Matematika 6F – fuzzy množiny

Mirko Navara

http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/m6f/fset_print.pdf
27. dubna 2010

1 Pojem fuzzy množiny

1.1 Minimum o klasických množinách

Abychom se vyhnuli problémům, omezíme se na podmnožiny nějaké **univerzální množiny** (**univerza**) X

$\mathcal{P}(X)$ značí množinu všech podmnožin množiny X

Množinu $A \in \mathcal{P}(X)$ jednoznačně určuje její **charakteristická funkce** $\mu_A : X \to \{0,1\}$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A, \\ 0 & \text{pro } x \notin A. \end{cases}$$

$$A = \{x \in X : \ \mu_A(x) = 1\} = \{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\}.$$

Pomocí značení

$$\mu_A^{-1}(M) = \{x \in X : \ \mu_A(x) \in M\}$$

lze psát

$$A = \mu_A^{-1}\big(\{1\}\big) = \mu_A^{-1}\big((0,1\rangle\big).$$

Místo $\mu_A^{-1}\big(\{1\}\big)$ píšeme $\mu_A^{-1}(1)$ apod.

Speciálně $\mu_\emptyset = 0$, $\mu_X = 1$.

1.2 Zavedení fuzzy množin

Fuzzy podmnožina univerza X (stručně **fuzzy množina**) je objekt A, který popisuje (zobecněná) **charakteristická funkce** (**funkce příslušnosti**) $\mu_A : X \to \langle 0,1\rangle$

Alternativní značení: $A(x)$

„Klasické“ množiny nazýváme v tomto kontextu **ostré** (angl. **crisp, sharp**).

$\mathcal{F}(X)$ značí množinu všech fuzzy podmnožin univerza X

Obor pravdivostních hodnot (angl. **range, level set**): $\mathrm{Range}(A) = \big\{\alpha \in \langle 0,1\rangle : \ (\exists x \in X : \ \mu_A(x) = \alpha)\big\} = \mu_A(X)$

Výška: $h(A) = \sup \mathrm{Range}(A)$

Nosič (angl. **support**): $\mathrm{Supp}(A) = \big\{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\big\} = \mu_A^{-1}\big((0,1\rangle\big)$

Jádro (angl. **core**): $\mathrm{core}(A) = \big\{x \in X : \ \mu_A(x) = 1\big\} = \mu_A^{-1}(1)$

Příklady fuzzy množin

$A, B \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ x & \text{pro } x \in \langle 0,1\rangle, \\ 2-x & \text{pro } x \in (1,2\rangle, \\ 0 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x = 3, \\ 1 & \text{pro } x = 4, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x = 5, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Konečné fuzzy množiny zapisujeme stručněji např. $\mu_B = \{(3, \frac{1}{2}), (4,1), (5, \frac{1}{4})\}$.

Alternativní značení: $\mu_B = \{\frac{1}{2}/3, 1/4, \frac{1}{4}/5\}$, $\mu_B = \frac{1}{2}/3 + 1/4 + \frac{1}{4}/5$.

2 Systém řezů fuzzy množiny

Definice: Nechť $A \in \mathcal{F}(X)$, $\alpha \in \langle 0,1\rangle$. Pak **$\alpha$-hladina** (angl. **$\alpha$-level**) fuzzy množiny A je ostrá množina

$$\mu_A^{-1}(\alpha) = \{x \in X : \mu_A(x) = \alpha\}.$$

Systém řezů fuzzy množiny A je zobrazení $\mathcal{R}_A : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(X)$, které každému $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ přiřazuje tzv. **α-řez** (angl. **α-cut**)

$$\mathcal{R}_A(\alpha) = \mu_A^{-1}(\langle \alpha, 1\rangle) = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Systém ostrých řezů je $\mathcal{S}_A : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(X)$, kde

$$\mathcal{S}_A(\alpha) = \mu_A^{-1}((\alpha, 1\rangle) = \{x \in X : \mu_A(x) > \alpha\}.$$

Alternativní značení α-řezu: $[A]_\alpha$, $[A]^\alpha$, ${}^\alpha A$, ${}_\alpha A$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Range}(A) &= \{\alpha \in \langle 0,1\rangle : \mu_A^{-1}(\alpha) \neq \emptyset\},\\
h(A) &= \sup\{\alpha \in \langle 0,1\rangle : \mathcal{R}_A(\alpha) \neq \emptyset\},\\
\mathrm{Supp}(A) &= \mathcal{S}_A(0),\\
\mathrm{core}(A) &= \mathcal{R}_A(1),\\
\mathcal{R}_A(0) &= X,\\
\mathcal{S}_A(1) &= \emptyset.
\end{aligned}$$

2.1 Věta o systému řezů

Věta: Zobrazení $M : \langle 0,1\rangle \to \mathcal{P}(X)$ je systém řezů nějaké fuzzy množiny $A \in \mathcal{F}(X)$, právě když
(R1) $M(0) = X$,
(R2) $0 \leq \alpha < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\alpha) \supseteq M(\beta)$,
(R3) $0 < \beta \leq 1 \Rightarrow M(\beta) = \bigcap_{\alpha:\alpha<\beta} M(\alpha)$.

Důkaz:
'$\Rightarrow$': (R1): $M(0) = \mathcal{R}_A(0) = X$.
(R2): $x \in M(\beta) = \mathcal{R}_A(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta > \alpha \Rightarrow x \in \mathcal{R}_A(\alpha) = M(\alpha)$.
(R3) '$\subseteq$': (R2) $\Rightarrow \forall \alpha \in \langle 0, \beta) : M(\beta) \subseteq M(\alpha) \Rightarrow M(\beta) \subseteq \bigcap_{\alpha:\alpha<\beta} M(\alpha)$.

(R3) '$\supseteq$': $x \in \bigcap_{\alpha:\alpha<\beta} M(\alpha) = \bigcap_{\alpha:\alpha<\beta} \mathcal{R}_A(\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in \langle 0, \beta) : \mu_A(x) \geq \alpha$,
$\Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \iff x \in \mathcal{R}_A(\beta) = M(\beta)$.

'$\Leftarrow$': Dokážeme, že $M = \mathcal{R}_A$, kde $\mu_A(x) := \sup\{\alpha \in \langle 0,1\rangle : x \in M(\alpha)\}$.
'$\subseteq$': $x \in M(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) \geq \beta \iff x \in \mathcal{R}_A(\beta)$,
'$\supseteq$': $x \in \mathcal{R}_A(\beta) \Rightarrow \mu_A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0,1\rangle : x \in M(\alpha)\} \geq \beta$,
$\forall \alpha \in \langle 0, \beta) : x \in M(\alpha)$,
$x \in \bigcap_{\alpha:\alpha<\beta} M(\alpha) = M(\beta)$.

