KLASICKÁ LOGIKA (CL)

SYNTAXE

A ... spočetná množina proměnných
L = {→, 0} ... množina logických spojek:
→ ... (binární) implikace
0 ... (nulární) false

Formule
• všechny prvky A jsou formule
• 0 je formule
• jestliže A, B jsou formule, pak A → B je formule

Přesněji, používáme závorky, např. (A) → (B)

Odvozené spojky:
¬A = A → 0 ... (unární) negace
1 = ¬0 = 0 → 0 ... (nulární) true
A ∧ B = ¬(A → ¬B) ... (binární) konjunkce
A ∨ B = ¬A → B ... (binární) disjunkce
A ↔ B = (A → B) ∧ (B → A) ... (binární) ekvivalence

Logické axiomy

(C1)  A → (B → A)
(C2)  (A → (B → C)) → ((A → B) → (A → C))
(C3)  (¬A → ¬B) → (B → A)

Dedukční pravidlo: Modus ponens

Teorie T ... množina formulí (speciálních axiomů)

Dokazatelná formule (=teorém) v teorii T je formule, k níž existuje důkaz, tj. konečná posloupnost formulí taková, že každá z nich je
• speciální axiom (=prvek T), nebo
• instance logického axioma (vzniklá substitucí), nebo
• výsledek aplikace dedukčního pravidla na předchozí formule v důkazu.

Značení: T ⊢ A, B ⊢ A (pro T = {B}), ⊢ A (pro T = ∅)

Příklad Cl1  B ⊢ A → B

(C1), A ::= B :  D₁ = B → (A → B)
Speciální axiom :  D₂ = B
Modus ponens(D₂, D₁) :  D₃ = A → B

⇒ můžeme přidat dedukční pravidlo RI:

Příklad Cl2  ⊢ A → A

Nechť B je nějaká dokazatelná formule, např. axiom (C1).

(C1) :  D₁ = B
RI(D₁) :  D₂ = A → B
(C2), C ::= A :  D₃ = (A → (B → A)) → ((A → B) → (A → A))
(C1) :  D₄ = A → (B → A)
MP(D₄, D₃) :  D₅ = (A → B) → (A → A)
MP(D₂, D₅) :  D₆ = A → A
⇒ můžeme přidat axiom (AA): $A \rightarrow A$

**Důsledek Cor1** $\vdash 0 \rightarrow 0, \vdash \neg 0, \vdash 1$

**Příklad Cl3** $\vdash A \rightarrow 1$ pro všechna $A$:

Cor1 : $D_1 = 1$

RI($D_1$) : $D_2 = A \rightarrow 1$

**Příklad Cl4** $\{B, \neg B\} \vdash A$ pro všechna $A$

(C3) : $D_1 = (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

SA : $D_2 = \neg B$

RI($D_2$) : $D_3 = \neg A \rightarrow \neg B$

MP($D_3, D_1$) : $D_4 = B \rightarrow A$

SA : $D_5 = B$

MP($D_5, D_1$) : $D_6 = A$

⇒ můžeme přidat dedukční pravidlo: $B, \neg B \rightarrow A$, ale to moc nevyužijeme

**Příklad Cl5** $\vdash 0 \rightarrow A$ pro všechna $A$ (ex falso quodlibet)

(C3) $B := 0$ : $D_1 = (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (0 \rightarrow A)$

Cl3 $A := \neg A$ : $D_2 = \neg A \rightarrow \neg 0$

MP($D_2, D_1$) : $D_3 = 0 \rightarrow A$

⇒ můžeme přidat axiom $0 \rightarrow A$, ale ten moc nevyužijeme

**Příklad Cl6** $\vdash A \lor \neg A$ pro všechna $A$ (tertium non datur)

Cl2, $A := \neg A$ : $D_1 = \neg A \rightarrow \neg A = A \land \neg A$

⇒ můžeme přidat axiom $A \lor \neg A$

**Příklad Cl7** $B \vdash A \lor B$ pro všechna $A, B$

Cl1, $A := \neg A$ : $D_1 = \neg A \rightarrow B = A \lor B$

⇒ můžeme přidat dedukční pravidlo ROR: $B \lor A

**Věta o dedukci v klasické logice**

$T$ ... teorie

$A, B$ ... formule

$T \cup \{A\} \vdash B$, právě když $T \vdash A \rightarrow B$

**Důkaz** $\iff$

//BEGIN of proof of $T \vdash A \rightarrow B$

: $D_{i-1} = A \rightarrow B$

//END of proof of $T \vdash A \rightarrow B$

SA : $D_i = A$

MP($D_i, D_{i-1}$) : $D_{i+1} = B$

⇒: Indukční přes délku m důkazu $T \cup \{A\} \vdash B$: Případ 1: $m = 1$:

Případ 1A: Jestliže $B$ je speciální axiom ($B \in T$) nebo logický axiom (přesněji jeho instance):

$D_1 = B$

(C1), $A := B$ : $D_2 = B \rightarrow (A \rightarrow B)$

MP($D_1, D_2$) : $D_3 = A \rightarrow B$
Případ 1B: \( B = A \)

\[
\text{Cl2 : } D_1 = A \rightarrow A
\]

