KLASICKÁ LOGIKA (CL)

SYNTAXE

$\mathcal{A}$ ... spočetná množina proměnných
$\mathcal{L} = \{\rightarrow, \mathbf{0}\}$ ... množina logických spojek:
$\rightarrow$ ... (binární) implikace
$\mathbf{0}$ ... (nulární) false

Formule

- všechny prvky $\mathcal{A}$ jsou formule
- $\mathbf{0}$ je formule
- jestliže A, B jsou formule, pak $A \rightarrow B$ je formule

Přesněji, používáme závorky, např. $(A) \rightarrow (B)$

Odvozené spojky:
$\neg A = A \rightarrow \mathbf{0}$ ... (unární) negace
$\mathbf{1} = \neg\mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0}$ ... (nulární) true
$A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$ ... (binární) konjunkce
$A \vee B = \neg A \rightarrow B$ ... (binární) disjunkce
$A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ ... (binární) ekvivalence

Logické axiomy

$$\begin{array}{ll} \text{(C1)} & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ \text{(C2)} & (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\ \text{(C3)} & (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \end{array}$$

Dedukční pravidlo: Modus ponens $\quad \mathrm{MP}(A,B): \quad \dfrac{A,\ A \rightarrow B}{B}$

Logické axiomy lze považovat též za dedukční pravidla bez předpokladů.

Teorie $\mathcal{T}$ ... množina formulí (**speciálních axiomů**)

Dokazatelná formule (=**teorém**) v teorii $\mathcal{T}$ je formule, k níž existuje **důkaz**, tj. **konečná** posloupnost formulí taková, že každá z nich je

- speciální axiom (=prvek $\mathcal{T}$), nebo
- instance logického axiomu (vzniklá substitucí), nebo
- výsledek aplikace dedukčního pravidla na předchozí formule v důkazu.

Značení: $\quad \mathcal{T} \vdash A, \qquad B \vdash A$ (pro $\mathcal{T} = \{B\}$), $\qquad \vdash A$ (pro $\mathcal{T} = \emptyset$)

Příklad Cl1 $\quad B \vdash A \rightarrow B$

$$\begin{array}{rl} \text{(C1)},\ A :=: B: & D_1 = B \rightarrow (A \rightarrow B) \\ \text{Speciální axiom}: & D_2 = B \\ \text{Modus ponens}(D_2, D_1): & D_3 = A \rightarrow B \end{array}$$

$\Rightarrow$ můžeme přidat dedukční pravidlo RI(B): $\dfrac{B}{A \rightarrow B}$

Příklad Cl2 $\quad \vdash A \rightarrow A$

$$\begin{array}{rrl} \text{(C2)}, C := A,\ B := B \rightarrow A: & D_1 = & (A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow \\ & & ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) \\ \text{(C1)}, C := A,\ B := B \rightarrow A: & D_2 = & A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A) \\ \mathrm{MP}(D_2, D_1): & D_3 = & (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \\ \text{(C2)}, B := B \rightarrow A: & D_4 = & A \rightarrow (B \rightarrow A) \\ \mathrm{MP}(D_4, D_3): & D_5 = & A \rightarrow A \end{array}$$

$\Rightarrow$ můžeme přidat axiom (AA): $A \to A$

Důsledek Cor1 $\vdash \mathbf{0} \to \mathbf{0}$, $\vdash \neg\mathbf{0}$, $\vdash \mathbf{1}$

Příklad Cl3 $\vdash A \to \mathbf{1}$ pro všechna A

$$\begin{aligned} \text{Cor1}: &\quad D_1 = \mathbf{1} \\ \text{RI}(D_1): &\quad D_2 = A \to \mathbf{1} \end{aligned}$$

Existuje pravdivá formule? Ano, např. jakýkoli axiom.

Existuje nepravdivá formule? Nemusí:

Příklad Cl4 $\{B, \neg B\} \vdash A$ pro všechna A

$$\begin{aligned} \text{(C3)}: &\quad D_1 = (\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \\ \text{SA}: &\quad D_2 = \neg B \\ \text{RI}(D_2): &\quad D_3 = \neg A \to \neg B \\ \text{MP}(D_3, D_1): &\quad D_4 = B \to A \\ \text{SA}: &\quad D_5 = B \\ \text{MP}(D_5, D_4): &\quad D_6 = A \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ můžeme přidat dedukční pravidlo: $\dfrac{B, \neg B}{A}$, ale to moc nevyužijeme

Důsledek $\{B, \neg B\} \vdash \mathbf{0}$ (i $\mathbf{0}$ je v této teorii dokazatelná!)

Příklad Cl5 $\vdash \mathbf{0} \to A$ pro všechna A (*ex falso quodlibet*)

$$\begin{aligned} \text{(C3)},\ B := \mathbf{0}: &\quad D_1 = (\neg A \to \neg\mathbf{0}) \to (\mathbf{0} \to A) \\ \text{Cl3}, A := \neg A: &\quad D_2 = \neg A \to \neg\mathbf{0} \\ \text{MP}(D_2, D_1): &\quad D_3 = \mathbf{0} \to A \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ můžeme přidat axiom $\mathbf{0} \to A$, ale ten moc nevyužijeme

