

Numerické metody — numerická derivace a Richardsonova extrapolace

Mirko Navara
<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/>
katedra kybernetiky FEL ČVUT
Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a

<https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B4B01NUM>

1. listopadu 2023

Obsah

1	APROXIMACE FUNKCÍ	11
1.1	Typické úlohy	11
1.1.1	Aproximace funkcí v ekonomii	11
1.1.2	Aproximace funkcí v teorii pravděpodobnosti a matematické analýze	11
1.1.3	Aproximace funkcí v elektrotechnice	11
1.1.4	Základní úloha aproximace	12
1.2	Interpolace	13
1.2.1	Prostá interpolace	13
1.3	Interpolace polynomem	14
1.3.1	Lagrangeova konstrukce interpolačního polynomu	15
1.3.2	Newtonova konstrukce interpolačního polynomu	17
1.3.3	Nevillův algoritmus	18
1.3.4	Chyba aproximace interpolačním polynomem	19
1.3.5	Čebyševovy polynomy	22
1.3.6	Příklad použití interpolačního polynomu na reálných datech	24
1.3.7	Hermitův interpolační polynom	26
1.3.8	Aproximace Taylorovou řadou	27
1.4	Interpolace spliny	29
1.4.1	Kubický spline	29
1.4.2	Příklad použití splinu na reálných datech	32
1.5	Metoda nejmenších čtverců	34
1.5.1	Řešení aproximace podle kritéria nejmenších čtverců	35
1.5.2	Ortogonalizace	37
1.5.3	Aproximace goniometrickým polynomem	39
1.5.4	Čebyševova aproximace polynomem	40
2	NUMERICKÁ DERIVACE A RICHARDSONOVA EXTRAPOLACE	43
2.1	Formulace problému	43
2.2	Chyba metody u numerické derivace	44
2.2.1	Řád metod numerické derivace	44
2.3	Odhady chyb metody u numerické derivace	45
2.4	Doporučená délka kroku	46
2.5	Obecný princip Richardsonovy extrapolace	47
2.6	Využití Richardsonovy extrapolace v numerické derivaci	48
2.7	Odhad derivace z reálných dat	49

3	NUMERICKÁ INTEGRACE	60
3.1	Newtonovy-Cotesovy vzorce	61
3.1.1	Metoda levých obdélníků	61
3.1.2	Obdélníková metoda	61
3.1.3	Lichoběžníková metoda	62
3.1.4	Simpsonova metoda	62
3.1.5	Obecné Newtonovy-Cotesovy vzorce	63
3.2	Odhad chyby numerické integrace	64
3.3	Řád metod integrace	64
3.4	Gaussova metoda integrace	65
3.5	Richardsonova extrapolace při integraci	66
3.5.1	Rombergova metoda	69
3.6	Praktické stanovení počtu intervalů	69
3.7	Řešení obtížnějších úloh úpravou zadání	71
3.7.1	Integrace přes nekonečný interval	71
3.7.2	Omezení intervalu	71
3.7.3	Pomalou konvergentní integrály	71
4	NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC	75
4.1	Formulace problému	75
4.2	Metoda půlení intervalu neboli bisekce	75
4.3	Metoda regula falsi	75
4.4	Univerzální odhad chyby	76
4.5	Metoda sečen	77
4.6	Newtonova metoda (metoda tečen)	77
4.6.1	Odhad chyby Newtonovy metody	78
4.6.2	Konvergence Newtonovy metody	79
4.6.3	Náhrada derivace numerickým odhadem	79
4.7	Rychlost konvergence (řád metody)	80
4.7.1	Řád Newtonovy metody	82
4.7.2	Řád metody regula falsi	82
4.8	Kombinace startovacích a zpřesňujících metod	84
4.9	Metoda prosté iterace (MPI)	85
4.9.1	Kontraktivní funkce	86
4.9.2	Věta o pevném bodě	86
4.9.3	Optimalizace MPI	86
4.9.4	Řád metody prosté iterace	87
4.9.5	Kritéria pro výběr metody řešení rovnic	88
4.10	Podobné úlohy	88
4.10.1	Hledání násobných kořenů	88
4.10.2	Řešení algebraických rovnic neboli hledání kořenů polynomů	89
4.10.3	Řešení rovnic v komplexním oboru	89
4.10.4	Řešení soustav rovnic	89
5	NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC	91
5.1	Formulace úlohy a její obtíže	91
5.1.1	Druhy problémů	91
5.1.2	Špatná podmíněnost	91
5.1.3	Zdroje chyb	92
5.2	Přímé metody	92
5.2.1	Gaussova eliminace (GEM)	92
5.2.2	Výběr hlavního prvku	92
5.2.3	Gaussova-Jordanova redukce	93
5.2.4	LU-rozklad	93
5.2.5	Výpočet inverzní matice	94
5.2.6	Výpočet determinantu	94
5.2.7	Zpřesnění výsledků pomocí rezidua	95

