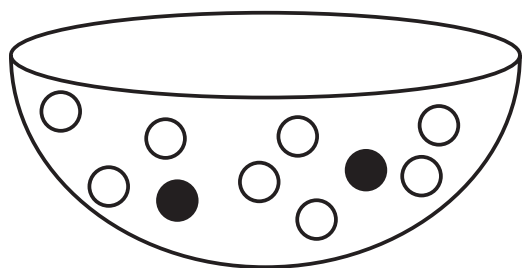
$$p(x, k) = p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1}) = p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i | k_i) \prod_{i=1}^n p(k_i | k_{i-1}) .$$

- ◆ Mechanický model

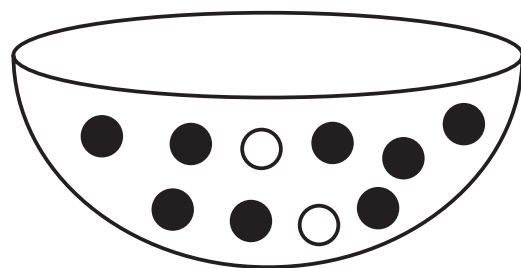


# PŘÍKLAD DEKOMPOZITELNÉHO MODELU

## Tahání kuliček z misek



Miska 1



Miska 2

kulička  $x = \{\text{černá, bílá}\}$

miska  $k = \{1, 2\}$

$$p(k = 1) = 0.5$$

$$p(k = 2) = 0.5$$

$$p(x = \text{bílá} | k = 1) = 0.8$$

$$p(x = \text{černá} | k = 1) = 0.2$$

$$p(x = \text{bílá} | k = 2) = 0.2$$

$$p(x = \text{černá} | k = 2) = 0.8$$

Tahání

z misek střídavě

$$p(k = 1 | k = 2) = 1$$

$$p(k = 1 | k = 1) = 0$$

$$p(k = 2 | k = 2) = 0$$

$$p(k = 2 | k = 1) = 1$$

# TŘI ZÁKLADNÍ ÚLOHY S HMM

1. **Rozpoznávání** též **ohodnocení statistického modelu**: (dynamické programování, v angl. literatuře algoritmus forward-backward). Dány parametry HMM (statistických modelů), cílem je spočítat pravděpodobnost, že je pozorována posloupnost  $x$ . Třída odpovídá nejpravděpodobnějšímu modelu. Používá se pro rozpoznávání.
2. **Hledání nejpravděpodobnější posloupnosti skrytých stavů**: (algoritmus Viterbi, dynamické programování). Dán statistický model a posloupnost pozorování  $x$ . Cílem je najít nejpravděpodobnější posloupnost skrytých stavů  $k$ .
3. **Učení statistického modelu**: (algoritmus Baum-Welsh, využívá EM algoritmus). Dána struktura modelu, tj. počet skrytých stavů a trénovací množina. Cílem je najít parametry modelu, tj. pravděpodobnosti  $p(x_i, k_i | k_{i-1})$ .

# ÚLOHA ROZPOZNÁVÁNÍ

## též OHODNOCENÍ STATISTICKÉHO MODELU

### Formulace úlohy

- ◆ Nechtě  $a$ ,  $b$  jsou dva autonomní stochastické automaty se stejným počtem stavů  $K$  a výstupních symbolů  $X$ .
- ◆ Statistické vlastnosti automatů se liší.  
Automat  $a$  je popsán:  $p_a(k_0)$  a  $p_a(x_i, k_i | k_{i-1})$ ,  $k_0 \in K$ ,  $k_i \in K$ ,  $x_i \in X$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .  
Podobně automat  $b$  je popsán:  $p_b(k_0)$  a  $p_b(x_i, k_i | k_{i-1})$ .  
Pozn.: zde pro jednoduchost pravděpodobnosti nezávisí na indexu  $i$ . Obecně mohou a naše úvahy platí také.
- ◆ Úloha ohodnocení statistického modelu (též úloha rozpoznávání) má při znalosti statistických modelů automatů rozhodnout, který automat generoval posloupnost pozorování  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

