Dvojný a trojný integrál

Vyřešte alespoň jednu variantu z každé úlohy 2.−6. Pozor, v zápisech integrálů neuvádíme symboly diferenciálů jednotlivých proměnných $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, *nenechte se tím zmást, jedná se pouze o jeden z možných způsobů zápisu, který nemění smysl integrálu, vždy integrujeme přes danou oblast U (viz např. poznámku 60, str. 27 ve skriptech MSS).*

Úloha 1.

Ověřte výsledky příkladů INT2-1, INT2-2, INT2-3, INT3-1 (př. 58, str. 26, př. 63, str. 29, př. 67, str. 32, př.71, str. 34) ve skriptu MSS (http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf).

Úloha 2.

Vypočtěte daný dvojný integrál přes zadanou oblast U. Volte sami pořadí integrace podle x a y.

a. $\iint\limits_U 1\,,$ U je omezena křivkami $y = 2 - x$, $y^2 = 4x + 4$.

b. $\iint\limits_U 2x + y\,,$ U je omezena křivkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

c. $\iint\limits_U \cos(x + y)\,,$ U je omezena křivkami $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$.

d. $\iint\limits_U e^{\frac{x}{y}}\,,$ U je omezena křivkami $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$.

e. $\iint\limits_U \sqrt{4x^2 - y^2}\,,$ U je omezena křivkami $y = 0$, $x = 1$, $y = x$.

f. $\iint\limits_U x\,,$ U je omezena křivkami $y = 2x - 1$, $y = 4 - (1 - x)^2$.

g. $\iint\limits_U \frac{1}{\sqrt{ax - x^2}}\,,$ U je omezena křivkami $x = 0$, $y^2 = a^2 - ax$.

h. $\iint\limits_U 1\,,$ U je omezena křivkou $(x - y)^2 + x = a^2$.

Úloha 3.

Vypočtěte daný dvojný integrál přes zadanou oblast U. Využijte polárních souřadnic.

a. $\iint\limits_U x^2 + y^2\,,$ U je určena nerovností $x^2 + (y + 2)^2 \le 4$.

b. $\iint\limits_U \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,,$ U je určena nerovností $x^2 + y^2 \le a^2$.

c. $\iint\limits_U \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,,$ U je určena nerovnostmi $9 \ge x^2 + y^2 \ge 1$, $x \le y\sqrt{3} \le 3x$.

d. $\iint\limits_U 1\,,$ U je určena vztahy $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 \ge a^2$.

e. $\iint\limits_U 1\,,$ U je určena vztahy $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$, $a > 0$.

Úloha 4.

Vypočtěte daný dvojný integrál přes zadanou oblast U. Použijte vhodnou transformaci souřadnic.

a. $\iint\limits_U \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,,$ U je určena nerovností $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

b. $\iint\limits_U 1\,,$ U je určena vztahy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$, $|y|\le \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha\in\langle 0,\,2\pi\rangle$.

c. $\iint\limits_U x+y\,,$ U je omezena křivkami $x+y=4$, $x+y=12$, $y^2=2x$.

d. $\iint\limits_U x^2+y^2\,,$ U je omezena křivkami $x^2+y^2+2x-1=0$, $x^2+y^2+2x=0$.

e. $\iint\limits_U \frac{y}{x}\cdot e^{xy}\,,$ U je omezena křivkami $xy=2$, $xy=4$, $y=2x$, $x=2y$.

f. $\iint\limits_U |x|+|y|\,,$ U je určena vztahem $|x|+|y|\le 1$.

Úloha 5.

Vypočtěte daný trojný integrál přes zadanou oblast U.

a. $\iiint\limits_U 1-x,$ U je určena vztahy $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $3x+2y+z\le 6$.

b. $\iiint\limits_U z\,,$ U je určena vztahem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$.

c. $\iiint\limits_U x\,,$ U je omezena plochami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$, $x+y=2$.

d. $\iiint\limits_U xyz\,,$ U je omezena plochami $x=y^2$, $y=x^2$, $z=0$, $z=xy$.

e. $\iiint\limits_U 1\,,$ U je omezena plochami $x^2+y^2=z$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

f. $\iiint\limits_U 1\,,$ U je omezena plochami $y=x$, $y=0$, $x=\pi$, $z=0$, $z=\sin\frac{\pi y}{2x}$.

Úloha 6.

Vypočtěte daný trojný integrál přes zadanou oblast U. Použijte vhodnou transformaci souřadnic (sférické, cylindrické...).

a. $\iiint\limits_U \sqrt{x^2+y^2+z^2},$ U je omezena plochou $x^2+y^2+z^2=z$.

b. $\iiint\limits_U x^2+y^2\,,$ U je omezena plochami $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

c. $\iiint\limits_U \frac{1}{\sqrt{(1+x^2+y^2+z^2)^3}},$ U je určena vztahy $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

d. $\iiint\limits_U 1,$ U je omezena plochami $x^2+y^2+z^2=2z$, $x^2+y^2+z^2=2$ a navíc $(0,0,1)\in U$.

e. $\iiint\limits_U z\cdot\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}},$ U je určena vztahy $x^2+y^2\le 2az$, $x^2+y^2+z^2\le 3a^2$.