Příklad Cl6 $\vdash A \vee \neg A$ pro všechna A (*tertium non datur*)

$$\text{(AA)},\ A := \neg A: \quad D_1 = \neg A \to \neg A = A \vee \neg A$$

$\Rightarrow$ můžeme přidat axiom $A \vee \neg A$

Příklad Cl7 $B \vdash A \vee B$ pro všechna A, B

$$\text{Cl1},\ A := \neg A: \quad D_1 = \neg A \to B = A \vee B$$

$\Rightarrow$ můžeme přidat dedukční pravidlo ROR(B): $\dfrac{B}{A \vee B}$

Věta o dedukci v klasické logice

$\mathcal{T}$ ... teorie

A, B ... formule

$\mathcal{T} \cup \{A\} \vdash B$, právě když $\mathcal{T} \vdash A \to B$

Důkaz $\Leftarrow$:

$$\begin{aligned} &\quad \text{//BEGIN of proof of } \mathcal{T} \vdash A \to B \\ &\quad \vdots \\ &\quad D_{i-1} = A \to B \\ &\quad \text{//END of proof of } \mathcal{T} \vdash A \to B \\ \text{SA}: &\quad D_i = A \\ \text{MP}(D_i, D_{i-1}): &\quad D_{i+1} = B \end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Indukcí přes délku m důkazu $\mathcal{T} \cup \{A\} \vdash B$:

Případ 1: $m = 1$:

Případ 1A: Jestliže B je speciální axiom ($B \in \mathcal{T}$) nebo logický axiom (přesněji jeho instance):

$$\text{RI}(B): \quad A \to B$$

Případ 1B: $B = A$

$$\text{(AA)}: \qquad A \to A$$

Případ 2: $m > 1$, věta o dedukci platí pro délku důkazu $< m$,
B vzniklo dedukcí (MP) z $\mathcal{T} \cup \{A\}$:

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ & D_j \\ & \vdots \\ & D_k = D_j \to B \\ & \vdots \\ \text{MP}(D_j, D_k): & D_m = B \end{array}$$

Délka důkazu $\mathcal{T} \cup \{A\} \vdash D_j$ je $< m$
Délka důkazu $\mathcal{T} \cup \{A\} \vdash D_k$ je $< m$
Indukční předpoklad $\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} \mathcal{T} \vdash A \to D_j \\ \mathcal{T} \vdash A \to D_k \\ \mathcal{T} \vdash A \to (D_j \to B) \end{array}$$

Důkaz $\mathcal{T} \vdash A \to B$:

$$\begin{array}{rl} & \text{//BEGIN aplikace věty o dedukci na } \mathcal{T} \cup \{A\} \vdash B \\ & \vdots \\ & D_{j'} = A \to D_j \\ & \vdots \\ & D_{k'} = A \to \underbrace{(D_j \to B)}_{D_k} \\ & \text{//END aplikace věty o dedukci na } \mathcal{T} \cup \{A\} \vdash B \\ \text{(C2) } B := D_j, C := B: & D_i = (A \to (D_j \to B)) \to ((A \to D_j) \to (A \to B)) \\ \text{MP}(D_{k'}, D_i): & D_{i+1} = (A \to D_j) \to (A \to B) \\ \text{MP}(D_{j'}, D_{i+1}): & D_{i+2} = A \to B \end{array}$$

Důsledek Cor2 $\quad A \vdash A \vee B$ pro všechna A, B

$$\begin{array}{rl} \text{Cl4, } A :=: B: & \{A, \neg A\} \vdash B \\ & \text{(DT)} \Updownarrow \\ & A \vdash \neg A \to B = A \vee B \end{array}$$

$\Rightarrow$ můžeme přidat dedukční pravidlo LOR(A): $\dfrac{A}{A \vee B}$

Důsledek Cor3 $\quad A \vdash \neg\neg A, \qquad \vdash A \to \neg\neg A$ pro všechna A

$$\begin{array}{rl} & \vdash A \to \overbrace{(\neg A \to \mathbf{0})}^{\neg\neg A} \\ & \text{(DT)} \Updownarrow \\ & A \vdash \neg A \to \mathbf{0} \\ & \text{(DT)} \Updownarrow \\ \text{Cl4}: & \{A, \neg A\} \vdash \mathbf{0} \end{array}$$

Důsledek Cor4 $\neg\neg A \vdash A, \quad \vdash \neg\neg A \to A$ pro všechna A

$$\begin{aligned} \text{Cor3}, A := \neg A: &\quad D_1 = \neg A \to \neg\neg\neg A \\ \text{(C3) } B := \neg\neg A: &\quad D_2 := (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A) \\ \text{MP}(D_1, D_2): &\quad D_3 = \neg\neg A \to A \end{aligned}$$

Důsledek Cor5 $A \leftrightarrow \neg\neg A$ (lze přidat k axiomům)

Jak lze důkaz zjednodušit?

$B \leftrightarrow C \vdash (A \to B) \leftrightarrow (A \to C)$

$B \leftrightarrow C \vdash (B \to A) \leftrightarrow (C \to A)$

SÉMANTIKA Obecně: Booleova algebra, postačí nám

Standardní sémantika množina pravdivostních hodnot ... $\{0, 1\}$

$\to$ ... booleovská implikace $\Rightarrow$

$\mathbf{0}$ ... 0

Interpretace odvozených spojek:

$\neg$ ... booleovská negace

$\mathbf{1}$ ... 1

$\wedge$ ... konjunkce

$\vee$ ... disjunkce

$\leftrightarrow$ ... booleovská ekvivalence $\Leftrightarrow$

Ohodnocení lze libovolně zvolit pro proměnné, jednoznačně se rozšiřuje na všechny formule.

Tautologie je formule A, která je *vždy* ohodnocena 1

Značení: $\models A$

Pro každou teorii $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \models A$ značí $e(A) = 1$ pro všechna ohodnocení splňující $\forall B \in \mathcal{T} : e(B) = 1$.

Kontradikce je formule, která je *vždy* ohodnocena 0.

Formule je **splnitelná**, jestliže je ohodnocena 1 pro *aspoň jedno ohodnocení.*

Slabá korektnost Každá dokazatelná formule je tautologie, tj. jestliže $\vdash A$, pak $\models A$.