## ÚLOHA ROZPOZNÁVÁNÍ (2)

- ◆ Úlohu rozpoznávání lze vyjádřit jako minimalizaci bayesovského rizika (např. pro jednoduchost pravděpodobnost chybného rozhodnutí). Formulace může být jako Neyman-Pearsonova úloha, minimaxní úloha, atd.
- ◆ Je potřebné spočítat pro automaty  $a$ ,  $b$  odpovídající marginální pravděpodobnosti  $p_a(x_1^n)$  a  $p_b(x_1^n)$ .
- ◆ Rozhodne se např. podle maximální věrohodnosti  $p_a(x_1^n) / p_b(x_1^n)$ .
- ◆ Nejnáročnější částí úlohy je spočítat pravděpodobnosti  $p_a(x_1^n)$  a  $p_b(x_1^n)$ . Výpočet je stejný pro automaty  $a$  i  $b$ , a tak index nebude uváděn.

Vzpomeňme na markovský statistický model

$$p(x, k) = p(x_1, \dots, x_n, k_0, \dots, k_n) = p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1})$$

Nás nyní zajímá marginální pravděpodobnost  $p(x) = \sum_{k \in K} p(x, k)$ . Vyjádří se jako mnohočetná suma

$$p(x) = \sum_k p(k, x) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_{n-1}} \sum_{k_n} p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1}) .$$

Přímý výpočet není praktický, protože sčítanců je  $|K|^{n+1}$ . Vzorec lze ekvivalentními transformacemi upravit do použitelného tvaru.

# ALGORITMUS ROZPOZNÁVÁNÍ (2)

Při sčítání podle stavu  $k_i$  lze vytknout činitele nezávisející na  $k_i$ . Vyjdeme z již známého

$$p(x) = \sum_k p(k, x) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_{n-1}} \sum_{k_n} p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1}) .$$

Po vytýkání se převede na

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k_0} p(k_0) \sum_{k_1} p(x_1, k_1 | k_0) \cdots \sum_{k_i} p(x_i, k_i | k_{i-1}) \\ &\cdots \sum_{k_{n-1}} p(x_{n-1}, k_{n-1} | k_{n-2}) \sum_{k_n} p(x_n, k_n | k_{n-1}) . \end{aligned}$$

# ALGORITMUS ROZPOZNÁVÁNÍ (3)

Míříme k rekurzivnímu algoritmu. Ve vztahu po vytýkání

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k_0} p(k_0) \sum_{k_1} p(x_1, k_1 | k_0) \cdots \sum_{k_i} p(x_i, k_i | k_{i-1}) \\ &\cdots \sum_{k_{n-1}} p(x_{n-1}, k_{n-1} | k_{n-2}) \sum_{k_n} p(x_n, k_n | k_{n-1}) . \end{aligned}$$

si označíme dílčí součty pro  $i = 1, 2, \dots, n$  jako

$$\begin{aligned} f_i(k_{i-1}) &= \sum_{k_i} p(x_i, k_i | k_{i-1}) \sum_{k_{i+1}} p(x_{i+1}, k_{i+1} | k_i) \cdots \\ &\cdots \sum_{k_{n-1}} p(x_{n-1}, k_{n-1} | k_{n-2}) \sum_{k_n} p(x_n, k_n | k_{n-1}) \end{aligned}$$

a získáme algoritmus výpočtu

Výpočet probíhá odzadu posloupnosti

$$\left. \begin{aligned} f_n(k_{n-1}) &= \sum_{k_n} p(x_n, k_n | k_{n-1}); \\ f_i(k_{i-1}) &= \sum_{k_i} p(x_i, k_i | k_{i-1}) f_{i+1}(k_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1; \\ p(x) &= \sum_{k_0} p(k_0) f_1(k_0). \end{aligned} \right\}$$

Počet operací při výpočtu je úměrný  $|K|^2 n$ .