Případ 2: \( m > 1 \), věta o dedukci platí pro délku důkazu \( < m \),
\( B \) vzniklo dedukcí (MP) z \( T \cup \{ A \} \):

\[
\begin{align*}
\vdash & : \\
D_j & : \\
D_k & = D_j \rightarrow B \\
\vdash & : \\
\text{MP}(D_j, D_k) : & \; D_m = B
\end{align*}
\]

Délka důkazu \( T \cup \{ A \} \vdash D_j \) je \( < m \)
Délka důkazu \( T \cup \{ A \} \vdash D_k \) je \( < m \)
Indukční předpoklad \( \Rightarrow \)

\[
\begin{align*}
T & \vdash A \rightarrow D_j \\
T & \vdash A \rightarrow D_k \\
T & \vdash A \rightarrow (D_j \rightarrow B)
\end{align*}
\]

Důkaz \( T \vdash A \rightarrow B \):

\[
\begin{align*}
& \text{//BEGIN aplikace věty o dedukci na } T \cup \{ A \} \vdash B \\
& : \\
D_j' & = A \rightarrow D_j \\
& : \\
D_k' & = A \rightarrow (D_j \rightarrow B)
\end{align*}
\]

\[
(C2) \; B := D_j, C := B : \\
\begin{align*}
D_i & = (A \rightarrow (D_j \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow D_j) \rightarrow (A \rightarrow B)) \\
\text{MP}(D_k, D_i) : & \; D_{i+1} = (A \rightarrow D_j) \rightarrow (A \rightarrow B) \\
\text{MP}(D_j', D_{i+1}) : & \; D_{i+2} = A \rightarrow B
\end{align*}
\]

Důsledek Cor2
\( \vdash A \vee B \) pro všechna \( A, B \)

\[
\begin{align*}
\text{Cl4, } A := B : & \; \{ A, \neg A \} \vdash B \\
& \text{(DT) } \vdash \neg \neg A \rightarrow 0 \\
\text{Cl4 : } & \; \{ A, \neg A \} \vdash 0
\end{align*}
\]

\( \Rightarrow \) můžeme přidat dedukční pravidlo LOR:

\[
\begin{array}{c}
\vdash A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow A \rightarrow B
\end{array}
\]

\[
\begin{align*}
\text{Důsledek Cor3} & \; \vdash \neg \neg A, \quad \vdash A \rightarrow \neg \neg A \text{ pro všechna } A \\
& \vdash A \rightarrow \neg \neg A \rightarrow 0 \\
& \text{(DT) } \vdash \neg \neg A \rightarrow 0 \\
& \text{(DT) } \vdash A \rightarrow 0
\end{align*}
\]
\[ \text{Důsledek Cor4} \quad \neg
\neg A \vdash A, \quad \vdash \neg
\neg A \rightarrow A \text{ pro všechna } A \]

Cor3, \( A := \neg A \):
\[
D_1 = \neg A \rightarrow \neg
\neg A \\
(C3) \quad B := \neg A \:
D_2 := (\neg A \rightarrow \neg
\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \\
\text{MP}(D_1, D_2) : 
D_3 = \neg A \rightarrow A
\]

\[ \text{Důsledek Cor5} \quad A \iff \neg A \quad (\text{lze přidat k axiomům}) \]

\[ \text{Jak lze důkaz zjednodušit?} \]
\[
B \leftrightarrow C \vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \\
B \leftrightarrow C \vdash (B \rightarrow A) \leftrightarrow (C \rightarrow A)
\]

\[ \text{SÉMANTIKA} \quad \text{Obecně: Booleova algebra, postačí nám} \]
\[ \text{Standardní sémantika} \quad \text{množina pravdivostních hodnot } ... \{0,1\} \]
\[ \rightarrow \ldots \text{booleovská implikace} \Rightarrow \]
\[ 0 \ldots 0 \]
\[ \neg \ldots \text{booleovská negace} \]
\[ 1 \ldots 1 \]
\[ \wedge \ldots \text{konjunkce} \]
\[ \lor \ldots \text{disjunkce} \]
\[ \leftrightarrow \ldots \text{booleovská ekvivalence} \]

\[ \text{Ohodnocení} \] \( \text{Lze libovolně zvolit pro proměnné, jednoznačně se rozšiřuje na všechny formule.} \]

\[ \text{Tautologie} \quad \text{je formule } A, \text{která je vždy ohodnocena 1} \]
\[ \text{Značení:} \models A \]
\[ \text{Pro každou teorii } T, T \models A \text{ značí } e(A) = 1 \text{ pro všechna ohodnocení splňující } \forall B \in T : e(B) = 1. \]
\[ \text{Kontradikce} \quad \text{je formule, která je vždy ohodnocena 0.} \]
\[ \text{Formule je splnitelná, jestliže je ohodnocena 1 pro aspoň jedno ohodnocení.} \]
\[ \text{Slabá korektnost} \quad \text{Každá dokazatelná formule je tautologie, tj. jestliže } \models A, \text{ pak } T \models A. \]
\[ \text{Silná korektnost} \quad \text{Pro každou teorii } T: \text{ jestliže } T \models A, \text{ pak } T \models A. \]
\[ \text{Slabá úplnost} \quad \text{Každá tautologie je dokazatelná, tj. jestliže } T \models A, \text{ pak } T \models A. \]
\[ \text{Silná úplnost} \quad \text{Pro každou teorii } T: \text{ jestliže } T \models A, \text{ pak } T \models A. \]