Silná korektnost Pro každou teorii $\mathcal{T}$: jestliže $\mathcal{T} \vdash A$, pak $\mathcal{T} \models A$.

Slabá úplnost Každá tautologie je dokazatelná, tj. jestliže $\models A$, pak $\vdash A$.

Silná úplnost Pro každou teorii $\mathcal{T}$: jestliže $\mathcal{T} \models A$, pak $\mathcal{T} \vdash A$.

ZÁKLADNÍ LOGIKA (BASIC LOGIC, BL) JAKO PŘÍKLAD VÍCEHODNOTOVÉ VÝROKOVÉ LOGIKY

SYNTAX

$\mathcal{A}$ ... spočetná množina výrokových proměnných

$\mathcal{L} = \{\to, \mathbf{0}, \wedge\}$ ... množina logických spojek:

$\to$ ... (binární) implikace

$\mathbf{0}$ ... (nulární) false

$\wedge$ ... (binární) konjunkce (NOVÁ SPOJKA)

Formule konstruovány obvyklým způsobem

Odvozené spojky:

$\neg A = A \to \mathbf{0}$ ... (unární) negace

$\mathbf{1} = \neg\mathbf{0} = \mathbf{0} \to \mathbf{0}$ ... (nulární) true

$A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$ ... (binární) ekvivalence

$A \underset{S}{\wedge} B = A \wedge (A \to B)$

$A \overset{S}{\vee} B = ((A \to B) \to B) \underset{S}{\wedge} ((B \to A) \to A)$

obecně nemá disjunkci $A \vee B$

Logické axiomy

$$
\begin{array}{rl}
\text{(A1)} & (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \\
\text{(A2)} & A \wedge B \to A \\
\text{(A3)} & A \wedge B \to B \wedge A \\
\text{(A4)} & A \wedge (A \to B) \to B \wedge (B \to A) \\
\text{(A5a)} & (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C) \\
\text{(A5b)} & (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C)) \\
\text{(A6)} & ((A \to B) \to C) \to (((B \to A) \to C) \to C) \\
\text{(A7)} & \mathbf{0} \to A
\end{array}
$$

Dedukční pravidlo: Modus ponens $\quad \mathrm{MP}(A, B) : \quad \dfrac{A,\ A \to B}{B}$

Teorie = množina formulí (**speciálních axiomů**)

Důkazy a **dokazatelné formule** (=**teorémy**) jsou definovány obvyklým způsobem

Značení: $\quad \vdash A, \qquad \mathcal{T} \vdash A$

Příklad 1 $\quad$ (C1) $\quad A \to (B \to A) \quad$ je dokazatelná v BL:

$$
\begin{array}{rl}
\text{(A2)} : & D_1 = A \wedge B \to A \\
\text{(A5b)}, C := A : & D_2 = (A \wedge B \to A) \to (A \to (B \to A)) \\
\mathrm{MP}(D_1, D_2) : & D_3 = A \to (B \to A)
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ (C1) lze přidat k axiomům BL

Tvrzení 1 $\quad$ Důsledek (A1):

$$\{A \to B,\ B \to C\} \vdash A \to C$$

$\Rightarrow$ lze přidat dedukční pravidlo $\mathrm{TI}(A, B, C)$: $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}$ $\qquad$ (tranzitivita implikace)

Příklad 2 $\quad \vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

(**Exchange rule**, exchange axiom)

$$
\begin{array}{rl}
\text{(A1) } A := B \wedge A, & \\
B := A \wedge B : & D_1 = (B \wedge A \to A \wedge B) \to ((A \wedge B \to C) \to (B \wedge A \to C)) \\
\text{(A3) } A =: B : & D_2 = B \wedge A \to A \wedge B \\
\mathrm{MP}(D_2, D_3) : & D_3 = (A \wedge B \to C) \to (B \wedge A \to C) \\
\text{(A5a)} : & D_4 = (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C) \\
\text{(A5b) } A =: B : & D_5 = (B \wedge A \to C) \to (B \to (A \to C)) \\
\mathrm{TI}(D_4, D_3) : & D_6 = (A \to (B \to C)) \to (B \wedge A \to C) \\
\mathrm{TI}(D_6, D_5) : & D_7 = (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))
\end{array}
$$

Příklad 3 $\quad \vdash A \to A$

Nechť B je nějaká dokazatelná formule, např. axiom (A1).

$$
\begin{array}{rl}
\text{(A1)} : & D_1 = B \\
\text{Př. 2}, C := A : & D_2 = (A \to (B \to A)) \to (B \to (A \to A)) \\
\text{(C1)} : & D_3 = A \to (B \to A) \\
\mathrm{MP}(D_3, D_2) : & D_4 = B \to (A \to A) \\
\mathrm{MP}(D_1, D_4) : & D_5 = A \to A
\end{array}
$$

Věta o dedukci v základní logice

$\mathcal{T}$ ... teorie

A, B ... formule

$\mathcal{T} \cup \{A\} \vdash B$, právě když $\exists n \in N : (\mathcal{T} \vdash A^n \to B)$,
kde $A^n = \underbrace{(A \wedge (A \wedge \cdots (A \wedge A) \cdots))}_{n\times}$

Podle (A5a), (A5b),
$(A^n \to B) \leftrightarrow \underbrace{(A \to (A \to \cdots (A \to}_{n\times} B) \cdots))$