# NEJPRAVDĚPODOBNEJŠÍ POSLOUPNOST SKRYTÝCH STAVŮ

## Formulace úlohy

- ◆ Dán statistický model  $p(x, k) = p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1})$  .
- ◆ Hledá se rozhodovací strategie  $q: X^n \rightarrow K^{n+1}$  .
- ◆ Bayesovské riziko  $R(q) = \sum_{x \in X} \sum_{k \in K} p(x, k) W(x, q(x))$  .
- ◆ Jednoduchá pokutová funkce

$$W(k, q(x)) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k = q(x) , \\ 1 & \text{pro } k \neq q(x) . \end{cases}$$

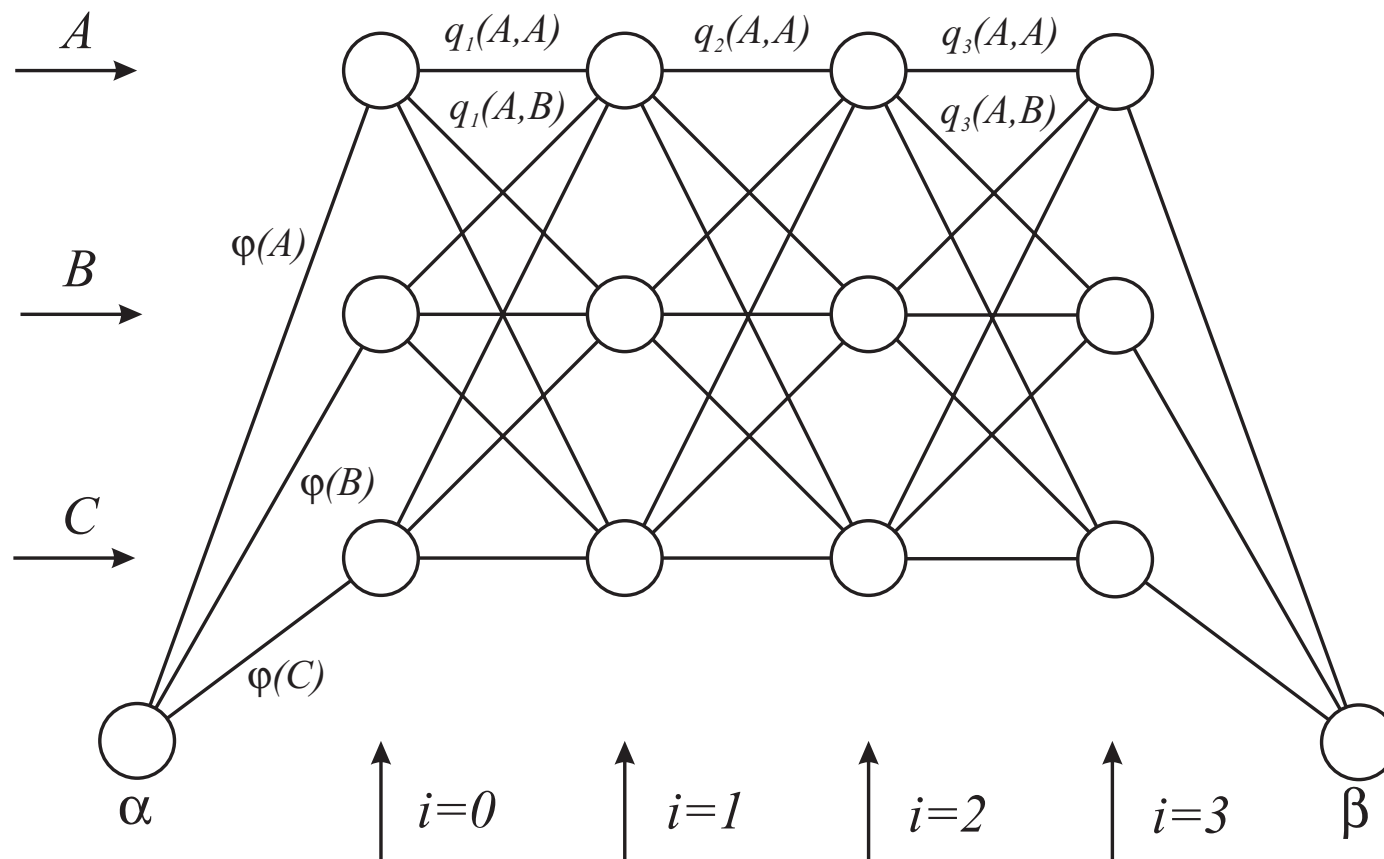
Cílem je najít strategii  $q(x)$  minimalizující riziko  $R(q)$ .