2.2 Reprezentace fuzzy množin

Horizontální reprezentace: pomocí systému řezů
Vertikální reprezentace: pomocí funkce příslušnosti
Převod z horizontální do vertikální reprezentace:

$$\mu_A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0,1\rangle : x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\}.$$

Věta: Nechť $A \in \mathcal{F}(X)$. Pak

$$\mu_A = \sup_{\alpha \in \langle 0,1\rangle} \alpha\, \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)} = \sup_{\alpha \in \mathrm{Range}(A)} \alpha\, \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)},$$

kde supremum počítáme po bodech, tj.

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in \mathrm{Range}(A)} \alpha\, \mu_{\mathcal{R}_A(\alpha)}(x).$$

2.3 Fuzzy inkluze

Klasická definice $A \subseteq B \iff \forall x \in A: \ x \in B$ se nehodí, neboť pro fuzzy množiny nemůžeme psát $x \in A, x \in B$
Nicméně $A \subseteq B \iff \forall x \in X: \ \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \iff \mu_A \leq \mu_B$

Pro $A,\, B \in \mathcal{F}(X)$:
$A \subseteq B \iff \forall x \in X: \ \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \iff \mu_A \leq \mu_B \iff$
$\forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle: \ \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$

Důkaz poslední ekvivalence:
'$\Rightarrow$': Nechť $\mu_A \leq \mu_B$, $x \in \mathcal{R}_A(\alpha)$
$\alpha \leq \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $x \in \mathcal{R}_B(\alpha)$, tj. $\mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$
'$\Leftarrow$': Nechť $\forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle: \ \mathcal{R}_A(\alpha) \subseteq \mathcal{R}_B(\alpha)$
$\mu_A(x) = \sup\big\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle: \ x \in \mathcal{R}_A(\alpha)\big\}$
$\leq \sup\big\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle: \ x \in \mathcal{R}_B(\alpha)\big\} = \mu_B(x)$

2.4 Řezová konzistence

Vlastnost P fuzzy množin $A_1, \ldots, A_n$ je předpis, který argumentům $A_1, \ldots, A_n$ přiřazuje ostrou pravdivostní hodnotu $P(A_1, \ldots, A_n) \in \{0, 1\}$ („predikát“).

Vlastnost P fuzzy množiny se nazývá

- **řezově dědičná** (angl. **cutworthy**), jestliže

$$P(A_1, \ldots, A_n) \Rightarrow (\forall \alpha \in (0, 1\rangle : P(\mathcal{R}_{A_1}(\alpha), \ldots, \mathcal{R}_{A_n}(\alpha)))\,,$$

- **řezově konzistentní**, jestliže

$$P(A_1, \ldots, A_n) \iff (\forall \alpha \in (0, 1\rangle : P(\mathcal{R}_{A_1}(\alpha), \ldots, \mathcal{R}_{A_n}(\alpha)))\,.$$

(0-řezy záměrně neuvažujeme)

Příklady řezové dědičnosti a konzistence

Inkluze je řezově konzistentní.

Silná normalita, $\exists x \in X: \ \mu_A(x) = 1$, je řezově konzistentní.

Ostrost množiny je řezově dědičná, ale není řezově konzistentní.

3 Operace s fuzzy množinami

3.1 Operace s ostrými množinami

množinové operace	výrokové operace	vztah
$\overline{}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$	$\neg: \{0,1\} \to \{0,1\}$	$\overline{A} = \big\{x \in X: \ \neg(x \in A)\big\}$
$\cap: \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	$\wedge: \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cap B = \big\{x \in X: \ (x \in A) \wedge (x \in B)\big\}$
$\cup: \mathcal{P}(X)^2 \to \mathcal{P}(X)$	$\vee: \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$	$A \cup B = \big\{x \in X: \ (x \in A) \vee (x \in B)\big\}$

Pomocí charakteristických funkcí:
$\mu_{\overline{A}}(x) = \neg\mu_A(x)$
$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$
$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

3.2 Zákony Booleovy algebry

$$
\begin{array}{rclrcl}
\neg\neg\alpha & = & \alpha, & & & \\
\alpha \vee \beta & = & \beta \vee \alpha, & \alpha \wedge \beta & = & \beta \wedge \alpha, \\
(\alpha \vee \beta) \vee \gamma & = & \alpha \vee (\beta \vee \gamma), & (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma & = & \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma), \\
\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) & = & (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma), & \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) & = & (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma), \\
\alpha \vee \alpha & = & \alpha, & \alpha \wedge \alpha & = & \alpha, \\
\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) & = & \alpha, & \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) & = & \alpha, \\
\alpha \vee 1 & = & 1, & \alpha \wedge 0 & = & 0, \\
\alpha \vee 0 & = & \alpha, & \alpha \wedge 1 & = & \alpha, \\
\alpha \wedge \neg\alpha & = & 0, & \alpha \vee \neg\alpha & = & 1, \\
\neg(\alpha \wedge \beta) & = & \neg\alpha \vee \neg\beta, & \neg(\alpha \vee \beta) & = & \neg\alpha \wedge \neg\beta.
\end{array}
$$

3.3 Fuzzy negace

je unární operace $\underset{\cdot}{\neg} : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ taková, že

$$\alpha \le \beta \Rightarrow \underset{\cdot}{\neg}\beta \le \underset{\cdot}{\neg}\alpha, \tag{N1}$$

$$\underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \alpha. \tag{N2}$$

Příklad: Standardní negace: $\underset{S}{\neg}\alpha = 1 - \alpha$.

Vlastnosti fuzzy negací

Věta: Každá fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$ je spojitá, klesající, bijektivní a splňuje okrajové podmínky

$$\underset{\cdot}{\neg}1 = 0, \qquad \underset{\cdot}{\neg}0 = 1. \tag{N0}$$

Její graf je symetrický podle osy 1. a 3. kvadrantu, tj. $\underset{\cdot}{\neg}^{-1} = \underset{\cdot}{\neg}$

Důkaz:

- Prostá: Je-li $\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\beta$, pak $\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\underset{\cdot}{\neg}\beta = \beta$.
- Surjektivní („na“): Pro každé $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ existuje $\beta \in \langle 0,1\rangle$ takové, že $\alpha = \underset{\cdot}{\neg}\beta$, totiž $\beta = \underset{\cdot}{\neg}\alpha$.
- $\Rightarrow$ spojitost a okrajové podmínky.
- Symetrie grafu je ekvivalentní s involutivitou (N2) .