SÉMANTIKA Obecně BL-algebra , zde pouze
Standardní sémantika množina pravdivostních hodnot ... $[0, 1]$
$\wedge$ ... spojitá fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$
$\to$ ... příslušná residuovaná implikace $\underset{\cdot}{\to}$
$\mathbf{0}$ ... 0
Ani standardní sémantika není jednoznačná, závisí na volbě spojité konjunkce.
Interpretace odvozených spojek:
$\neg$ ... $\underset{\cdot}{\neg}$, kde $\underset{\cdot}{\neg} a = a \underset{\cdot}{\to} 0$

$\mathbf{1}$ ... 1
$\leftrightarrow$ ... $\underset{\cdot}{\leftrightarrow}$, kde $a \underset{\cdot}{\leftrightarrow} b = (a \underset{\cdot}{\to} b) \underset{\cdot}{\wedge} (b \underset{\cdot}{\to} a)$

$\underset{\mathrm{s}}{\wedge}$ ... $\underset{\mathrm{s}}{\wedge} = \min$
$\overset{\mathrm{s}}{\vee}$ ... $\overset{\mathrm{s}}{\vee} = \max$
Cvičení Ověřte, že interpretace $\underset{\mathrm{s}}{\wedge}, \overset{\mathrm{s}}{\vee}$ je nezávislá na volbě konjunkce.
Ohodnocení lze libovolně zvolit pro proměnné, jednoznačně se rozšiřuje na všechny formule.
Konjunkce $\wedge$ je zavedena zvlášť, její sémantiku nelze odvodit z implikace (pomocí jiných operací).
Jedno z mnoha možných zobecnění pojmu tautologie:
1-tautologie je formule A, která je *vždy* ohodnocena 1 (pro všechna možná ohodnocení s hodnotami v libovolné BL-algebře, speciálně pro liobovolnou spojitou konjunkci jako interpretaci $\wedge$ and její residuovanou implikaci jako interpretaci $\to$)
Značení: $\models A$
Pro každou teorii $\mathcal{T}$, $\mathcal{T} \models A$ značí $e(A) = 1$ pro všechna ohodnocení splňující $\forall B \in \mathcal{T} : e(B) = 1$.
Korektnost Každá dokazatelná formule je 1-tautologie, tj. jestliže $\vdash A$, pak $\models A$.
Pro každou teorii $\mathcal{T}$: jestliže $\mathcal{T} \vdash A$, pak $\mathcal{T} \models A$.
Slabá úplnost Každá 1-tautologie je dokazatelná, tj. jestliže $\models A$, pak $\vdash A$.
Silná úplnost [Hájek 1998]
Pro každou teorii $\mathcal{T}$: jestliže $\mathcal{T} \models A$, pak $\mathcal{T} \vdash A$.
(Uvažujeme všechna ohodnocení s hodnotami v BL-algebrách.)
Standardní úplnost [Cignoli, R., Esteva, F., Godo, L., Torrens, A.: Basic logic is the logic of continuous t-norms. *Soft Computing* 4 (2000), 106–112]
Každá formule, která je ohodnocena 1 pro všechna **standardní** ohodnocení (s hodnotami v $[0, 1]$ a pro libovolnou spojitou konjunkci) je dokazatelná.
Cvičení Které axiomy klasické logiky jsou 1-tautologie BL (a tedy dokazatelné v BL)?
Exchange axiom dovoluje přepsat (A1):
$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

Příklad 4 $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$

$$\begin{aligned}
\text{Př. 3}: &\quad D_1 = A \wedge B \to A \wedge B \\
\text{(A5b)}, C := A \wedge B: &\quad D_2 = (A \wedge B \to A \wedge B) \to (A \to (B \to A \wedge B)) \\
\mathrm{MP}(D_1, D_2): &\quad D_3 = A \to (B \to A \wedge B)
\end{aligned}$$

Důsledek: $\{A, B\} \vdash A \wedge B$
$A \vdash B \to A \wedge B$

Příklad dedukce $\quad A \vdash B \to A \wedge (A \wedge B)$

$$
\begin{aligned}
\text{SA}: &\quad D_1 = A\\
\text{Př. 4, } B := A \wedge B: &\quad D_2 = A \to (A \wedge B \to A \wedge (A \wedge B))\\
\mathrm{MP}(D_1, D_2): &\quad D_3 = A \wedge B \to A \wedge (A \wedge B)\\
\text{(A5b)}, &\\
C := A \wedge (A \wedge B): &\quad D_4 = (A \wedge B \to A \wedge (A \wedge B)) \to (A \to (B \to A \wedge (A \wedge B)))\\
\mathrm{MP}(D_3, D_4): &\quad D_5 = A \to (B \to A \wedge (A \wedge B))\\
\mathrm{MP}(D_1, D_5): &\quad D_6 = B \to A \wedge (A \wedge B)
\end{aligned}
$$

Zde $\nvdash A \to (B \to A \wedge (A \wedge B))$,
ale $\vdash A \wedge A \to (B \to A \wedge (A \wedge B))$
$\vdash A \to (A \to (B \to A \wedge (A \wedge B)))$
$\vdash A \to (A \wedge B \to A \wedge (A \wedge B))$
(substituce $B := A \wedge B$ v Příkladu 4)

Cvičení Dokažte v BL: $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$

1. Jak vyplývají vlastnosti interpretace konjunkce z logických axiomů?

2. Jak lze důkazy zjednodušit?

Důsledek (A1):
$B \leftrightarrow C \vdash (A \to B) \leftrightarrow (A \to C)$
$B \leftrightarrow C \vdash (B \to A) \leftrightarrow (C \to A)$

(Dosud nemůžeme podobně pracovat s konjunkcí.)

Komutativita $\underset{\cdot}{\wedge}$ plyne z (A3).

