

Cvičení přímo vychází ze skriptu Matematika spojitého světa (MSS) (http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf).
Veškeré úlohy řešte a dokumentujte v programu Maple.

Úloha 1. (MSS př. 96 DR-1, str. 44)

a. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0. \quad (1)$$

b. Najděte partikulární řešení rovnice (1) s počáteční podmínkou

$$y(0) = 1. \quad (2)$$

c. Najděte partikulární řešení rovnice (1) s počáteční podmínkou

$$y(0) = 0. \quad (3)$$

d. Najděte partikulární řešení rovnice (1) s počáteční podmínkou

$$y(0) = 1, y'(0) = 1. \quad (4)$$

e. Kolik řešení má rovnice (1) v případech a., b., c.? Jsou v každém případě vždy všechna řešení navzájem různá?

f. Nakreslete alespoň tři různá řešení rovnice (1), pokud je to možné, pro každý z případů a., b., c.

Úloha 2. (MSS př. 91 DR-2, str. 43)

a. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'(x) + c \cdot y(x) = 0. \quad (5)$$

b. S odvoláním na příklad DR-2 uvažujte hodnoty $\rho_0 = 1.29 \text{ kg/m}^3$, $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, tj. $c = g \frac{\rho_0}{p_0} \doteq 1.25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, najděte příslušné partikulární řešení rovnice (5), nakreslete jeho graf a určete hustotu atmosféry ve výšce 2 km.

Úloha 3. (MSS př. 97 DR-3, str. 46)

a. Najděte obecné řešení řešení diferenciální rovnice

$$y''(x) + \omega^2 \cdot y(x) = 0. \quad (6)$$

b. Najděte partikulární řešení rovnice (6) s počáteční podmínkou

$$y(0) = 0, y'(0) = 1. \quad (7)$$

c. Najděte partikulární řešení rovnice (6) s počáteční podmínkou

$$y(0) = 0, y'(0) = 0. \quad (8)$$

d. Nakreslete graf řešení případů b. a c.

e. Interpretujte význam parametru ω (v případě potřeby konzultujte např. http://cs.wikipedia.org/wiki/Matematické_kyvadlo, pod.) a vysvětlete smysl řešení v případech b. a c.

Úloha 4. (MSS př. 98 DR-4, str. 47)

a. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0. \quad (9)$$

b. Najděte partikulární řešení rovnice (1) s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 1, y(\pi/2) = 0. \quad (10)$$

c. Najděte partikulární řešení rovnice (1) s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0, y(\pi/2) = 1. \quad (11)$$

d. Najděte partikulární řešení rovnice (1) s okrajovými podmínkami

$$y(0) = 0, y(\pi/2) = 0. \quad (12)$$

e. Nakreslete řešení v případech b., c., d.

Úloha 5. (MSS př. 99 DR-5, str. 47)

a. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0. \quad (13)$$

b. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''(x) + 6y'(x) + 8.99 \cdot y(x) = 0, \quad (14)$$

která se od rovnice (13) liší jen "velmi málo" .

c. Zvolte libovolné ale stejné počáteční podmínky pro případ a. a b. a nakreslete graf obou řešení.

d. Opakujte c. pro jiné počáteční podmínky.

Úloha 6. (MSS př. 103 DR-6, str. 49)

a. Najděte obecné řešení sdružené homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 4x - 8. \quad (15)$$

b. Najděte partikulární řešení rovnice (15).

c. Zvolte libovolně počáteční (nebo okrajové) podmínky pro rovnici (15) a nakreslete graf řešení sdružené homogenní rovnice, dále nakreslete graf partikulárního řešení a dále graf řešení rovnice (15) s vašimi podmínkami.

Úloha 7. (MSS př. 104 DR-7, str. 49)

a. Zopakujte postup řešení úlohy 6. pro diferenciální rovnici

$$y''(x) + 3y'(x) = 4x - 8, \quad (16)$$

- počáteční (nebo okrajové) podmínky volte stejně jako v úloze 6.
b. Porovnejte výsledné funkce z úlohy 6. a 7. (např. je zakreslete do stejného grafu).

Úloha 8. (MSS př. 106 DR-8, str. 50)

- a. Najděte obecné řešení sdružené homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$y'(x) - 2y(x) = e^{2x}. \quad (17)$$

- b. Najděte partikulární řešení rovnice (17).
c. Zvolte libovolně počáteční (nebo okrajové) podmínky pro rovnici (17) a nakreslete graf řešení sdružené homogenní rovnice, dále nakreslete graf partikulárního řešení a dále graf řešení rovnice (17) s vašimi podmínkami.

Úloha 9. (MSS př. 108 DR-9, str. 51)

- a. Najděte obecné řešení sdružené homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$y'(x) - 2y(x) = 4 \cdot \cos(2x). \quad (18)$$

- b. Najděte partikulární řešení rovnice (18).
c. Zvolte libovolně počáteční (nebo okrajové) podmínky pro rovnici (18) a nakreslete graf řešení sdružené homogenní rovnice, dále nakreslete graf partikulárního řešení a dále graf řešení rovnice (18) s vašimi podmínkami.

Úloha 10. (MSS př. 110 DR-10, str. 51)

- a. Najděte obecné řešení sdružené homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$y'(x) - 2y(x) = 2 \cdot e^x \cdot \sin(x). \quad (19)$$

- b. Najděte partikulární řešení rovnice (19).
c. Zvolte libovolně počáteční (nebo okrajové) podmínky pro rovnici (19) a nakreslete graf řešení sdružené homogenní rovnice, dále nakreslete graf partikulárního řešení a dále graf řešení rovnice (19) s vašimi podmínkami.

Úloha 11. (MSS př. 112 DR-11, str. 52)

- a. Najděte obecné řešení sdružené homogenní rovnice k diferenciální rovnici

$$y'(x) - 2y(x) = e^{2x} + 3 \cdot e^x. \quad (20)$$

- b. Najděte partikulární řešení rovnice (20).
c. Zvolte libovolně počáteční (nebo okrajové) podmínky pro rovnici (20) a nakreslete graf řešení sdružené homogenní rovnice, dále nakreslete graf partikulárního řešení a dále graf řešení rovnice (20) s vašimi podmínkami.