Věta o reprezentaci fuzzy negací

Nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce $\underset{\cdot}{\neg} : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ byla fuzzy negace, je existence rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**generátor fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$**) takové, že

$$\underset{\cdot}{\neg} = i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1}, \quad \text{tj.} \quad \underset{\cdot}{\neg}\alpha = i^{-1}\big(\underset{S}{\neg}\, i(\alpha)\big).$$

Důkaz: (Dle [Nguyen-Walker].)

- Postačující:

(N1): Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0,1\rangle$, $\alpha \le \beta$.
i, i^{-1} uspořádání zachovávají, $\underset{S}{\neg}$ obrací:

$$
\begin{array}{rcl}
i(\alpha) & \le & i(\beta) \\
\underset{S}{\neg}\, i(\alpha) & \ge & \underset{S}{\neg}\, i(\beta) \\
i^{-1}\big(\underset{S}{\neg}\, i(\alpha)\big) & \ge & i^{-1}\big(\underset{S}{\neg}\, i(\beta)\big) \\
\underset{\cdot}{\neg}\alpha & \ge & \underset{\cdot}{\neg}\beta
\end{array}
$$

(N2): $\underset{\cdot}{\neg} \circ \underset{\cdot}{\neg} = i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} \circ i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} = i \circ \underset{S}{\neg} \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} = i \circ i^{-1} = \mathrm{id}$,
kde id je identita na $\langle 0,1\rangle$.

Možná konstrukce generátoru fuzzy negace

- Nutná: Dokážeme, že
$$i(\alpha) = \frac{\alpha + \underset{S}{\neg}\,\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha}{2}$$

je generátorem fuzzy negace $\underset{\cdot}{\neg}$.

i je rostoucí, spojitá, $i(0) = 0$, $i(1) = 1$, tedy i je bijekce na $\langle 0, 1\rangle$.

$$\begin{aligned}
\underset{S}{\neg}\, i(\alpha) &= 1 - \frac{\alpha + \underset{S}{\neg}\,\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha}{2} = \frac{1 - \alpha + 1 - \underset{S}{\neg}\,\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha}{2} = \frac{\underset{S}{\neg}\,\alpha + \underset{S}{\neg}\,\underset{S}{\neg}\,\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha}{2} = \\
&= \frac{\underset{S}{\neg}\,\alpha + \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha}{2} = \frac{\underset{S}{\neg}\,\underset{\cdot}{\neg}\,\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha + \underset{\cdot}{\neg}\,\alpha}{2} = i(\underset{\cdot}{\neg}\,\alpha). \\
i \circ \underset{S}{\neg} &= \underset{\cdot}{\neg} \circ i, \text{ neboli } i \circ \underset{S}{\neg} \circ i^{-1} = \underset{\cdot}{\neg}
\end{aligned}$$

Generátor fuzzy negace není jednoznačně určen.

3.4 Fuzzy doplněk

$$\mu_{\overline{A}^{\cdot}}(x) = \underset{\cdot}{\neg}\,\mu_A(x).$$

Rozlišujeme stejnými indexy jako u fuzzy negací, například $\overline{A}^{S}$ je standardní doplněk.

3.5 Fuzzy konjunkce (trojúhelníková norma, t-norma)

(angl. **triangular norm**) je binární operace $\underset{\cdot}{\wedge} : \langle 0, 1\rangle^2 \to \langle 0, 1\rangle$ splňující následující axiomy pro všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1\rangle$:

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \beta \underset{\cdot}{\wedge} \alpha \qquad \text{(komutativita) (T1)}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} (\beta \underset{\cdot}{\wedge} \gamma) = (\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta) \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \qquad \text{(asociativita) (T2)}$$

$$\beta \le \gamma \Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \le \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \qquad \text{(monotonie) (T3)}$$

$$\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha \qquad \text{(okrajová podmínka) (T4)}$$

Věta: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 = 0$.

Důkaz: Podle (T3) a (T4) platí: $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} 0 \overset{\text{(T3)}}{\le} 1 \underset{\cdot}{\wedge} 0 \overset{\text{(T4)}}{=} 0$.

Příklady fuzzy konjunkcí

- **Standardní** (**min**, **Gödelova**, **Zadehova** ...):
$$\alpha \underset{S}{\wedge} \beta = \min(\alpha, \beta).$$

- **Součinová** (**produktová**, **pravděpodobnostní**, **Goguenova**, angl. **algebraic product** ...):
$$\alpha \underset{P}{\wedge} \beta = \alpha \cdot \beta.$$

- **Łukasiewiczova** (**Gilesova**, angl. též **bold** ...):
$$\alpha \underset{L}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pro } \alpha + \beta - 1 > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- **Drastická** (**slabá**, angl. **weak** ...):
$$\alpha \underset{D}{\wedge} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 1, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Vlastnosti fuzzy konjunkcí

Věta:

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0,1 \rangle: \quad \alpha \underset{D}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{S}{\wedge} \beta.$$

Důkaz: Je-li $\alpha = 1$ nebo $\beta = 1$, pak podmínka (T4) dává stejný výsledek pro všechny fuzzy konjunkce. Předpokládejme (bez újmy na obecnosti) $\alpha \leq \beta < 1$. Pak

$$\alpha \underset{D}{\wedge} \beta = 0 \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \leq \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 = \alpha = \alpha \underset{S}{\wedge} \beta.$$

Věta: Standardní konjunkce je jediná, která je **idempotentní**, tj. $\forall \alpha \in \langle 0,1 \rangle : \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha = \alpha$

Důkaz: Předpokládejme $\alpha, \beta \in \langle 0,1 \rangle$, $\alpha \leq \beta$.

$$\alpha = \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha \overset{\text{(T3)}}{\leq} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta \overset{\text{(T3)}}{\leq} \alpha \underset{\cdot}{\wedge} 1 \overset{\text{(T4)}}{=} \alpha,$$

tedy $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \alpha = \alpha \underset{S}{\wedge} \beta$.
Totéž pro $\alpha > \beta$.

Reprezentace fuzzy konjunkcí (obecně)

Věta: Nechť $\underset{1}{\wedge}$ je fuzzy konjunkce a $i : \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ rostoucí bijekce. Pak operace $\underset{2}{\wedge} : \langle 0,1 \rangle^2 \to \langle 0,1 \rangle$ definovaná vzorcem

$$\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)\big)$$

je fuzzy konjunkce. Je-li $\underset{1}{\wedge}$ spojitá, je $\underset{2}{\wedge}$ též spojitá.