Okrajová podmínka:
Příklad 4, $A := \mathbf{1}$: $\quad \mathbf{1} \to (B \to \mathbf{1} \wedge B)$
MP: $\quad B \to \mathbf{1} \wedge B$
obrácená implikace plyne z (A2)

Asociativita $\underset{\cdot}{\wedge}$:

Následující formule jsou ekvivalentní (A5):
$(A \wedge B) \wedge C \to D$
$A \wedge B \to (C \to D)$
$A \to (B \to (C \to D))$

Použijeme ekvivalenci podformulí:
$B \to (C \to D)$
$B \wedge C \to D$

$A \to (B \wedge C \to D)$
$A \wedge (B \wedge C) \to D$

Dokázali jsme:
$((A \wedge B) \wedge C \to D) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C) \to D)$
pro všechna D, speciálně pro $D := (A \wedge B) \wedge C$:
$((A \wedge B) \wedge C \to (A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow$
$(A \wedge (B \wedge C) \to (A \wedge B) \wedge C)$
MP: $\quad A \wedge (B \wedge C) \to (A \wedge B) \wedge C$
a pro $D := A \wedge (B \wedge C)$ i obrácenou implikaci, tedy
$A \wedge (B \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$

Monotonie $\underset{\cdot}{\wedge}$ jako ostrá vlastnost znamená
$B \to C \vdash B \wedge A \to C \wedge A$

Dokážeme monotonii $\underset{\cdot}{\wedge}$ jako fuzzy vlastnost (to je silnější vlastnost):
$(B \to C) \to (B \wedge A \to C \wedge A)$

Důkaz:
Následující formule jsou ekvivalentní a všechny jsou dokazatelné, neboť první z nich je instancí (A2) (není-li uvedeno jinak, používáme (A5)):

$(C \to B) \wedge (C \wedge A) \to C \wedge A$
levou stranu nahradíme formulí, o níž už víme, že je ekvivalentní:
$(C \wedge (C \to B)) \wedge A \to C \wedge A$
$C \wedge (C \to B) \to (A \to C \wedge A)$
teprve nyní můžeme nahradit levou stranu ekvivalentní formulí z (A4):
$B \wedge (B \to C) \to (A \to C \wedge A)$
$(B \wedge (B \to C)) \wedge A \to C \wedge A$
levou stranu nahradíme ekvivalentní formulí:
$(B \to C) \wedge (B \wedge A) \to C \wedge A$
$(B \to C) \to (B \wedge A \to C \wedge A)$

Důsledek: $B \leftrightarrow C \vdash B \wedge A \leftrightarrow C \wedge A$
$B \leftrightarrow C \vdash A \wedge B \leftrightarrow A \wedge C$

GÖDELOVA LOGIKA

Syntaxe:
Axiomy (A1)–(A7) a
(G) $A \to A \wedge A$
Důsledek: $A \leftrightarrow A \wedge A$

Standardní sémantika:
$\wedge$ ... idempotentní = standardní fuzzy jkonjunkce = min
$\to$ ... residuum $\underset{S}{\wedge}$, Gödelova implikace $\underset{S}{\to}$
$\neg$ ... Gödelova zobecněná negace $\underset{G}{\neg}$:

$$\underset{G}{\neg} x = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

V Gödelově logice neexistuje spojka, interpretovaná jako standardní fuzzy negace.

Pouze v Gödelově logice platí klasická věta o dedukci (protože $A^n \leftrightarrow A$):

Věta o dedukci v Gödelově logice

$\mathcal{T}$ ... konečná teorie
A, B ... formule
$\mathcal{T} \cup \{A\} \vdash B$, právě když $\mathcal{T} \vdash A \to B$

Standardní úplnost Gödelovy logiky

$(\vdash A) \iff (\models A)$ (tj. teorémy jsou právě 1-tautologie vzhledem k $[0, 1]$ s Gödelovými operacemi).
Pro každou konečnou teorii $\mathcal{T}$: $(\mathcal{T} \vdash A) \iff (\mathcal{T} \models A)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{teorém CL} & \iff & \text{tautologie CL} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{teorém GL} & \iff & \text{1-tautologie GL} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{teorém BL} & \iff & \text{1-tautologie BL} \end{array}$$

SOUČINOVÁ LOGIKA (PRODUCT LOGIC)

Syntaxe:
Axiomy (A1)–(A7) a
(P1) $\neg\neg C \to ((A \wedge C \to B \wedge C) \to (A \to B))$
(P2) $A \wedge (A \to \neg A) \to \mathbf{0}$

Poznámka: $e(\neg\neg C) = 1$, právě když $e(C) \neq 0$ a
$\neg\neg C \vdash (A \wedge C \to B \wedge C) \leftrightarrow (A \to B)$

Alternativa: Místo (P1),(P2) stačí jediný axiom (Cintulův):
(P) $\neg\neg A \to ((A \to A \wedge B) \to B \wedge \neg\neg B)$

Standardní sémantika:
$\wedge$ ... součinová (nebo libovolná striktní) fuzzy konjunkce $\underset{P}{\wedge} = \cdot$

$\to$ ... residuum $\underset{P}{\wedge}$, Goguenova implikace $\underset{P}{\to}$

$\neg$ ... Gödelova negace $\underset{G}{\neg}$

V součinové logice neexistuje spojka, interpretovaná jako standardní fuzzy negace.

Standardní úplnost součinové logiky

$(\vdash A) \iff (\models A)$ (tj. teorémy jsou právě 1-tautologie vzhledem k $[0,1]$ se součinovými operacemi).

Pro každou konečnou teorii $\mathcal{T}$: $(\mathcal{T} \vdash A) \iff (\mathcal{T} \models A)$.