\[ \text{ZÁKLADNÍ LOGIKA (BASIC LOGIC, BL)} \]
\[ \text{JAKO PŘÍKLAD VÍCEHODNOTOVÉ VÝROKOVÉ LOGIKY} \]

\[ \text{SYNTAX} \]
\[ A \ldots \text{spočetná množina výrokových proměnných} \]
\[ L = \{\rightarrow, 0, \wedge\} \ldots \text{množina logických spojek:} \]
\[ \rightarrow \ldots \text{(binární) implikace} \]
\[ 0 \ldots \text{(nullární) false} \]
\[ \wedge \ldots \text{(binární) konjunkce (NOVÁ SPOJKA)} \]
\[ \text{Formule} \quad \text{konstruovány obvyklým způsobem} \]
\[ \text{Odvozené spojky:} \]
\[ \neg A = A \rightarrow 0 \ldots \text{(unární) negace} \]
\[ 1 = \neg 0 = 0 \rightarrow 0 \ldots \text{(nullární) true} \]
\[ A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \ldots \text{(binární) ekvivalence} \]
\[ A \triangle B = A \wedge (A \rightarrow B) \]
\[ A \triangledown B = ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \triangle ((B \rightarrow A) \rightarrow A) \]
\[ \text{obecně nemá disjunkci } A \vee B \]
Logické axiomy

(A1) \( (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \)

(A2) \( A \land B \rightarrow A \)

(A3) \( A \land B \rightarrow B \land A \)

(A4) \( A \land (A \rightarrow B) \rightarrow B \land (B \rightarrow A) \)

(A5a) \( (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \land B \rightarrow C) \)

(A5b) \( (A \land B \rightarrow C) \rightarrow (A \land B \rightarrow (A \rightarrow B \rightarrow C)) \)

(A6) \( (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow A)) \)

(A7) \( 0 \rightarrow A \)

Dedukční pravidlo: Modus ponens \( r_{MP} : \frac{A, A \rightarrow B}{B} \)

Teorie = množina formulí (speciálních axiomů)

Důkazy a dokazatelné formule (=teorémy) jsou definovány obvyklým způsobem

Značení: \( \vdash A, \quad \mathcal{T} \vdash A \)

Příklad 1 \( (C1) \) \( A \rightarrow (B \rightarrow A) \) je dokazatelná v BL:

\[
(A2) : \quad D_1 = A \land B \rightarrow A \\
(A5b), C := A : \quad D_2 = (A \land B \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \\
MP(D_1, D_2) : \quad D_3 = A \rightarrow (B \rightarrow A)
\]

\( \Rightarrow (C1) \) lze přidat k axiomům BL

Tvrzení 1 Důsledek (A1):

\[
\{A \rightarrow B, \quad B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C
\]

\( \Rightarrow \) lze přidat dedukční pravidlo TI: \( \frac{A \rightarrow B, \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C} \) (tranzitivita implikace)

Příklad 2 \( \vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \)

(Exchange rule, exchange axiom)

\[
(A1) A := B \land A, \\
B := A \land B : \quad D_1 = (B \land A \rightarrow A \land B) \rightarrow ((A \land B \rightarrow C) \rightarrow (B \land A \rightarrow C)) \\
(A3) A := B : \quad D_2 = B \land A \rightarrow A \land B \\
MP(D_2, D_3) : \quad D_3 = (A \land B \rightarrow C) \rightarrow (B \land A \rightarrow C) \\
(A5a) : \quad D_4 = (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \land B \rightarrow C) \\
(A5b) A := B : \quad D_5 = (B \land A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
TI(D_4, D_3) : \quad D_6 = (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \land A \rightarrow C) \\
TI(D_6, D_5) : \quad D_7 = (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))
\]

Příklad 3 \( \vdash A \rightarrow A \)

Nechť \( B \) je nějaká dokazatelná formule, např. axiom (A1).

\[
(A1) : \quad D_1 = B \\
Př. 2, C := A : \quad D_2 = (A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow A)) \\
(C1) : \quad D_3 = A \rightarrow (B \rightarrow A) \\
MP(D_3, D_2) : \quad D_4 = B \rightarrow (A \rightarrow A) \\
MP(D_1, D_4) : \quad D_5 = A \rightarrow A
\]

Věta o dedukci v základní logice

\( \mathcal{T} \) ... teorie
\( A, B \) ... formule
\[ \mathcal{T} \cup \{ A \} \vdash B, \text{ právě když } \exists n \in \mathbb{N} : (\mathcal{T} \vdash A^n \rightarrow B), \]

kde \( A^n = (A \land (A \land \cdots (A \land A) \cdots)) \)

Podle (A5a), (A5b),
\( (A^n \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow \cdots (A \rightarrow B) \cdots)) \)

**Sémantika** Obecně BL-algebra, zde pouze
**Standardní sémantika** množina pravdivostních hodnot \( [0, 1] \)
\( \land \) ... spojité fuzzy konjunkce \( \land \)
\( \rightarrow \) ... příslušná residuovaná implikace \( \rightarrow \)

\( 0 \ldots 0 \)
Ani standardní sémantika není jednoznačná, závisí na volbě spojité konjunkce.