Důkaz:

- Komutativita (asociativita se dokáže obdobně):

$$\alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)) = i^{-1}(i(\beta) \underset{1}{\wedge} i(\alpha)) = \beta \underset{2}{\wedge} \alpha$$

- Monotonie: Předpokládejme $\beta \leq \gamma$.

$$\begin{aligned} i(\beta) &\leq i(\gamma), \\ i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta) &\leq i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\gamma), \\ \alpha \underset{2}{\wedge} \beta = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\beta)) &\leq i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(\gamma)) = \alpha \underset{2}{\wedge} \gamma. \end{aligned}$$

- Okrajová podmínka:

$$\alpha \underset{2}{\wedge} 1 = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} i(1)) = i^{-1}(i(\alpha) \underset{1}{\wedge} 1) = i^{-1}(i(\alpha)) = \alpha.$$

Klasifikace fuzzy konjunkcí

Spojitá fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$ je

- **archimédovská**, jestliže
$$\forall \alpha \in (0,1): \quad \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \alpha < \alpha \tag{TA}$$
- **striktní**, jestliže
$$\forall \alpha \in (0,1\rangle \ \forall \beta, \gamma \in \langle 0,1 \rangle: \quad \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta < \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \tag{T3+}$$
- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

Příklad: Součinová konjunkce je striktní, Łukasiewiczova je nilpotentní, standardní a drastická nejsou archimédovské (standardní nesplňuje (TA), drastická není spojitá).

Věta o reprezentaci striktních fuzzy konjunkcí

Operace $\dot\wedge : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je striktní fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**multiplikativní generátor**) taková, že

$$\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \mathbin{\underset{\mathrm{P}}{\wedge}} i(\beta)\big) = i^{-1}\big(i(\alpha) \cdot i(\beta)\big).$$

Že je podmínka postačující, jsme již dokázali (kromě striktnosti, což je snadné). Důkaz nutnosti je mnohem obtížnější.

Multiplikativní generátor striktní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.

Věta o reprezentaci nilpotentních fuzzy konjunkcí

Operace $\dot\wedge : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je **nilpotentní** fuzzy konjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**Łukasiewiczův generátor**) taková, že

$$\alpha \mathbin{\dot\wedge} \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \mathbin{\underset{\mathrm{L}}{\wedge}} i(\beta)\big).$$

Łukasiewiczův generátor nilpotentní fuzzy konjunkce není určen jednoznačně.

Věta: Nechť $\dot\wedge$ je **nilpotentní** fuzzy konjunkce. Pak

$$\forall \alpha \in (0,1)\ \exists n \in \mathbf{N} : \dot{\bigwedge}_{k=1}^{n} \alpha = 0$$

Důkaz: Podle reprezentační věty stačí (bez újmy na obecnosti) dokázat větu pro Łukasiewiczovu konjunkci. Pro dostatečně velké n dostáváme

$$\alpha + \sum_{i=2}^{n} (\alpha - 1) \le 0, \qquad \underset{\mathrm{L}}{\bigwedge}_{k=1}^{n} \alpha = 0.$$

3.6 Fuzzy průnik

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy konjunkce:

$$\mu_{A \dot\cap B}(x) = \mu_A(x) \mathbin{\dot\wedge} \mu_B(x)$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy konjunkcí)

Věta: Standardní průnik je řezově konzistentní.

Důkaz: 1. Řezová dědičnost:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{A \underset{\mathrm{S}}{\cap} B}(\alpha) &= \{x \in X : \mu_{A \underset{\mathrm{S}}{\cap} B}(x) \ge \alpha\} \\
&= \{x \in X : (\mu_A(x) \ge \alpha) \wedge (\mu_B(x) \ge \alpha)\} \\
&= \{x \in X : \mu_A(x) \ge \alpha\} \cap \{x \in X : \mu_B(x) \ge \alpha\} \\
&= \mathcal{R}_A(\alpha) \cap \mathcal{R}_B(\alpha)
\end{aligned}$$

2. Řezy $\mathcal{R}_A(\alpha) \cap \mathcal{R}_B(\alpha)$ (pro všechna $\alpha \in (0,1\rangle$) určují jednoznačně fuzzy množinu rovnou $A \underset{\mathrm{S}}{\cap} B$.

3.7 Fuzzy disjunkce (trojúhelníková konorma, t-konorma)

je binární operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ splňující

$$\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta = \beta \mathbin{\dot\vee} \alpha \qquad \text{(komutativita) (S1)}$$

$$\alpha \mathbin{\dot\vee} (\beta \mathbin{\dot\vee} \gamma) = (\alpha \mathbin{\dot\vee} \beta) \mathbin{\dot\vee} \gamma \qquad \text{(asociativita) (S2)}$$

$$\beta \le \gamma \Rightarrow \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta \le \alpha \mathbin{\dot\vee} \gamma \qquad \text{(monotonie) (S3)}$$

$$\alpha \mathbin{\dot\vee} 0 = \alpha \qquad \text{(okrajová podmínka) (S4)}$$

Věta: $\alpha \mathbin{\dot\vee} 1 = 1.$

Důkaz: $\alpha \mathbin{\dot\vee} 1 \overset{\text{(S3)}}{\ge} 0 \mathbin{\dot\vee} 1 \overset{\text{(S4)}}{=} 1.$

Příklady fuzzy disjunkcí

- **Standardní** (**max**, **Gödelova**, **Zadehova** ...):
$$\alpha \overset{\text{S}}{\vee} \beta = \max(\alpha, \beta).$$
- **Součinová** (**produktová**, **pravděpodobnostní** ...):
$$\alpha \overset{\text{P}}{\vee} \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta.$$
- **Łukasiewiczova** (**Gilesova**, angl. též **bold**, **bounded sum** ...):
$$\alpha \overset{\text{L}}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pro } \alpha + \beta < 1, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$
- **Drastická** (**slabá**, angl. **weak** ...):
$$\alpha \overset{\text{D}}{\vee} \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pro } \beta = 0, \\ \beta & \text{pro } \alpha = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$
- **Einsteinova**
$$\alpha \overset{\text{E}}{\vee} \beta = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

Vlastnosti fuzzy disjunkcí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \quad \alpha \overset{\text{S}}{\vee} \beta \leq \alpha \dot{\vee} \beta \leq \alpha \overset{\text{D}}{\vee} \beta.$$

Standardní disjunkce je jediná, která je idempotentní, tj. $\alpha \dot{\vee} \alpha = \alpha$ pro všechna $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$.

Dualita

Nechť $\underset{\cdot}{\neg}$ je fuzzy negace.

A. Je-li $\underset{\cdot}{\wedge}$ fuzzy konjunkce, pak $\alpha \dot{\vee} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\, \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \underset{\cdot}{\neg}\, \beta)$ je fuzzy disjunkce (**duální** k $\underset{\cdot}{\wedge}$ vzhledem k $\underset{\cdot}{\neg}$).