ŁUKASIEWICZOVA LOGIKA

Syntaxe:

Axiom (A1)–(A7) a

(L) $\neg\neg A \to A$

Důsledek: $\neg\neg A \leftrightarrow A$

Alternativnní axiomatizace [Łukasiewicz & Tarski] (pouze $\to, \mathbf{0}$, konjunkce jako odvozená spojka $A \wedge B = \neg(A \to \neg B)$):

(L1) $A \to (B \to A)$

(L2) $(A \to B) \to [(B \to C) \to (A \to C)]$

(L3) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

(L4) $[(A \to B) \to B] \to [(B \to A) \to A]$

(L1)=(C1) (platí v BL, viz Příklad 1)

(L2)=(A1), (L3)=(C3)

(L4)=**Łukasiewiczův axiom**

Standardní sémantika:

$\wedge$ ... Łukasiewiczova (nebo libovolná nilpotentní) fuzzy konjunkce $\underset{L}{\wedge}$

$\to$ ... residuum $\underset{L}{\wedge}$, Łukasiewiczova implikace $\underset{L}{\to}$

$\neg$ ... standardní fuzzy negace $\underset{S}{\neg} x = 1 - x$

$e[(A \to B) \to B] = e(A) \overset{S}{\vee} e(B)$ (v (L4))

Standardní úplnost Łukasiewiczovy logiky

$(\vdash A) \iff (\models A)$ (tj. teorémy jsou právě 1-tautologie vzhledem k $[0,1]$ s Łukasiewiczovými operacemi).

Pro každou konečnou teorii $\mathcal{T}$: $(\mathcal{T} \vdash A) \iff (\mathcal{T} \models A)$.

RACIONÁLNÍ PAVELKOVA LOGIKA (RPL)

Záměr: Vyjdeme z částečně pravdivých předpokladů typu (A,r), A formule, $r \in [0,1]$. Ptáme se, nakolik je zaručena platnost závěrů.
Motivace: Z předpokladů (A,r), $A \to B$ plyne (B,r):

$$\frac{(A,r),\ (A \to B, 1)}{(B,r)}$$

Předpoklady:
(A,r) znamená, že připouštíme pouze taková ohodnocení e, pro která $e(A) \geq r$.
$A \to B$ znamená, že připouštíme pouze taková ohodnocení e, pro která $e(A) \leq e(B)$.
Zobecnění: I předpoklad $A \to B$ může být splněn pouze se stupněm $s \in [0,1]$, píšeme $(A \to B, s)$ a dedukční pravidlo Modus ponens zobecníme na

$$\frac{(A,r),\ (A \to B, s)}{(B, r \mathbin{\dot{\wedge}} s)}$$

HÁJKOVA FORMULACE RACIONÁLNÍ PAVELKOVY LOGIKY

Požadavek (A,r), chápaný jako $e(A) \geq r$, vyjádříme pomocí implikace (platné se stupněm 1) $\mathbf{r} \to A$, kde $\mathbf{r}$ je nová konstanta jazyka, která je vždy ohodnocena r, $e(\mathbf{r}) = r$.
Aby zůstal jazyk spočetný, omezíme se na (hustou) spočetnou množinu konstant, konkrétně

$$\{\mathbf{r} : r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$$

(odtud přívlastek „racionální"). Již dříve jsme měli konstanty $\mathbf{0}, \mathbf{1}$.
Vyjdeme z Łukasiewiczovy logiky, neboť u jiných to nevede k dobrým výsledkům kvůli nespojitosti operací.
Axiomy: (L1)–(L4), navíc „násobilka" (*book-keeping axioms*)

$$(\mathbf{r} \to \mathbf{s}) \leftrightarrow \mathbf{t}\,,\ \text{ kde } r, s \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ t = r \underset{\text{Ł}}{\to} s$$

(to je spočetně mnoho axiomů obsahujících pouze konstanty).
Dedukční pravidlo

$$\frac{\mathbf{r} \to A,\ \mathbf{s} \to (A \to B)}{\mathbf{t} \to B} \qquad \text{pro } t = r \underset{\text{Ł}}{\wedge} s$$

dostaneme jako důsledek Modus ponens z Łukasiewiczovy logiky.

VLASTNOSTI RACIONÁLNÍ PAVELKOVY LOGIKY

Věta o dedukci z Łukasiewiczovy logiky zůstává v platnosti.
Stupeň pravdivosti (*truth degree*) formule A v teorii $\mathcal{T}$:

$$\|A\|_{\mathcal{T}} := \inf\{e(A) : e \text{ ohodnocení}, (\forall B \in \mathcal{T} : e(B) = 1)\}$$

Stupeň dokazatelnosti (*provability degree*) formule A v teorii $\mathcal{T}$:

$$|A|_{\mathcal{T}} := \sup\{r \in [0,1] : \mathcal{T} \vdash \mathbf{r} \to A\}$$

Věta o úplnosti RPL: $\|A\|_{\mathcal{T}} = |A|_{\mathcal{T}}$
Teorie $\mathcal{T}$ je

- **konzistentní** (*consistent*), jestliže $\mathcal{T} \nvdash \mathbf{0}$,
  ekvivalentně, jestliže $\forall r < 1 : \mathcal{T} \nvdash \mathbf{r}$;
- **úplná**, jestliže $\forall A\ \forall r \in [0,1] : \mathcal{T} \vdash A \to \mathbf{r}$ nebo $\mathcal{T} \vdash \mathbf{r} \to A$.

