Křivkové integrály prvního druhu

Vyřešte alespoň tři varianty z úlohy 2. Pozor, v zápisech integrálu je použit symbol $\mathrm{d}s$ *ve významu* $\mathrm{d}s = \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t = \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \ldots + (\varphi_n'(t))^2}\ \mathrm{d}t$, *kde* $\boldsymbol{\varphi}(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *je parametrizace křivky* C, *podél které integrujeme. Nezbytnou součástí řešení každé úlohy je ovšem také nalezení vhodné parametrizace* $\boldsymbol{\varphi}(t)$. *Viz rovněž odstavec 5.4, str. 39 ve skriptech MSS.*

Úloha 1.

S použitím ukázkového dokumentu Maple kriv1_cv.mw (http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/log.html) ověřte výsledek příkladu KRIV1-1, (př. 88, str. 40) ve skriptu MSS.

Úloha 2.

Vypočtěte uvedené křivkové integrály

a. $\int_C \frac{1}{x-y}\,\mathrm{d}s$, kde C je úsečka s krajními body $A = (0, -2)$, $B = (4, 0)$.

b. $\int_C xy\,\mathrm{d}s$, kde $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x > 0,\ y > 0,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ a \neq b\right\}$.

c. $\int_C (x^{4/3} + y^{4/3})\,\mathrm{d}s$, kde C je asteroida o rovnici $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

d. $\int_C \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$, kde C je část cykloidy určená vztahy $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$.

e. $\int_C (2z - \sqrt{x^2 + y^2})\,\mathrm{d}s$, kde C je závit kuželové šroubovice $\{(t \cdot \sin t,\ t \cdot \cos t,\ t) \in \mathbb{R}^3 | \, t \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$.

f. $\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, kde C je dána rovnicemi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, $x + y + z = 0$.

g. $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$, kde C je oblouk šroubovice$\{(a \cdot \cos t,\ a \cdot \sin t,\ t) \in \mathbb{R}^3 | \, t \in \langle 0, 2\pi\rangle\ ,\ a > 0\}$.

h. $\int_C z\,\mathrm{d}s$, kde C je oblouk v $\mathbb{R}^3$ s počátečním bodem $(0, 0, 0)$ a koncovým bodem $(2, 0, 2)$ vyhovující rovnicím $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

i. $\int_C (x + y)\,\mathrm{d}s$, kde C je hranice trojúhelníka ABD v $\mathbb{R}^2$ s vrcholy $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$, $D = (1, 0)$.

j. $\int_C |y|\ \mathrm{d}s$, kde C je křivka (nazývaná lemniskáta) popsaná rovnicí $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

k. $\int_C x\,\mathrm{d}s$, kde C je ta část logaritmické spirály $r = ae^{k\varphi}$, $(k > 0)$, která leží uvnitř kruhu $r \leq a$.

l. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}s$, kde C je kružnice v $\mathbb{R}^2$ popsaná rovnicí $x^2 + y^2 = ax$.