B. Je-li $\dot{\vee}$ fuzzy disjunkce, pak $\alpha \underset{\cdot}{\wedge} \beta = \underset{\cdot}{\neg}(\underset{\cdot}{\neg}\, \alpha \dot{\vee} \underset{\cdot}{\neg}\, \beta)$ je fuzzy konjunkce (**duální** k $\dot{\vee}$ vzhledem k $\underset{\cdot}{\neg}$).

Věta:

- **Łukasiewiczovy** operace $\underset{\text{L}}{\wedge}, \overset{\text{L}}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Součinové** operace $\underset{\text{P}}{\wedge}, \overset{\text{P}}{\vee}$ jsou duální vzhledem ke **standardní** negaci.
- **Standardní** operace $\underset{\text{S}}{\wedge}, \overset{\text{S}}{\vee}$ jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.
- **Drastické** operace $\underset{\text{D}}{\wedge}, \overset{\text{D}}{\vee}$ jsou duální vzhledem k **jakékoli** fuzzy negaci.

Klasifikace fuzzy disjunkcí

Spojitá fuzzy disjunkce $\dot{\vee}$ je

- **archimédovská**, jestliže
$$\forall \alpha \in (0, 1) : \quad \alpha \dot{\vee} \alpha > \alpha \tag{SA}$$
- **striktní**, jestliže
$$\forall \alpha \in \langle 0, 1) \ \forall \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle : \quad \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \dot{\vee} \beta < \alpha \dot{\vee} \gamma \tag{S3+}$$
- **nilpotentní**, jestliže je archimédovská a není striktní.

Věty o reprezentaci fuzzy disjunkcí

Věta: Operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je **striktní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ taková, že

$$\alpha \dot\vee \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \overset{\mathrm{P}}{\vee} i(\beta)\big).$$

Věta: Operace $\dot\vee : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$ je **nilpotentní** fuzzy disjunkce, právě když existuje rostoucí bijekce $i : \langle 0,1\rangle \to \langle 0,1\rangle$ (**aditivní generátor**) taková, že

$$\alpha \dot\vee \beta = i^{-1}\big(i(\alpha) \overset{\mathrm{L}}{\vee} i(\beta)\big) = \begin{cases} i^{-1}\big(i(\alpha)+i(\beta)\big) & \text{pro } i(\alpha)+i(\beta) \le 1 \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$$

3.8 Fuzzy sjednocení

je operace na fuzzy množinách definovaná pomocí fuzzy disjunkce:

$$\mu_{A \dot\cup B}(x) = \mu_A(x) \dot\vee \mu_B(x).$$

(rozlišujeme stejnými indexy jako u příslušných fuzzy disjunkcí)

Věta: **Standardní** sjednocení je řezově konzistentní.

3.9 Fuzzy výrokové algebry

černě vyznačené platí vždy
červeně vyznačené platí pro standardní fuzzy operace, ale ne pro některé jiné
modře vyznačené platí jen pro některé volby fuzzy operací (ne pro standardní)

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\dot\neg\dot\neg\alpha & = & \alpha, & & & \\
\alpha \dot\vee \beta & = & \beta \dot\vee \alpha, & \alpha \dot\wedge \beta & = & \beta \dot\wedge \alpha, \\
(\alpha \dot\vee \beta) \dot\vee \gamma & = & \alpha \dot\vee (\beta \dot\vee \gamma), & (\alpha \dot\wedge \beta) \dot\wedge \gamma & = & \alpha \dot\wedge (\beta \dot\wedge \gamma), \\
\alpha \dot\wedge (\beta \dot\vee \gamma) & = & (\alpha \dot\wedge \beta) \dot\vee (\alpha \dot\wedge \gamma), & \alpha \dot\vee (\beta \dot\wedge \gamma) & = & (\alpha \dot\vee \beta) \dot\wedge (\alpha \dot\vee \gamma), \\
\alpha \dot\vee \alpha & = & \alpha, & \alpha \dot\wedge \alpha & = & \alpha, \\
\alpha \dot\vee (\alpha \dot\wedge \beta) & = & \alpha, & \alpha \dot\wedge (\alpha \dot\vee \beta) & = & \alpha, \\
\alpha \dot\vee 1 & = & 1, & \alpha \dot\wedge 0 & = & 0, \\
\alpha \dot\vee 0 & = & \alpha, & \alpha \dot\wedge 1 & = & \alpha, \\
\alpha \dot\wedge \dot\neg\alpha & = & \mathbf{0}, & \alpha \dot\vee \dot\neg\alpha & = & \mathbf{1}, \\
\dot\neg(\alpha \dot\wedge \beta) & = & \dot\neg\alpha \dot\vee \dot\neg\beta, & \dot\neg(\alpha \dot\vee \beta) & = & \dot\neg\alpha \dot\wedge \dot\neg\beta.
\end{array}$$

3.10 Fuzzy implikace

je jakákoli operace $\dot\to : \langle 0,1\rangle^2 \to \langle 0,1\rangle$, která se na $\{0,1\}^2$ shoduje s klasickou implikací. Mohli bychom si přát:

$$\alpha \dot\to \beta = 1 \Leftarrow \alpha \le \beta, \tag{I1a}$$

$$\alpha \dot\to \beta = 1 \Rightarrow \alpha \le \beta, \tag{I1b}$$

$$1 \dot\to \beta = \beta, \tag{I2}$$

$$\dot\to \text{ je nerostoucí v 1. argumentu a neklesající v 2. argumentu,} \tag{I3}$$

$$\alpha \dot\to \beta = \underset{\mathrm{S}}{\neg}\beta \dot\to \underset{\mathrm{S}}{\neg}\alpha, \tag{I4}$$

$$\alpha \dot\to (\beta \dot\to \gamma) = \beta \dot\to (\alpha \dot\to \gamma), \tag{I5}$$

$$\text{spojitost.} \tag{I6}$$

R-implikace (reziduovaná fuzzy implikace, reziduum)

je operace

$$\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \sup\{\gamma : \ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \le \beta\} \tag{RI}$$

kde $\underset{\cdot}{\wedge}$ je fuzzy konjunkce

(je-li $\underset{\cdot}{\wedge}$ spojitá, lze supremum nahradit maximem)

Příklady R-implikací

- Od standardní konjunkce $\underset{\mathrm{S}}{\wedge}$ je odvozena **Gödelova implikace**

$$\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{S}}{\rightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá s výjimkou bodů (α, α), $\alpha < 1$.

- Od Łukasiewiczovy konjunkce $\underset{\mathrm{L}}{\wedge}$ je odvozena **Łukasiewiczova implikace**

$$\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{L}}{\rightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ 1 - \alpha + \beta & \text{jinak.} \end{cases}$$

Je po částech lineární a spojitá.

