

### 23.2.09

1. Za první účast na zkoušce se platí 30 EUR, za každý opravný pokus  $2 \times$  více než za předešlý. Student má v každém pokusu pravděpodobnost úspěchu  $p$ . Na kolik ho v průměru zkouška přijde (v závislosti na  $p$ )?

2. Náhodný vektor  $(X, Y)$  má následující parametry:  $EX = 10$ ,  $\sigma_X = 5$ ,  $EY = 150$ ,  $\sigma_Y = 20$ ,  $\rho(X, Y) = 0.5$  (korelace). Stanovte střední hodnotu a rozptyl náhodných veličin  $T = 2X + 3$ ,  $U = 200 - Y$ ,  $V = X + Y$ .

3. Na oboru má studovat 600 studentů, avšak fakulta smí stanovit pouze počet přijatých. Z dlouhodobé zkušenosti se ukazuje, že z přijatých studentů se zapíše asi  $2/3$ . Jaké se má stanovit směrné číslo pro přijetí, aby počet zapsaných byl co největší, ale aby překročil 600 s pravděpodobností nejvýše 5 %?

Jaký bude průměrný počet zapsaných studentů? Jak se úloha změní pro obor, na který má být přijato 60 studentů?

Uveďte použité předpoklady.

---

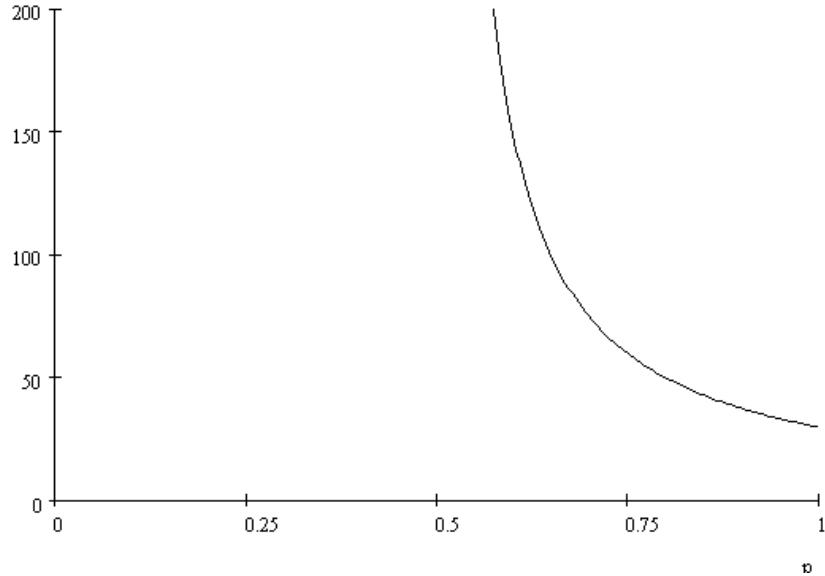
*Bonusová úloha (nepočítá se do základního bodování, ale zdařilá odpověď může zlepšit známku těm, kdo na ni v základní části získali nárok.)*

4. Centrální limitní věta vypovídá o rozdělení výběrového průměru velkého počtu náhodných veličin. Vyplývá z ní něco i o rozdělení výběrového rozptylu?

*Řešení:*

1.  $n$ -tá zkouška se koná s pravděpodobností  $(1 - p)^{n-1}$  a stojí  $30 \cdot 2^{n-1}$ , celková cena

$$30 \sum_{n=1}^{\infty} (2(1-p))^{n-1} = \begin{cases} \frac{30}{1-2(1-p)} & \text{pro } p > \frac{1}{2}, \\ \infty & \text{pro } p \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



2.

$$\begin{aligned} ET &= 2EX + 3 = 23, & DT &= 2^2 DX = 2^2 \sigma_X^2 = 100, \\ EU &= 200 - EY = 50, & DU &= DY = \sigma_Y^2 = 400, \\ EV &= EX + EY = 160, & DV &= DX + DY + 2\sigma_X \sigma_Y \rho(X, Y) = 5^2 + 20^2 + \\ &2 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 0.5 = 525. \end{aligned}$$

3. Je-li  $S$  počet přijatých studentů, pak počet zapsaných má binomické rozdělení  $\text{Bi}(S, \frac{2}{3})$ , které podle centrální limitní věty přibližně nahradíme normálním  $N(\frac{2}{3}S, \frac{2}{9}S)$ , jehož 95 %-ní kvantil nemá převyšít 600:

$$\begin{aligned} q_{N(\frac{2}{3}S, \frac{2}{9}S)}(0.95) &\leq 600, \\ 1.645 &\doteq \Phi^{-1}(0.95) = q_{N(0,1)}(0.95) \leq \frac{600 - \frac{2}{3}S}{\sqrt{\frac{2}{9}S}}, \end{aligned}$$

$S = 865$ . Střední hodnota počtu zapsaných je  $\frac{2}{3}S = 576\frac{2}{3} \doteq 576.7$ .

Na 60 míst by mělo být přijato  $S_2$  studentů, kde

$$1.645 \doteq \Phi^{-1}(0.95) = q_{N(0,1)}(0.95) \leq \frac{60 - \frac{2}{3}S}{\sqrt{\frac{2}{9}S}},$$

$S_2 = 79$ . Střední hodnota počtu zapsaných je  $\frac{2}{3} S_2 = 53\frac{1}{3} \doteq 53 \cdot 3$ .

Předpokládáme správnost odhadu pravděpodobnosti zápisu 2/3 a nezávislost zápisu studentů (což může být porušeno, pokud se např. skupina rozhoduje společně, nebo zápis ovlivní nějaká globální změna podmínek).

4. Ano, neboť i  $\chi^2$ -rozdelení vzniklo součtem stejně rozdelených nezávislých náhodných veličin, proto je lze (pro velký rozsah výběru) approximovat normálním.

Rozdelení výběrového průměru i rozdelení  $\chi^2$  se blíží normálnímu. Testy rozptylu pak lze použít i pro výběry z rozdelení, které není normální.