# ODVOZENÍ BAYESOVSKÉ STRATEGIE

$$\begin{aligned} q(x) &= \operatorname{argmax}_{k \in K^{n+1}} \frac{p(x, k)}{\sum_{k' \in K^{n+1}} p(x, k')} = \operatorname{argmax}_{k \in K^{n+1}} p(x, k) \\ &= \operatorname{arg max}_{k_0} \dots \operatorname{max}_{k_n} p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1}) \\ &= \operatorname{arg max}_{k_0} \dots \operatorname{max}_{k_n} \log \left( p(k_0) \prod_{i=1}^n p(x_i, k_i | k_{i-1}) \right) \\ &= \operatorname{arg max}_{k_0} \dots \operatorname{max}_{k_n} \left( \underbrace{\log p(k_0)}_{\varphi(k_0)} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\log p(x_i, k_i | k_{i-1})}_{q_i(k_{i-1}, k_i)} \right) \end{aligned}$$

# FORMULACE JAKO HLEDÁNÍ NEJKRATŠÍ CESTY V GRAFU

- ◆ Orientovaný graf s vrcholy a hranami orientovanými zleva doprava mezi nimi. Počátečním vrcholem je  $\alpha$  a cílovým vrcholem  $\beta$ . Zbýlých  $|K|(n + 1)$  mezilehlých vrcholů indexujeme dvojicí  $(\sigma, i)$ ,  $\sigma \in K$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .
- ◆ Příklad grafu pro  $n = 3$  a množinu skrytých stavů  $K = \{A, B, C\}$ .



**Dynamické programování.** Graf má zvláštní tvar. Je zaručeno uspořádání.  
(analogie – poslové).

$f_i(\sigma)$  je délka nejkratší cesty ( $\sim$  času) z vrcholu  $\alpha$  do  $(\sigma, i)$ .