- Od součinové konjunkce $\underset{\mathrm{P}}{\wedge}$ je odvozena **Goguenova** (též **Gainesova**) **implikace**

$$\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{P}}{\rightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pro } \alpha \le \beta, \\ \frac{\beta}{\alpha} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Má jediný bod nespojitosti, $(0, 0)$.

Vlastnosti R-implikací

Věta: Nechť $\underset{\cdot}{\wedge}$ je spojitá fuzzy konjunkce. Pak R-implikace $\overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}}$ splňuje (I1a), (I1b), (I2), (I3).

Důkaz: $\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \sup \Gamma(\alpha, \beta)$, kde $\Gamma(\alpha, \beta) = \{\gamma : \ \alpha \underset{\cdot}{\wedge} \gamma \le \beta\}$ je interval obsahující nulu. (Při spojitosti $\underset{\cdot}{\wedge}$ navíc uzavřený.)

(I1a) Je-li $\alpha \le \beta$, pak $\Gamma(\alpha, \beta) = \langle 0, 1 \rangle$, $\sup \Gamma(\alpha, \beta) = 1$.

(I1b) Je-li $\alpha > \beta$, pak $1 \notin \Gamma(\alpha, \beta)$, $\sup \Gamma(\alpha, \beta) < 1$ (z uzavřenosti $\Gamma(\alpha, \beta)$).

(I2): $1 \overset{\mathrm{R}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \sup\{\gamma : \ \gamma \le \beta\} = \beta$.

(I3): Zvětšujeme-li α, $\Gamma(\alpha, \beta)$ se nezvětšuje.
Zvětšujeme-li β, $\Gamma(\alpha, \beta)$ se nezmenšuje.

Věta: Reziduovaná fuzzy implikace příslušná **spojité** fuzzy konjunkci $\underset{\cdot}{\wedge}$ je spojitá, právě když $\underset{\cdot}{\wedge}$ je nilpotentní.

S-implikace

je operace

$$\alpha \overset{\mathrm{S}}{\underset{\cdot}{\rightarrow}} \beta = \underset{\mathrm{S}}{\neg}\, \alpha \mathbin{\dot\vee} \beta \tag{SI}$$

kde $\dot\vee$ je fuzzy disjunkce

Příklad:

- Ze standardní disjunkce dostáváme **Kleeneovu–Dienesovu** implikaci

$$\alpha \overset{\mathrm{S}}{\underset{\mathrm{S}}{\rightarrow}} \beta = \max(1 - \alpha, \beta).$$

- Z Łukasiewiczovy disjunkce dostáváme **Łukasiewiczovu** implikaci $\overset{\mathrm{S}}{\underset{\mathrm{L}}{\to}}$, která se shoduje s Łukasiewiczovou reziduovanou implikací $\overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{L}}{\to}}$.

Všechny požadavky (I1a),(I1b),(I2)–(I6) splňují ze zde probíraných fuzzy implikací pouze reziduované implikace odvozené od nilpotentních fuzzy konjunkcí (např. Łukasiewiczova implikace).

3.11 Fuzzy biimplikace (ekvivalence)

je operace $\dot{\leftrightarrow}$, obvykle definovaná vztahem

$$\alpha \dot{\leftrightarrow} \beta = (\alpha \dot{\to} \beta) \dot{\wedge} (\beta \dot{\to} \alpha),$$

kde $\dot{\to}$ je fuzzy implikace a $\dot{\wedge}$ je fuzzy konjunkce (biimplikaci indexujeme stejně jako odpovídající fuzzy implikaci)

Pokud $\dot{\to}$ splňuje (I1a) (například pro reziduovanou implikaci), je vždy aspoň jedna ze závorek na pravé straně rovna jedné, takže nezáleží na volbě fuzzy konjunkce $\dot{\wedge}$.

Příklad: Łukasiewiczova biimplikace: $\alpha \overset{\mathrm{R}}{\underset{\mathrm{L}}{\leftrightarrow}} \beta = 1 - |\alpha - \beta|$.

4 Fuzzy relace

4.1 Klasické relace

Binární relace je $R \subseteq X \times Y$

Inverzní relace k R: $R^{-1} \subseteq Y \times X$:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : \ (x, y) \in R\}$$

Složená relace z relací $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ je $R \circ S \subseteq X \times Z$:

$$R \circ S = \Big\{(x, z) \in X \times Z : \ \big(\exists y \in Y : (x, y) \in R, (y, z) \in S\big)\Big\}$$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\mu_R : X \times Y \to \{0, 1\}$$
$$\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$$
$$\mu_{R \circ S}(x, z) = \max_{y \in Y}\big(\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z)\big)$$

4.2 Fuzzy relace

Fuzzy relace je $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $\mu_R : X \times Y \to \langle 0, 1\rangle$

Inverzní relace k R je $R^{-1} \in \mathcal{F}(Y \times X)$:

$$\forall x \in X \ \forall y \in Y : \mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$$

$\dot{\ }$-složená relace z relací $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ je $R \dot{\circ} S \in \mathcal{F}(X \times Z)$:

$$\mu_{R \dot{\circ} S}(x, z) = \sup_{y \in Y}\big(\mu_R(x, y) \dot{\wedge} \mu_S(y, z)\big)$$

Věta Inverze fuzzy relací je řezově konzistentní.

Věta Je-li Y konečná množina, pak standardní skládání fuzzy relací $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ je řezově konzistentní.

4.3 Speciální ostré relace

$R \subseteq X \times X$ může být:

- **rovnost**: $E = \{(x, x) : \; x \in X\}$,
- **reflexivní**: $\forall x \in X : \; (x, x) \in R$, tj. $E \subseteq R$,
- **symetrická**: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$, tj. $R = R^{-1}$,
- **antisymetrická**: $\big((x, y) \in R\big) \wedge \big((y, x) \in R\big) \Rightarrow x = y$, tj. $R \cap R^{-1} \subseteq E$,
- **tranzitivní**: $\big((x, y) \in R\big) \wedge \big((y, z) \in R\big) \Rightarrow (x, z) \in R$, tj. $R \circ R \subseteq R$,
- **částečné uspořádání**: antisymetrická, reflexivní a tranzitivní,
- **ekvivalence**: symetrická, reflexivní a tranzitivní.

Relaci rovnosti, $E \subseteq X \times X$ odpovídá funkce příslušnosti **Kroneckerovo delta**:

$$\mu_E(x, y) = \delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = y, \\ 0 & \text{pro } x \neq y. \end{cases}$$

4.4 Speciální fuzzy relace

$R \in \mathcal{F}(X \times X)$ může být:

- **reflexivní**: $E \subseteq R$,
- **symetrická**: $R = R^{-1}$,
- **$\cdot$-antisymetrická**: $R \underset{\cdot}{\cap} R^{-1} \subseteq E$,
- **$\cdot$-tranzitivní**: $R \underset{\cdot}{\circ} R \subseteq R$,
- **$\cdot$-částečné uspořádání**: $\cdot$-antisymetrická, reflexivní a $\cdot$-tranzitivní,
- **$\cdot$-ekvivalence**: symetrická, reflexivní a $\cdot$-tranzitivní.

