

Domácí test 2010, varianta A

Všechny úlohy mají stejnou váhu, předpokládaný čas na vypracování je 90 minut.

1. Náhodná veličina X má exponenciální rozdělení s hustotou

$$f_X(u) = \begin{cases} 2^{-u} \ln 2 & \text{pro } u > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete a znázorněte rozdělení náhodných veličin

- a) $2 + X$,
- b) $2 - X$,
- c) $2X$.

2. Zpráva je kódována znaky „tečka“, „čárka“, „mezera“, jejich pravděpodobnosti vyslání jsou po řadě 0.4, 0.4, 0.2. Vyslaná tečka je s pravděpodobností 0.2 přijata jako čárka, s pravděpodobností 0.2 jako mezera. Vyslaná čárka je s pravděpodobností 0.2 přijata jako tečka, s pravděpodobností 0.1 jako mezera. Mezera je vždy přijata správně. Jaké jsou pravděpodobnosti jednotlivých vyslaných znaků, jestliže byla přijata čárka?

3. Pacientovi byly naměřeny následující hodnoty systolického krevního tlaku [torr]: 132, 135, 140, 153, 120, 148, 125. Posuďte na hladině významnosti 5%, zda střední hodnota odpovídá normálu, kterým je 120 torr. Uveďte použité předpoklady.

Řešení:

1.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - 2^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

a)

$$F_{2+X}(x) = F_X(x-2) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 1 - 2^{2-x} & x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_{2+X}(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 2^{2-x} \ln 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

b)

$$F_{2-X}(x) = 1 - F_X(2-x) = \begin{cases} 2^{x-2} & x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_{2-X}(x) = \begin{cases} 2^{x-2} \ln 2 & x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

c)

$$F_{2X}(x) = F_X(x/2) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - 2^{-x/2} & x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_{2+X}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2^{-x/2-1} \ln 2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Grafy funkcí jsou znázorněné na Obr. 1.

2. Označme jevy vyslání znaku V_{tecka} , V_{carka} , V_{mezera} , přijetí znaku D_{tecka} , D_{carka} , D_{mezera} .

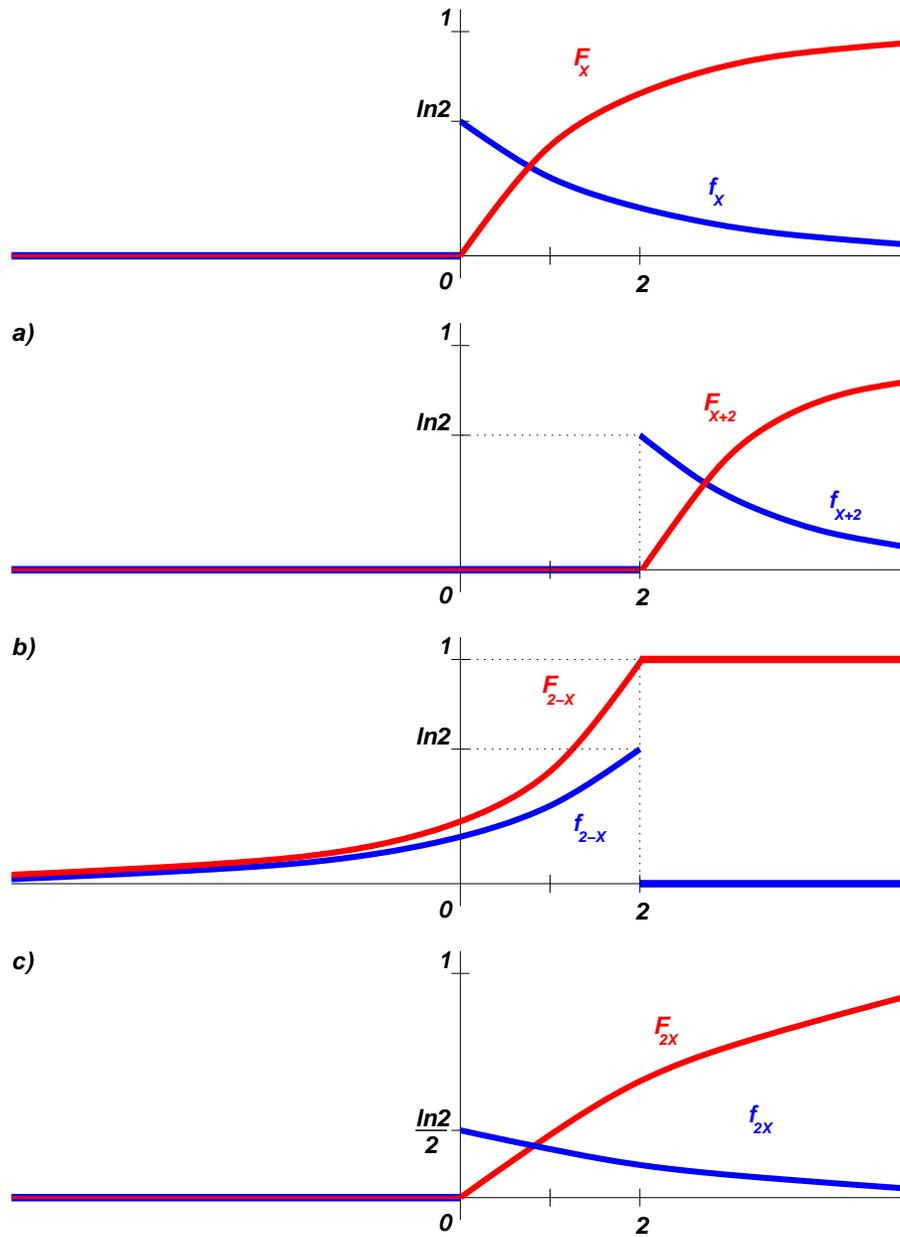
$$\begin{aligned} & [P(D_{tecka}) \quad P(D_{carka}) \quad P(D_{mezera})] = \\ & = [P(V_{tecka}) \quad P(V_{carka}) \quad P(V_{mezera})] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ & = [0.4 \quad 0.4 \quad 0.2] \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0.32 \quad 0.36 \quad 0.32], \end{aligned}$$

$$P(V_{tecka}|D_{carka}) = \frac{P(D_{carka}|V_{tecka}) P(V_{tecka})}{P(D_{carka})} = \frac{0.2 \cdot 0.4}{0.36} = \frac{2}{9} \doteq 0.222,$$

$$P(V_{carka}|D_{carka}) = \frac{P(D_{carka}|V_{carka}) P(V_{carka})}{P(D_{carka})} = \frac{0.7 \cdot 0.4}{0.36} = \frac{7}{9} \doteq 0.778,$$

$$P(V_{mezera}|D_{carka}) = \frac{P(D_{carka}|V_{mezera}) P(V_{mezera})}{P(D_{carka})} = \frac{0 \cdot 0.2}{0.36} = 0.$$

3. Výběrový průměr 136.1, výběrová směrodatná odchylka $\frac{5}{21}\sqrt{21}\sqrt{118} \doteq 11.85$, kritérium $\frac{136.1-120}{11.85}\sqrt{7} \doteq 3.6$. Nulovou hypotézu, vzhledem k hodnotám kvantilů Studentova rozdělení $q_{t(6)}(0.025) \doteq -2.45$ a $q_{t(6)}(0.975) \doteq 2.45$, zamítáme.



Obrázek 1: Grafy distribučních funkcí a hustot pravděpodobnosti.