**Algoritmus Viterbi** 1967 (nezávisle Vincjuk 1968):

◆  $f_0(\sigma) = \varphi(\sigma)$

◆ Opakovaně pro  $i = 1, \dots, n, \quad \sigma \in K$

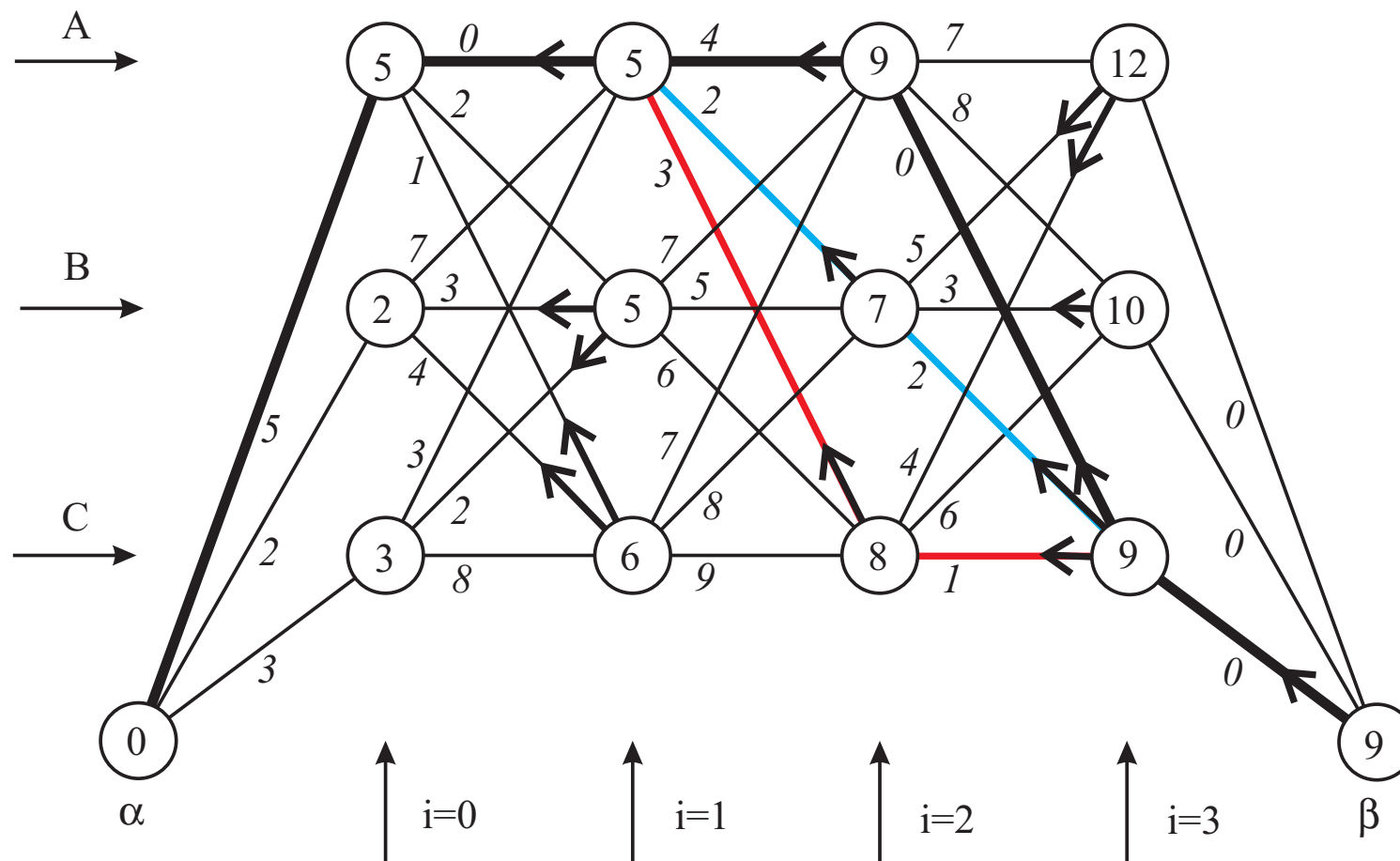
$$f_i(\sigma) = \min_{\sigma' \in K} (f_i(\sigma') + q_i(\sigma', \sigma)).$$
 Dráha posla, který přišel nejdříve.

$$\text{ind}_i(\sigma) = \underset{\sigma' \in K}{\text{argmin}} (f_i(\sigma') + q_i(\sigma', \sigma)).$$
 Vrchol, z něhož přišel první posel.

◆ Nakonec:

$$k_n = \underset{\sigma \in K}{\text{argmin}} f_n(\sigma), \quad k_{i-1} = \text{ind}_i(k_i).$$
 Rekonstrukce nejkratší cesty.

# PŘÍKLAD NA VITERBIHO ALGORITMUS



Šipky označují  $\text{ind}_i(\sigma)$ . Šipky se použijí pro nalezení optimální cesty. Těchto cest může být více. V našem příkladě jsou to kromě AAAC i AABC nebo AACC.