Poslední čtyři pojmy závisí na volbě fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$.

Věta Následující vlastnosti fuzzy relací jsou řezově konzistentní:

- reflexivita,
- symetrie,
- standardní antisymetrie,
- standardní tranzitivita,
- standardní částečné uspořádání,
- standardní ekvivalence.

4.5 Projekce fuzzy relací

Levá (první) projekce fuzzy relace $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ je $P_1(R) \in \mathcal{F}(X)$:

$$\mu_{P_1(R)}(x) = \sup_{y \in Y} \mu_R(x, y)$$

Pravá (druhá) projekce fuzzy relace $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ je $P_2(R) \in \mathcal{F}(Y)$:

$$\mu_{P_2(R)}(y) = \sup_{x \in X} \mu_R(x, y)$$

Věta Projekce fuzzy relací jsou řezově konzistentní.

4.6 Cylindrické rozšíření

(též **kartézský součin**) fuzzy množin $A \in \mathcal{F}(X)$, $B \in \mathcal{F}(Y)$ je $A \times B \in \mathcal{F}(X \times Y)$:

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \mu_A(x) \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \mu_B(y)$$

Je to maximální fuzzy relace $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ taková, že $P_1(R) \subseteq A$ a $P_2(R) \subseteq B$. Rovnost nastává, právě když $h(A) = h(B)$.

Věta

$$P_1(R) \times P_2(R) \supseteq R$$

Věta Cylindrické rozšíření je řezově konzistentní.

5 Princip rozšíření

5.1 Rozšíření binárních relací na ostré množiny

Zobrazení je $R \subseteq X \times Y$:

$$\forall x \in X \; \exists! y = r(x) \in Y : (x, y) \in R$$

Zobrazení $R \subseteq X \times Y$ odpovídá $r : X \to Y$ předpisem $(x, y) \in R \iff y = r(x)$, $\qquad R = \big\{ \big(x, r(x)\big) : \; x \in X \big\}$

Rozšíření relace $R \subseteq X \times Y$ je zobrazení
$r : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$:

$$r(A) = \big\{ y \in Y : \; \big(\exists x \in A : (x, y) \in R\big) \big\}$$

Analogicky rozšíření relace $R^{-1} \subseteq Y \times X$ je zobrazení $r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$:

$$r^{-1}(B) = \big\{ x \in X : \; \big(\exists y \in B : (x, y) \in R\big) \big\}$$

Rozšíření r a r^{-1} jsou zobrazení, i když původní relace R zobrazení není. Nejsou však navzájem inverzní.

Pokud R je navíc zobrazení, pak

$$\begin{aligned} r(A) &= \big\{ r(x) : \; x \in A \big\} \\ r^{-1}(B) &= \big\{ x \in X : \; r(x) \in B \big\} \end{aligned}$$

Speciálně

$$r^{-1}(y) = r^{-1}(\{y\}) = \big\{ x \in X : \; r(x) = y \big\}$$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\mu_{r(A)}(y) = \max_{x \in X} \big(\mu_R(x, y) \wedge \mu_A(x) \big)$$

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \max_{y \in Y} \big(\mu_R(x, y) \wedge \mu_B(y) \big)$$

5.2 Rozšíření binárních relací na fuzzy množiny

Rozšíření relace $R \subseteq X \times Y$ je zobrazení $r : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$:

$$\mu_{r(A)}(y) = \sup_{x \in X} \big(\mu_R(x, y) \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \mu_A(x) \big) \qquad (A \in \mathcal{F}(X), \; y \in Y)$$

Analogicky rozšíření relace $R^{-1} \subseteq Y \times X$ je zobrazení $r^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$:

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in Y} \big(\mu_R(x, y) \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \mu_B(y) \big) \qquad (B \in \mathcal{F}(Y), \; x \in X)$$

R je ostrá relace, takže na volbě fuzzy konjunkce $\underset{\cdot}{\wedge}$ nezáleží:

$$\mu_R(x, y) \underset{\cdot}{\wedge} \mu_A(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \text{pro } \mu_R(x, y) = 1 \\ 0 & \text{pro } \mu_R(x, y) = 0 \end{cases}$$

S využitím rozšíření
$r : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \quad r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$
relací R, R^{-1} na **ostré** množiny lze rozšíření na **fuzzy** množiny psát

$$\mu_{r(A)}(y) = \sup_{x \in r^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in r(x)} \mu_B(y)$$

Je-li R zobrazení, pak

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \mu_B(r(x))$$

Je-li R^{-1} zobrazení, pak

$$\mu_{r(A)}(y) = \mu_A(r^{-1}(y))$$

Věta

$$r\big(\mathcal{R}_A(\alpha)\big) \subseteq \mathcal{R}_{r(A)}(\alpha)$$

Je-li pro všechna $y \in Y$ množina

$$r^{-1}(y) = \{ x \in X : (x, y) \in R \}$$

konečná, pak platí rovnost.

5.3 Konvexní fuzzy množiny

Nechť L je lineární prostor.

Ostrá množina $A \subseteq L$ je **konvexní**, jestliže

$$\forall x, y \in A\ \forall \lambda \in (0,1) : \lambda x + (1-\lambda)\, y \in A$$

Pomocí funkcí příslušnosti:

$$\min\bigl(\mu_A(x), \mu_A(y)\bigr) \leq \mu_A\bigl(\lambda x + (1-\lambda)\, y\bigr)$$

Nechť X je ostrá konvexní podmnožina lineárního prostoru.

Fuzzy množina $A \in \mathcal{F}(X)$ se nazývá **konvexní**, jestliže

$$\forall x, y \in X\ \forall \lambda \in (0,1) : \quad \mu_A\bigl(\lambda x + (1-\lambda)\, y\bigr) \geq \mu_A(x) \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \mu_A(y)$$

Konvexita fuzzy množiny nemá nic společného s konvexitou její funkce příslušnosti!

Věta Konvexita je řezově konzistentní vlastnost.

Speciálně fuzzy množina reálných čísel je konvexní, právě když všechny její neprázdné řezy jsou intervaly.

5.4 Fuzzy čísla a fuzzy intervaly

Fuzzy interval je $A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$ taková, že:

- Supp A je omezená množina,
- Pro všechna $\alpha \in (0,1\rangle$ je $\mathcal{R}_A(\alpha)$ uzavřený interval,
- $\mathcal{R}_A(1) \neq \emptyset$ (tj. $\mathcal{R}_A(1)$ je neprázdný uzavřený interval).