Lemma: Teorie $\mathcal{T}$ je inkonzistentní, právě když $\forall A : \mathcal{T} \vdash A$.
Lemma: Jestliže $(\mathcal{T} \nvdash \mathbf{r} \to A)$, pak $\mathcal{T} \cup \{A \to \mathbf{r}\}$ je konzistentní.
Lemma: Nechť teorie $\mathcal{T}$ je konzistentní a úplná. Pak

- $\forall A : |A|_{\mathcal{T}} = \sup\{r \in [0,1] : \mathcal{T} \vdash \mathbf{r} \to A\} = \inf\{s \in [0,1] : \mathcal{T} \vdash A \to \mathbf{s}\}$;
- $|\cdot|_{\mathcal{T}}$ komutuje s logickými spojkami, tj. $|A \to B|_{\mathcal{T}} = |A|_{\mathcal{T}} \underset{\mathrm{L}}{\to} |B|_{\mathcal{T}}$ (speciálně $|\neg A|_{\mathcal{T}} = 1 - |A|_{\mathcal{T}}$);
- funkce e definovaná jako $e(A) = |A|_{\mathcal{T}}$ je ohodnocení.

KOMPAKTNOST LOGIK

Formulace:
Věta o kompaktnosti I: Teorie je splnitelná, právě když každá její **konečná** podmnožina je splnitelná.
Věta I platí v klasické logice, BL, Gödelově, Łukasiewiczově a součinové logice i v RPL. V klasické logice je ekvivalentní formulace:
Věta o kompaktnosti II: Formule je dokazatelná v teorii, právě když je dokazatelná v nějaké její **konečné** podteorii.
Věta II platí v klasické logice, BL, Gödelově, Łukasiewiczově a součinové logice, ale **nikoli v RPL**.
Příklad:
$\forall n \in \mathbb{N} : r_n := 1 - \frac{1}{n}$, A formule, která není dokazatelná (např. proměnná)
$\mathcal{T} = \{\mathbf{r}_n \to A : n \in \mathbb{N}\}$,
$|A|_{\mathcal{T}} \geq \sup\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 1$,
ale A nelze dokázat ze žádné konečné podteorie.

KLASICKÁ PREDIKÁTOVÁ LOGIKA

Predikát přiřazuje objektům pravdivostní hodnoty
$\forall x\ P(x)$ lze chápat jako konjunkci
$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots$
$\exists x\ P(x)$ lze chápat jako disjunkci
$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots$

SYNTAXE **Logické symboly:**
$\mathcal{A} = \{x, y, \ldots\}$ ... spočetná množina proměnných
$\mathcal{L} = \{\to, \mathbf{0}\}$ ... množina logických spojek
$\forall, \exists$ ... kvantifikátory
Speciální symboly:
$\mathcal{P}$ ... neprázdná množina **predikátů** (s přiřazenými **aritami**)
popř. *funkční symboly* (zde neuvažujeme)
popř. *objektové konstanty* (zde neuvažujeme; lze je nahradit nulárními predikáty)

Formule
- $P(x_1, \ldots, x_n)$, kde P je predikát arity n a $x_1, \ldots, x_n$ jsou proměnné
- $\mathbf{0}$
- $A \to B$, kde A, B jsou formule
- $\forall x\ A$, kde A je formule
- $\exists x\ A$, kde A je formule

Výskyt proměnné:
- **vázaný**
- **volný**

Příklad:
$\forall x\ Q(x, y)$ ... x vázaná, y volná
$x \wedge \forall x\ P(x)$ ... první výskyt x volný, ostatní vázané
Formule
- **uzavřená (=sentence)**: bez volných proměnných
- **otevřená**: bez vázaných proměnných

Ztotožňujeme formule, které se liší pouze značením vázaných proměnných.

SÉMANTIKA **Interpretace M:**
- D_M ... neprázdná množina (**universum**; mohla by být různá pro různé proměnné)
- interpretace predikátu arity n ... n-ární relace $D_M^n \to \{0,1\}$

Ohodnocení (v interpretatci M): $e_M\colon \mathcal{A} \to D_M$
se rozšiřuje jednoznačně na všechny formule.
Nová pravidla:
$(e_M(\forall x\ A) = 1) \iff e'_M(A) = 1$ pro **všechna** ohodnocení $e'_M\colon \mathcal{A} \to D_M$, která se liší od e_M pouze v x
ekvivalentně: $e_M(\forall x\ A) = \inf\{e'_M(A) : e'_M\colon \mathcal{A} \to D_M$ je ohodnocení, které se liší od e_M pouze v $x\}$
$(e_M(\exists x\ A) = 1) \iff e'_M(A) = 1$ pro **aspoň jedno** ohodnocení $e'_M\colon \mathcal{A} \to D_M$, které se liší od e_M pouze v x
ekvivalentně: $e_M(\exists x\ A) = \sup\{e'_M(A) : e'_M\colon \mathcal{A} \to D_M$ je ohodnocení, které se liší od e_M pouze v $x\}$
$\models_M A$ ... A je pravdivé pro všechna ohodnocení v interpretaci M
$\models A$ ... A je pravdivé pro všechna ohodnocení a **všechny** interpretace (**tautologie**)
Klasifikace formulí: **tautologie, kontradikce, splnitelné formule**
snadné pro uzavřené formule
volné proměnné musí být kvantifikovány *odpovídajícím* kvantifikátorem
Analogicky definujeme splnitelnost množiny formulí
Příklady nových tautologií:
$(\forall x\ P(x)) \to P(t)$
$P(t) \to (\exists x\ P(x))$
$\neg(\forall x\ P(x)) \leftrightarrow (\exists x\ \neg P(x))$
$\neg(\exists x\ P(x)) \leftrightarrow (\forall x\ \neg P(x))$
$(\forall x\ \forall y\ Q(x,y)) \leftrightarrow (\forall y\ \forall x\ Q(x,y))$
$(\exists x\ \exists y\ Q(x,y)) \leftrightarrow (\exists y\ \exists x\ Q(x,y))$
Sémantický důsledek: $\mathcal{T} \models A$ (bez indexu)
pouze pro uzavřené formule
Teorém $(\mathcal{T} \models A) \iff (\mathcal{T} \cup \{\neg A\}$ je nesplnitelná)
Věta o dedukci v klasické predikátové logice
$(\mathcal{T} \cup \{A\} \vdash B) \iff (\mathcal{T} \vdash A \to B)$
Důsledek $(A \models\!\mid B) \iff (\models A \leftrightarrow B)$
Věta $\vdash (\neg\exists x\ A) \leftrightarrow (\forall x\ \neg A)$
$\vdash (\neg\forall x\ A) \leftrightarrow (\exists x\ \neg A)$
$\vdash (\exists x\ A) \leftrightarrow \neg(\forall x\ \neg A)$
$\vdash (\forall x\ A) \leftrightarrow \neg(\exists x\ \neg A)$
Úplnost $(\mathcal{T} \models A) \iff (\mathcal{T} \vdash A)$