Interpretace odvozených spojek:
\( \neg \) ... \( \neg \), kde \( \neg a = a \rightarrow 0 \)

\( 1 \ldots 1 \)
\( \land \) ... \( \land \), kde \( a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \land (b \rightarrow a) \)

\( \land \) ... \( \land \)
\( \lor \) ... \( \lor \)

**Cvičení** Ověřte, že interpretace \( \land, \lor \) je nezázávislá na volbě konjunkce.

**Ohodnocení** Ize libovolně zvolit pro proměnné, jednoznačně se rozšířuje na všechny formule.

Konjunkce \( \land \) je zavedena zvlášť, její sémantiku nelze odvodit z implikace (pomocí jiných operací).

Jedno z mnoha možných zobecnění pojmu tautologie:
1-tautologie je formule \( A \), která je vždy ohodnocena 1 (pro všechna možná ohodnocení s hodnotami v libovolné BL-algebře, speciálně pro liobovolnou spojitou konjunkci jako interpretaci \( \land \) and její residuovanou implikaci jako interpretaci \( \rightarrow \)).

Značení: \( \models A \)
Pro každou teorii \( \mathcal{T} \), \( \mathcal{T} \models A \) značí \( e(A) = 1 \) pro všechna ohodnocení splňující \( \forall B \in \mathcal{T} : e(B) = 1 \).

**Korektnost** Každá dokazatelná formule je 1-tautologie, tj. jestliže \( \vdash A \), pak \( \models A \).

**Slabá úplnost** Každá 1-tautologie je dokazatelná, tj. jestliže \( \models A \), pak \( \vdash A \).

**Silná úplnost** [Hájek 1998]

Pro každou teorii \( \mathcal{T} \): jestliže \( \mathcal{T} \models A \), pak \( \mathcal{T} \vdash A \).
(Uvažujeme všechna ohodnocení s hodnotami v BL-algebrách.)


Každá formule, která je ohodnocena 1 pro všechna standardní ohodnocení (s hodnotami v \( [0, 1] \) a pro libovolnou spojítou konjunkci) je dokazatelná.

**Cvičení** Které axiomy klasické logiky jsou 1-tautologie BL (a tedy dokazatelné v BL)?

Exchange axiom dovoluje přepsat (A1):
\( (B \rightarrow C) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \)

**Příklad 4** \( \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \land B) \)

Pr. 3 : 
\( D_1 = A \land B \rightarrow A \land B \) \( (A5b), C := A \land B : D_2 = (A \land B \rightarrow A \land B) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A \land B)) \)
\( \text{MP}(D_1, D_2) : D_3 = A \rightarrow (B \rightarrow A \land B) \)

Důsledek: \( \{ A, B \} \vdash A \land B \)
\( A \vdash B \rightarrow A \land B \)
Příklad dedukce  \[ A \vdash B \rightarrow A \land (A \land B) \]

SA : \[ D_1 = A \]

Pr. 4, \[ B := A \land B : \]
\[ D_2 = A \rightarrow (A \land B \rightarrow A \land (A \land B)) \]
\[ MP(D_1, D_2) : \]
\[ D_3 = A \land B \rightarrow A \land (A \land B) \]
\[(A5b),\]
\[ C := A \land (A \land B) : \]
\[ D_4 = (A \land B \rightarrow A \land (A \land B)) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A \land (A \land B))) \]
\[ MP(D_3, D_4) : \]
\[ D_5 = A \rightarrow (B \rightarrow A \land (A \land B)) \]
\[ MP(D_1, D_5) : \]
\[ D_6 = B \rightarrow A \land (A \land B) \]

Zde \[ \vdash A \rightarrow (B \rightarrow A \land (A \land B)), \]
aleť \[ \vdash A \land A \rightarrow (B \rightarrow A \land (A \land B)) \]
\[ \vdash A \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow A \land (A \land B))) \]
\[ \vdash A \rightarrow (A \land B \rightarrow A \land (A \land B)) \]

(substituce \( B := A \land B \) v Příkladu 4)

Cvičení
Dokažte v BL: \( (A \rightarrow B) \land (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \land C) \)

1. Jak vyplyvají vlastnosti interpretace konjunkce z logických axiomů?

2. Jak lze důkazy zjednodušit?

Důsledek (A1):
\[ B \leftrightarrow C \vdash (A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow C) \]
\[ B \leftrightarrow C \vdash (B \rightarrow A) \leftrightarrow (C \rightarrow A) \]

(Dosud nemůžeme podobně pracovat s konjunkcí.)

Komutativita \( \land \) plyně z (A3).