Je-li navíc $\mathcal{R}_A(1)$ jednobodová množina, nazývá se A **fuzzy číslo**.

Fuzzy intervaly jsou konvexní.

Fuzzy interval **opačné** k fuzzy intervalu A je $-A \in \mathcal{F}(\mathbf{R})$:

$$\mu_{-A}(x) = \mu_A(-x)$$

(Princip rozšíření binárních relací uplatněný na unární minus)

$$\mathcal{R}_{-A}(\alpha) = -\mathcal{R}_A(\alpha)$$

5.5 Binární operace s fuzzy intervaly

$\square \in \{+, -, \cdot, /\}$

$\square : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ můžeme chápat jako ostrou relaci

$\square \subseteq \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$:

$$\mu_\square\bigl((y,z), x\bigr) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \,\square\, z = x, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

Tu můžeme rozšířit podle již zavedeného principu rozšíření pro **binární relace** na operaci $\mathcal{F}(\mathbf{R}^2) \to \mathcal{F}(\mathbf{R})$, kterou potřebujeme ještě složit s cylindrickým rozšířením $\mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \to \mathcal{F}(\mathbf{R}^2)$. Tím dostáváme binární operaci $\square : \mathcal{F}(\mathbf{R}) \times \mathcal{F}(\mathbf{R}) \to \mathcal{F}(\mathbf{R})$.

$$\begin{gathered} A \in \mathcal{F}(\mathbf{R}), \quad B \in \mathcal{F}(\mathbf{R}) \\ \downarrow \\ A \times B \in \mathcal{F}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \\ \downarrow \\ A \,\square\, B = \square(A \times B) \in \mathcal{F}(\mathbf{R}) \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} \mu_{A \square B}(x) &= \mu_{\square(A \times B)}(x) \\ &= \sup_{(y,z) \in \mathbf{R}^2} \bigl(\mu_{A \times B}(y,z) \underset{\mathrm{S}}{\wedge} \mu_\square\bigl((y,z), x\bigr)\bigr) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{(y,z)\in\mathbf{R}^2, y\,\square\, z=x} \mu_{A\times B}(y,z) \\
&= \sup_{(y,z)\in\mathbf{R}^2, y\,\square\, z=x} \big(\mu_A(y) \underset{S}{\wedge} \mu_B(z)\big)
\end{aligned}
$$

Speciálně pro $\square = +$:
Hledáme supremum z funkce $\mu_A(y) \underset{S}{\wedge} \mu_B(z)$ pro všechna $(y,z) \in \mathbf{R}^2$ taková, že $y+z=x$.
Tj. hledáme supremum z funkce $\mu_A(x-z) \underset{S}{\wedge} \mu_B(z)$ pro všechna $z \in \mathbf{R}$ (neboť $y+z=x \Rightarrow y=x-z$).

$$
\begin{aligned}
\mu_{A+B}(x) &= \sup_{z\in\mathbf{R}} \big(\mu_A(x-z) \underset{S}{\wedge} \mu_B(z)\big), \\
\mu_{A-B}(x) &= \sup_{z\in\mathbf{R}} \big(\mu_A(x+z) \underset{S}{\wedge} \mu_B(z)\big), \\
\mu_{A\cdot B}(x) &= \sup_{z\in\mathbf{R},\, z\neq 0} \big(\mu_A(x/z) \underset{S}{\wedge} \mu_B(z)\big), \quad x \neq 0, \\
\mu_{A/B}(x) &= \sup_{z\in\mathbf{R}} \big(\mu_A(x\cdot z) \underset{S}{\wedge} \mu_B(z)\big).
\end{aligned}
$$

Jen pro hodnotu $\mu_{A\cdot B}(0)$ musíme použít původní definici kvůli problémům s dělením nulou.
Speciálně pro ostré intervaly $A = \langle a,b\rangle$, $B = \langle c,d\rangle$ dostaneme **intervalovou aritmetiku**:

$$
\begin{aligned}
\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle &= \langle a+c, b+d\rangle, \\
\langle a,b\rangle - \langle c,d\rangle &= \langle a-d, b-c\rangle, \\
\langle a,b\rangle \cdot \langle c,d\rangle &= \big\langle \min(ac,ad,bc,bd), \max(ac,ad,bc,bd)\big\rangle, \\
\langle a,b\rangle / \langle c,d\rangle &= \big\langle \min(a/c,a/d,b/c,b/d), \max(a/c,a/d,b/c,b/d)\big\rangle.
\end{aligned}
$$

Poslední rovnost platí pouze pro $0 \notin \langle c,d\rangle$.

$$
\mu_{A\square B}(x) = \max\big\{\mu_A(y) \underset{S}{\wedge} \mu_B(z) :\ y,z \in \mathbf{R}, y \,\square\, z = x\big\}.
$$

(V případě dělení předpokládáme navíc $\mu_B(0) = 0$.)
Věta Sčítání, odčítání, násobení a dělení fuzzy intervalů je řezově konzistentní (dělení za předpokladu, že stupeň příslušnosti nuly k děliteli je nulový).
Věta Součet, rozdíl a součin fuzzy čísel (resp. fuzzy intervalů) je fuzzy číslo (resp. fuzzy interval). (Též podíl, pokud uzávěr nosiče dělitele neobsahuje nulu.)
Libovolné reálné číslo $x \in \mathbf{R}$ lze považovat za speciální případ fuzzy čísla, (reprezentovaného jednobodovou ostrou množinou $\{x\}$), značíme x.
Věta Vlastnosti operací s fuzzy intervaly:

$$
\begin{aligned}
0 + A &= A, \\
0 \cdot A &= 0, \\
1 \cdot A &= A, \\
A + B &= B + A, \\
A \cdot B &= B \cdot A, \\
A + (B + C) &= (A + B) + C, \\
A \cdot (B \cdot C) &= (A \cdot B) \cdot C, \\
A + (-B) &= A - B, \\
(-A) \cdot B &= -(A \cdot B) = A \cdot (-B), \\
-(-A) &= A, \\
A/B &= A \cdot (1/B), \\
\mu_{A\cdot(B+C)} &\leq \mu_{(A\cdot B)+(A\cdot C)}
\end{aligned}
$$

Pokud je v posledním vztahu A ostré číslo ($A = x$), pak nastává rovnost.
Pro fuzzy intervaly může být:

$$
\begin{aligned}
A - A &\neq 0, \\
(A + B) - B &\neq A, \\
A/A &\neq 1, \\
(A/B) \cdot B &\neq A, \\
A \cdot (B + C) &\neq A \cdot B + A \cdot C.
\end{aligned}
$$