Křivkové integrály druhého druhu

Vyřešte alespoň jednu úlohu z úloh 3.−9., dále buď alespoň jednu variantu úlohy 11. nebo úlohu 12. a nakonec alespoň jednu z úloh 13.−17.

Úloha 1.

S použitím ukázkového dokumentu Maple kriv2_cv.mw (http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/log.html) ověřte výsledky příkladů KRIV2-1, KRIV2-2 (př. 77, str. 36 a př.78, str. 36) ve skriptu MSS (http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/MSS/MSS_print.pdf).

Úloha 2.

Integrujte vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y) = (2a-y,\, x)$ podél oblouku cykloidy daného parametrizací $x(t) = a(t-\sin t)$, $y(t) = a(1-\cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Úloha 3.

Určete práci, která se vykoná při pohybu po kružnici $x^2+y^2=a^2$ s kladnou orientací v silovém poli daném vztahem $\boldsymbol{f}(x,y) = (x+y, 2x)$.

Úloha 4.

Vypočtěte křivkový integrál $\int_C x\mathrm{d}y$, kde C je kladně orientovaný obvod trojúhelníku tvořeného osami souřadnic a přímkou $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

Úloha 5.

Vypočtěte křivkový integrál $\int_C (x^2-2xy)\mathrm{d}x + (y^2-2xy)\mathrm{d}y$, kde C je kladně orientovaný oblouk paraboly o rovnici $y=x^2$ s počátečním bodem $(-1,1)$ a koncovým bodem $(1,1)$.

Úloha 6.

Vypočtěte křivkový integrál $\int_C \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$, kde C je kladně orientovaná kružnice se středem v počátku a s poloměrem a.

Úloha 7.

Vypočtěte křivkový integrál $\int_C \frac{-y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, kde C je část asteroidy o rovnici $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $a>0$,ležící v prvním kvadrantu s počátečním bodem $(a,0)$ a koncovým bodem $(0,a)$.

Úloha 8.

Vypočtěte křivkový integrál $\int_C x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x+y-1)\mathrm{d}z$, kde C je orientovaná úsečka s počátečním bodem $(1,1,1)$ a koncovým bodem $(2,3,4)$.

Úloha 9.

Vypočtěte křivkový integrál $\int_C yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$, kde C je orientovaný úsek šroubovice s parametrickým vyjádřením $\varphi(t) = (a\cos t,\, a\sin t,\, \frac{bt}{2\pi})$, $t \in \langle 0,\, 2\pi \rangle$.

Úloha 10.

Ověřte řešení příkladu KRIV2-3 (př.81, str. 38) MSS. Dále vysvětlete úvodní poznámku o parametrizaci a pokuste se vyřešit úlohu pomocí tam navržené parametrizace. Dokážete vypočítat potenciál daného vektorového pole?

Úloha 11.

Rozhodněte, zda existují potenciály daných vektorových polí v uvedených oblastech, a pokud ano, určete je .

a. $\boldsymbol{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ v $G=\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$,

b. $\boldsymbol{f}(x,y,z)= (-y^2 - 2xz, 2yz - 2xy, y^2 - x^2)$ v $\mathbb{R}^3$,

c. $\boldsymbol{f}(x,y,z)= (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2)$ v $\mathbb{R}^3$,

d. $\boldsymbol{f}(x,y,z)= (3x^2y^2z^3 + z + 1, 2x^3yz^3 + 6yz + 2, 3x^3y^2z^2 + x + 3y^2 - 1)$ v $\mathbb{R}^3$.

Úloha 12.

Pokuste se stanovit parametr c tak, aby vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y,z)= (z, y^2 + cz, cx + y)$ bylo potenciální v $\mathbb{R}^3$. Svůj nález zdůvodněte.

V úlohách 13.−17. použijte Greenovu větu:

Úloha 13.

Integrujte vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y)= (y^2, x)$ po kladně orientované hranici čtverce $\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$.

Úloha 14.

Integrujte vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y)= (x^3 - 3x^2 \sin y, 3x^2 \cos y - y^3)$ po kladně orientované jednotkové kružnici se středem v počátku.

Úloha 15.

Integrujte vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y)= \left(-x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2},\ xe^{-y^2}\right)$ po kladně orientované hranici čtverce $\langle -a, a\rangle \times \langle -a, a\rangle$.

Úloha 16.

Integrujte vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y)= (x - y,\ x + y)$ po kladně orientované elipse s poloosami a, b a se středem v počátku.

Úloha 17.

Integrujte vektorové pole $\boldsymbol{f}(x,y)= (e^x \cos y - 16,\ e^x \sin y - 16y)$ po křivce s počátečním bodem $(a, 0)$ a koncovým bodem $(0, 0)$ splňující vztahy $x^2 + y^2 = ax$, y≥ 0. Návod: Doplňte danou křivku úsečkou na uzavřenou křivku.