Okrajová podmínka:
Příklad 4, \[ A := 1: \]
\[ 1 \rightarrow (B \rightarrow 1 \land B) \]

MP:
\[ B \rightarrow 1 \land B \]

obrácená implikace plyně z (A2)

Asociativita \( \land \):

Následující formule jsou ekvivalentní (A5):
\[ (A \land B) \land C \rightarrow D \]
\[ A \land B \rightarrow (C \rightarrow D) \]
\[ A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D)) \]

Použijeme ekvivalenci podformulí:
\[ B \rightarrow (C \rightarrow D) \]
\[ B \land C \rightarrow D \]
\[ A \rightarrow (B \land C \rightarrow D) \]
\[ A \land (B \land C) \rightarrow D \]

Dokázali jsme:
\[ ((A \land B) \land C \rightarrow D) \leftrightarrow (A \land (B \land C) \rightarrow D) \]

pro všechna \( D, \) speciálně pro \( D := (A \land B) \land C : \)
\[ ((A \land B) \land C \rightarrow (A \land B) \land C) \leftrightarrow \]
\[ (A \land (B \land C) \rightarrow (A \land B) \land C) \]

MP:
\[ A \land (B \land C) \rightarrow (A \land B) \land C \]
a pro \( D := A \land (B \land C) \) i obrácenou implikaci, tedy
\[ A \land (B \land C) \leftrightarrow (A \land B) \land C \]

Monotone \( \land \) jako ostrá vlastnost znamená
\[ B \rightarrow C \vdash B \land A \rightarrow C \land A \]

Důkazeme monotonii \( \land \) jako fuzzy vlastnost (to je silnější vlastnost):
\[ (B \rightarrow C) \rightarrow (B \land A \rightarrow C \land A) \]

Důkaz:
Následující formule jsou ekvivalentní a všechny jsou dokazatelné, neboť první z nich je instancí (A2) (není-li uvedено jinak, používáme (A5)):
(C → B) ∧ (C ∧ A) → C ∧ A
levou stranu nahradíme formuli, o níz už víme, že je ekvivalentní:
(C ∧ (C → B)) ∧ A → C ∧ A
C ∧ (C → B) → (A → C ∧ A)
tepře nyní můžeme nahradit levou stranu ekvivalensí formuli z (A4):
B ∧ (B → C) → (A → C ∧ A)
(B ∧ (B → C)) ∧ A → C ∧ A
levou stranu nahradíme ekvivalentní formuli:
(B → C) ∧ (B ∧ A) → C ∧ A
(B → C) → (B ∧ A → C ∧ A)
Důsledek: 
B ↔ C ⊢ B ∧ A ↔ C ∧ A
B ↔ C ⊢ A ∧ B ↔ A ∧ C

GÖDELOVA LOGIKA
Syntaxe:
Axiomy (A1)–(A7) a

(G) A → A ∧ A

Důsledek: A ↔ A ∧ A

Standardní sémantika:
∧ ... idempotentní = standardní fuzzy konjunkce = min
→ ... residuum A ≥: Godelova implikace →
¬ ... Godelova zobecněná negace A:

\[ A = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \]

V Gödelově logice neexistuje spojka, interpretovaná jako standardní fuzzy negace.

Pouze v Gödelově logice platí klasická věta o dedukci (protože A^n ↔ A):

Věta o dedukci v Gödelově logice
T ... konečná teorie
A, B ... formule
T ∪ {A} ⊢ B, právě když T ⊢ A → B

Standardní úplnost Gödelovy logiky
(\[ A \leq A \) (tj. teorémy jsou právě 1-tautologie vzhledem k [0, 1] s Gödelovými operacemi).

Pro každou konečnou teorii T: (T ⊢ A) \iff (T \models A).

teorému CL \iff tautologie CL

\[ \uparrow \iff \uparrow \]

teorému GL \iff 1-tautologie GL

\[ \uparrow \iff \uparrow \]

teorému BL \iff 1-tautologie BL

SOUČINOVÁ LOGIKA (PRODUCT LOGIC)
Syntaxe:
Axiomy (A1)–(A7) a

(P1) ¬¬C → ((A ∧ C → B ∧ C) → (A → B))
(P2) A ∧ (A → ¬A) → 0

Poznámka: e(¬¬C) = 1, právě když e(C) \neq 0 a
¬¬C ⊢ (A ∧ C → B ∧ C) ↔ (A → B)

Alternativa: Místo (P1), (P2) stačí jediný axiom (Cintulův):
(P) ¬¬A → ((A → A ∧ B) → B ∧ ¬¬B)

Standardní sémantika:
∧ ... součinová (nebo libovolná striktní) fuzzy konjunkce \[ \land \]

8
→ ... residuum \textcircled{\wedge}, Goguenova implikace \rightarrow
\neg ... Gődlova negace \textcircled{\neg}

V součinové logice neexistuje spojka, interpretovaná jako standardní fuzzy negace.

**Standardní úplnost součinové logiky**

(\vdash A) \iff (\models A) (tj. teorémy jsou právě 1-tautologie vzhledem k \([0,1]\) se součinovými operacemi).

Pro každou konečnou teorii \(T\): \(T \vdash A \iff T \models A\).