ZÁKLADNÍ (FUZZY) PREDIKÁTOVÁ LOGIKA, BASIC (FUZZY) PREDICATE LOGIC, BL$\forall$

Odvozena z BL, stejně jako klasická predikátová logika z klasické výrokové logiky
Rozdíly:

SÉMANTIKA

Interpretace predikátu arity n ... n-ární **fuzzy** relace $D_M^n \to [0,1]$
Ohodnocení kvantifikátorů v interpretaci M:
$e_M(\forall x\ A) = \inf\{e'_M(A) : e'_M\colon \mathcal{A} \to D_M$ je ohodnocení, které se liší od e_M pouze v $x\}$
$e_M(\exists x\ A) = \sup\{e'_M(A) : e'_M\colon \mathcal{A} \to D_M$ je ohodnocení, které se liší od e_M pouze v $x\}$
Poznámka: Pro ohodnocení s hodnotami v obecnějších množinách pravdivostních hodnot než $[0,1]$ (BL-algebrách) je nutno předpokládat existenci použitých $\inf, \sup$.
Pravdivostní hodnota formule A v interpretaci M: $||A||_M = \inf\{e_M(A) : e_M$ je ohodnocení v $M\}$

SYNTAXE

Axiomy:
- (A1)–(A7)
- pro všechny formule $P(t)$, vzniklé substitucí t za x ve formuli $P(x)$:

$$\begin{array}{ll} (\forall 1) & (\forall x\ P(x)) \to P(t) \\ (\exists 1) & P(t) \to (\exists x\ P(x)) \end{array}$$

- pro všechny formule B neobsahující x (jako volnou proměnnou):

$$(\forall 2) \qquad (\forall x\ (B \to A)) \to (B \to \forall x\ A)$$

$(\exists 2) \qquad (\forall x\ (A \to B)) \to ((\exists x\ A) \to B)$
$(\forall 3) \qquad (\forall x\ (B \overset{S}{\vee} A)) \to ((\forall x\ A) \overset{S}{\vee} B)$

Dedukční pravidla:

Modus ponens: $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$

Generalizace: $\dfrac{A}{\forall x\ A}$

Věta o dedukci v základní predikátové logice (pro uzavřené formule)
$(\mathcal{T} \cup \{A\} \vdash B) \iff (\exists n \in N : (\mathcal{T} \vdash A^n \to B))$

Theorem $\vdash (\exists x\ A) \to \neg(\forall x\ \neg A)$
$\vdash (\neg\exists x\ A) \leftrightarrow (\forall x\ \neg A)$

$\models_M A$ ... A je pravdivá pro všechna ohodnocení v interpretaci M
$\models A$ ... A je pravdivá pro všechna ohodnocení a všechny interpretace (**tautologie**)

Theorem $e_M(A) \mathbin{\dot\wedge} e_M(A \to B) \leq e_M(B)$
speciálně:
$(e_M(A) = 1) \wedge (e_M(A \to B) = 1) \Rightarrow (e_M(B) = 1)$

Důsledek $||A||_M \mathbin{\dot\wedge} ||A \to B||_M \leq ||B||_M$
speciálně:
$(||A||_M = 1) \wedge (||A \to B||_M = 1) \Rightarrow (||B||_M = 1)$
$||A||_M = ||\forall x\ A||_M$
$(\models_M A) \Rightarrow (\models_M \forall x\ A)$

Interpretace je **modelem** teorie $\mathcal{T}$, jestliže
$||A||_M = 1$ pro všechna $A \in \mathcal{T}$

Korektnost a úplnost
$(\mathcal{T} \vdash A) \iff (||A||_M = 1$ pro každý model M $\mathcal{T})$
(Správně bychom měli uvažovat všechna ohodnocení ve všech úplně uspořádaných BL-algebrách.)

RACIONÁLNÍ PAVELKOVA PREDIKÁTOVÁ LOGIKA RPL$\forall$

Odvozena z RPL, stejně jako základní predikátová logika ze základní výrokové logiky
Rozdíly:

Axiomy:
- (L1)–(L4)
- (RPL) (**bookkeeping axioms**, násobilka)
- $(\forall 1), (\forall 2)$

To stačí, protože
(i v Łukasiewiczově predikátové logice)
$\vdash (\exists x\ A) \leftrightarrow \neg(\forall x\ \neg A)$
a $(\forall 3)$ je dokazatelná.

Korektnost a úplnost
Jestliže $\mathcal{T}$ je teorie (tvořená uzavřenými formulemi), pak
$|A|_T = ||A||_T$, kde
$||A||_T$ je infimum přes všechna ohodnocení a všechny modely $\mathcal{T}$,
$|A|_T$ je supremum všech stupňů dokazatelnosti za předpokladů $\mathcal{T}$.