**LUKASIEWICZOVA LOGIKA**

Syntaxe:

Axiom (A1)–(A7) a

(L) \quad \neg\neg A \rightarrow A

Důsledek: \quad \neg\neg A \leftrightarrow A

Alternativní axiomatizace [Lukasiewicz & Tarski] (pouze \(\to, 0\), konjunkce jako odvozená spojka \(A \land B = \neg(\neg A \rightarrow \neg B)\)):

(L1) \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)
(L2) \quad (A \rightarrow B) \rightarrow [(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)]
(L3) \quad (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)
(L4) \quad [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A]

(L1)=(C1) (platí v BL, viz Příklad 1)
(L2)=(A1), (L3)=(C3)
(L4)=Lukasiewiczův axiom

Standardní sémantika:

\(\land \ldots\) Lukasiewiczova (nebo libovolná nilpotentní) fuzzy konjunkce \textcircled{\land}

→ ... residuum \textcircled{\lor}, Lukasiewiczova implikace \rightarrow

\neg ... standardní fuzzy negace \textcircled{\neg x} = 1 - x

e[(A \rightarrow B) \rightarrow B] = e(A) \lor e(B) \quad (v \text{ (L4)})

**Standardní úplnost Lukasiewiczovy logiky**

(\vdash A) \iff (\models A) (tj. teorémy jsou právě 1-tautologie vzhledem k \([0,1]\) s Lukasiewiczovými operacemi).

Pro každou konečnou teorii \(T\): \(T \vdash A \iff T \models A\).
RACIONÁLNÍ PAVELKOVA LOGIKA (RPL)

Záměr: Vyjdeme z částečné pravdivých předpokladů typu \((A, r)\), \(A\) formule, \(r \in [0, 1]\). Ptáme se, nakolik je zaručena platnost závěrů.

Motivace: Z předpokladů \((A, r)\), \(A \rightarrow B\) plyne \((B, r)\):

\[
(A, r), \ (A \rightarrow B, 1) \vdash (B, r)
\]

Předpoklady:
\((A, r)\) znamená, že připouštíme pouze taková ohodnocení \(e\), pro která \(e(A) \geq r\).

\(A \rightarrow B\) znamená, že připouštíme pouze taková ohodnocení \(e\), pro která \(e(A) \leq e(B)\).

Zobecnění: I předpoklad \(A \rightarrow B\) může být splněn pouze se stupněm \(s \in [0, 1]\), píšeme \((A \rightarrow B, s)\) a dedukční pravilo Modus ponens zobecníme na

\[
(A, r), \ (A \rightarrow B, s) \vdash (B, r \land s)
\]

HÁJKOVA FORMULACE RACIONÁLNÍ PAVELKOVY LOGIKY

Požadavek \((A, r)\), chápaný jako \(e(A) \geq r\), vyjádříme pomocí implikace (platné se stupněm 1)

\[
r \rightarrow A
\]

nadstavíme jazyka, která je vždy ohodnocena \(r\).

Aby zůstal jazyk spočetný, omezíme se na (hustou) spočetnou množinu konstant, konkrétně

\[
\{ r : r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \}
\]

(odtud příklad „racionální“). Již dříve jsme měli konstanty 0, 1.

Vyjdeme z Lukasiewiczovy logiky, neboť u jiných to nevede k dobrým výsledkům kvůli nespojité operaci.

Axiomy: (L1)–(L4), navíc „násobíka“ (book-keeping axioms)

\[
(r \rightarrow s) \leftrightarrow t, \text{ kde } r, s \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \ t = r \land s
\]

(to je spočetně mnoho axiomů obsahujících pouze konstanty).

Dedukční pravidlo

\[
\frac{r \rightarrow A, \ s \rightarrow (A \rightarrow B)}{t \rightarrow B}
\]

dostaneme jako důsledek Modus ponens z Lukasiewiczovy logiky.

VLASTNOSTI RACIONÁLNÍ PAVELKOVY LOGIKY

Věta o dedukci z Lukasiewiczovy logiky zůstává v platnosti.

Stupeň pravdivosti (truth degree) formule \(A\) v teorii \(\mathcal{T}\):

\[
\|A\|_\mathcal{T} := \inf \{e(A) : e \text{ ohodnocení, } (\forall B \in \mathcal{T} : e(B) = 1)\}
\]

Stupeň dokazatelnosti (provability degree) formule \(A\) v teorii \(\mathcal{T}\):

\[
|A|_\mathcal{T} := \sup \{r \in [0, 1] : \mathcal{T} \vdash r \rightarrow A\}
\]

Věta o úplnosti RPL: \(\|A\|_\mathcal{T} = |A|_\mathcal{T}\)

Teorie \(\mathcal{T}\) je

- konzistentní (consistent), jestliže \(\mathcal{T} \not\vdash 0\), ekvivalentně, jestliže \(\forall r < 1 : \mathcal{T} \not\vdash r\);
- úplná, jestliže \(\forall A \forall r \in [0, 1] : \mathcal{T} \vdash A \rightarrow r\) nebo \(\mathcal{T} \vdash r \rightarrow A\).

Lemma: Teorie \(\mathcal{T}\) je inkonzistentní, právě když \(\forall A : \mathcal{T} \vdash A\).

Lemma: Jestliže \(\mathcal{T} \not\vdash r \rightarrow A\), pak \(\mathcal{T} \cup \{A \rightarrow r\}\) je konzistentní.

Lemma: Nechť teorie \(\mathcal{T}\) je konzistentní a úplná. Pak
\[ \forall A : |A|_\tau = \sup \{ r \in [0,1] : T \vdash r \to A \} = \inf \{ s \in [0,1] : T \vdash A \to s \}; \]
\[ |\cdot| \] komutuje s logickými spojkami, tj. \[ |A \to B|_\tau = |A|_\tau \to |B|_\tau \] (speciálně \[ |\neg A|_\tau = 1 - |A|_\tau \]);
funckce \( e \) definovaná jako \( e(A) = |A|_\tau \) je ohodnocení.

**KOMPAKTNOST LOGIK**

Formulace:

**Věta o kompaktnosti I:** Teorie je splnitelná, právě když každá její konečná podmnožina je splnitelná.

Věta I platí v klasické logice, BL, Gödelově, Lukasiewiczově a součinové logice i v RPL. V klasické logice je ekvivalentní formulace:

**Věta o kompaktnosti II:** Formule je dokazatelná v teorii, právě když je dokazatelná v nějaké její konečné podteorii.

Věta II platí v klasické logice, BL, Gödelově, Lukasiewiczově a součinové logice, ale nikoli v RPL.

**Příklad:**
\[ \forall n \in \mathbb{N} : r_n := 1 - \frac{1}{n}, A \text{ formule, která není dokazatelná (např. proměnná)} \]
\[ T = \{ r_n \to A : n \in \mathbb{N} \}, \]
\[ |A|_T \geq \sup \{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} = 1, \]
ale A nelze dokázat ze žádné konečné podteorie.

**KLASICKÁ PREDIKÁTÓVÁ LOGIKA**

Predikát přiřazuje objektům pravdivostní hodnoty
\[ \forall x P(x) \text{ lze chápat jako konjunkci} \]
\[ P(x_1) \land P(x_2) \land \ldots \]
\[ \exists x P(x) \text{ lze chápat jako disjunkci} \]
\[ P(x_1) \lor P(x_2) \lor \ldots \]

**SYNTAXE** Logické symboly:
\[ A = \{ x, y, \ldots \} \text{ ... spočetná množina proměnných} \]
\[ L = \{ \to, 0 \} \text{ ... množina logických spojek} \]
\[ \forall, \exists \ldots \text{ kvantifikátory} \]

Speciální symboly:
\[ \mathcal{P} \ldots \text{ neprázdná množina predikátů (s přiřazenými aritami)} \]
popř. funkční symboly (zde neuvažujeme)
popř. objektové konstanty (zde neuvažujeme; lze je nahradit nulárními predikáty)

**Formule**
\[ P(x_1, \ldots, x_n), \text{kde } P \text{ je predikát arity } n \text{ a } x_1, \ldots, x_n \text{ jsou proměnné} \]
\[ 0 \]
\[ A \to B, \text{kde } A, B \text{ jsou formule} \]
\[ \forall x A, \text{kde } A \text{ je formule} \]
\[ \exists x A, \text{kde } A \text{ je formule} \]
Výskyt proměnné:
\[ \text{vázaný} \]
\[ \text{volný} \]

**Příklad:**
\[ \forall x Q(x, y) \text{ ... } x \text{ vázaná, } y \text{ volná} \]
\[ x \land \forall x P(x) \text{ ... první výskyt } x \text{ volný, ostatní vázané} \]

Formule
\[ \text{uzavřená (=} \text{sentence): bez volných proměnných} \]
\[ \text{otevřená: bez vázaných proměnných} \]
Ztotožňujeme formule, které se liší pouze značením vázaných proměnných.

**SÉMANTIKA** Interpretace \( M \):
\[ \mathcal{D}_M \ldots \text{ neprázdná množina (universum; mohla by být různá pro různé proměnné)} \]
\[ \text{interpretace predikátu arity } n \ldots n-ární relace } \mathcal{D}_M^n \to \{0,1\} \]
Ohodnocení (v interpretaci $M$): $e_M : A \rightarrow D_M$
se rozšiřuje jednoznačně na všechny formule.
Nová pravidla:

\[(e_M(\forall x A) = 1) \iff e_M'(A) = 1 \quad \text{pro všechna} \quad \text{ohodnocení} \quad e_M' : A \rightarrow D_M, \quad \text{která se liší od} \quad e_M \quad \text{pouze v} \quad x\]

ekvivalentně: $e_M(\forall x A) = \inf\{e_M'(A) : A \rightarrow D_M \quad \text{je ohodnocení, které se liší od} \quad e_M \quad \text{pouze v} \quad x\}$
\[(e_M(\exists x A) = 1) \iff e_M'(A) = 1 \quad \text{pro aspoň jedno} \quad \text{ohodnocení} \quad e_M' : A \rightarrow D_M, \quad \text{které se liší od} \quad e_M \quad \text{pouze v} \quad x\]

ekvivalentně: $e_M(\exists x A) = \sup\{e_M'(A) : A \rightarrow D_M \quad \text{je ohodnocení, které se liší od} \quad e_M \quad \text{pouze v} \quad x\}$

Poznámka:
Sémantický důsledek: $T \models A \quad \text{(bez indexu)}$
pouze pro uzavřené formule

Věta o dedukci v klasické preddikátové logice

\[(T \cup \{A\}) \vdash B \iff (T \vdash A \rightarrow B)\]

Důsledek

\[(A \vdash B) \iff (\models A \leftrightarrow B)\]

Věta

\[\vdash (\neg \forall x A) \leftrightarrow (\exists x \neg A)\]
\[\vdash (\exists x A) \leftrightarrow (\forall x \neg A)\]
\[\vdash (\exists x A) \leftrightarrow (\neg (\exists x \neg A))\]

Úplnost

\[(T \models A) \iff (T \vdash A)\]

ZÁKLADNÍ (FUZZY) PREDIKÁTOVÁ LOGIKA,
BASIC (FUZZY) PREDICATE LOGIC, BL?

Odvozena z BL, stejně jako klasická preddikátová logika z klasické výrokové logiky

Rozdíly:

SÉMANTIKA

Interpretace preddikátu arity $n \ldots n$-ární fuzzy relace $D^n_M \rightarrow [0,1]$\n
Ohodnocení kvantifikátorů v interpretaci $M$:

\[e_M(\forall x A) = \inf\{e_M'(A) : A \rightarrow D_M \quad \text{je ohodnocení, které se liší od} \quad e_M \quad \text{pouze v} \quad x\}\]
\[e_M(\exists x A) = \sup\{e_M'(A) : A \rightarrow D_M \quad \text{je ohodnocení, které se liší od} \quad e_M \quad \text{pouze v} \quad x\}\]

Poznámka: Pro ohodnocení s hodnotami v obecnějších množinách pravdivostních hodnot než $[0,1]$ (BL-algebřách) je nutno předpokládat existenci použitých inf, sup.

Pravdivostní hodnota formule $A$ v interpretaci $M$: $||A||_M = \inf\{e_M(A) : e_M \quad \text{je ohodnocení v} \quad M\}$

SYNTAXE

Axiomy:

1. $(A1)–(A7)$
2. pro všechny formule $P(t)$, vzniklé substitucí $t$ za $x$ ve formuli $P(x)$:

\[(\forall 1) \quad (\forall x \ P(x)) \rightarrow P(t)\]
\[(\exists 1) \quad P(t) \rightarrow (\exists x \ P(x))\]

3. pro všechny formule $B$ neobsahující $x$ (jako volnou proměnnou):

\[(\forall 2) \quad (\forall x \ (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow \forall x \ A)\]
$$(\exists x \ (A \rightarrow B)) \rightarrow ((\exists x \ A) \rightarrow B)$$

$$(\forall x \ (B \lor A)) \rightarrow ((\forall x \ A) \lor B)$$

**Dedukční pravidla:**

**Modus ponens:**

$$\begin{array}{c}
A, \ A \rightarrow B \\
\hline
B
\end{array}$$

**Generalizace:**

$$\forall x \ A$$

**Věta o dedukci v základní predikátové logice** (pro uzavřené formule)

$$(T \cup \{A\} \vdash B) \iff (\exists n \in N : (T \vdash A^n \rightarrow B))$$

**Theorem**

$$\vdash (\exists x \ A) \rightarrow \neg(\forall x \neg A)$$

$$\vdash (\neg \exists x \ A) \leftrightarrow (\forall x \neg A)$$

$\models_M A \ldots A je pravdivá pro všechna ohodnocení v interpretaci M$

\models A \ldots A je pravdivá pro všechna ohodnocení a všechny interpretace (tautologie)

**Theorem**

$$e_M(A) \land e_M(A \rightarrow B) \leq e_M(B)$$

speciálně:

$$(e_M(A) = 1) \land (e_M(A \rightarrow B) = 1) \Rightarrow (e_M(B) = 1)$$

**Důsledek**

$$\|A\|_M \land \|A \rightarrow B\|_M \leq \|B\|_M$$

speciálně:

$$(\|A\|_M = 1) \land (\|A \rightarrow B\|_M = 1) \Rightarrow (\|B\|_M = 1)$$

$$\|A\|_M = \|\forall x \ A\|_M$$

$$\models_M A \Rightarrow (\models_M \forall x \ A)$$

Interpretace je **modelem** teorie $T$, jestliže

$$\|A\|_M = 1 \text{ pro všechna } A \in T$$

**Korektnost a úplnost**

$$(T \vdash A) \iff (\|A\|_M = 1 \text{ pro každý model } M T)$$

(Správně bychom měli uvažovat všechna ohodnocení ve všech úplně usporádaných BL-algebrách.)

**RACIONÁLNÍ PAVELKOVA PREDIKÁTOVÁ LOGIKA RPL**

Odvozena z RPL, stejně jako základní predikátová logika ze základní výrokové logiky

**Rozdíly:**

**Axiomy:**

• (L1)–(L4)

• (RPL) (bookkeeping axioms, násobilka)

• (\forall1), (\forall2)

To stačí, protože

(i v Lukasiewiczově predikátové logice)

$$\vdash (\exists x \ A) \leftrightarrow (\forall x \neg A)$$

a (\forall3) je dokazatelná.

**Korektnost a úplnost**

Jestliže $T$ je teorie (tvořená uzavřenými formulemi), pak

$$|A|_T = |A||_T, \text{ kde}$$

$$|A||_T$$ je infimum přes všechna ohodnocení a všechny modely $T$, 

$|A|_T$ je supremum všech stupněj dokazatelnosti za předpokladů $T$. 

13