5.3	Iterační metody	95
5.3.1	Normy vektorů a matic	95
5.3.2	Vlastní čísla a spektrální poloměr	99
5.3.3	Výpočet vlastních čísel	99
5.3.4	Maticové iterační metody	100
5.3.5	Jacobiova iterační metoda (JIM)	101
5.3.6	Gaussova-Seidelova iterační metoda (GSM)	101
5.3.7	Superrelaxační metoda (SOR – Successive OverRelaxation method)	102
5.4	Jaký postup volit?	103

2 NUMERICKÁ DERIVACE A RICHARDSONOVA EXTRAPOLACE

2.1 Formulace problému

Úloha: Odhadnout $f'(x)$ pomocí funkčních hodnot v konečně mnoha bodech.

Proč to nedělat?

1. Umíme symbolicky zderivovat jakýkoli výraz. ☹
2. Např. aproximace polynomem dle Weierstrassovy věty má libovolně velkou chybu derivace. ☹

Proč to dělat?

1. Symbolická derivace je programátorsky náročná. ☹
2. **Ne vždy je derivovaná funkce zadána vzorcem, máme např. jen diskrétní data.** ☹
3. Chce se to po nás.

Základní numerické odhady derivace

Z definice

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

dostaneme odhad

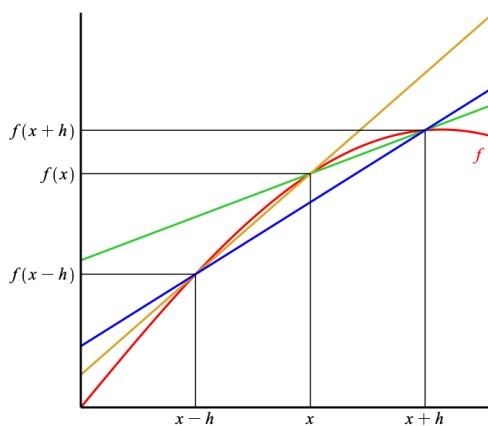
$$d_n(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Směrnici tečny nahrazujeme směrnicí sečny v bodech $(x, f(x))$ a $(x+h, f(x+h))$.

Symetrický odhad

$$d_s(x, h) = \frac{d_n(x, h) + d_n(x, -h)}{2} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

je směrnice sečny, vedené body $(x-h, f(x-h))$ a $(x+h, f(x+h))$.



$$f, d_n(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, d_n(x, -h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, d_s(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

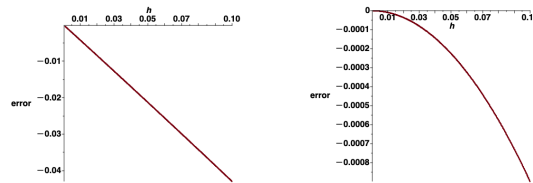
2.2 Chyba metody u numerické derivace

Taylorův rozvoj funkce f a odhadů derivace podle h v okolí 0:

$$\begin{aligned}
 f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + \dots, \\
 d_n(x, h) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= f'(x) + \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + \frac{h^3}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x) + \dots, \\
 d_n(x, -h) &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \\
 &= f'(x) - \frac{h}{2}f''(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) - \frac{h^3}{24}f^{(4)}(x) + \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x) - \dots, \\
 d_s(x, h) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\
 &= f'(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{120}f^{(5)}(x) + \dots
 \end{aligned}$$

Všimněte si, že libovolný odhad derivace dělí f krokem h , takže v jejím Taylorově rozvoji se h^p násobí $f^{(p+1)}(x)$.

2.2.1 Řád metod numerické derivace



Závislost chyby nesymetrického odhadu (\approx lineární) a symetrického (\approx kvadratická).

Obecně derivaci $f'(x)$ nahrazujeme odhadem

$$d(x, h) = f'(x) + e(h),$$

kde $e(h)$ je chyba odhadu (její závislost na x zde nevyznačujeme).

Ta bývá pro malé h přibližně úměrná nějaké jeho mocnině,

$$|e(h)| \doteq c \cdot |h|^p.$$

Zlogaritmováním získáme lineární závislost na parametrech:

$$\begin{aligned}
 \ln |e(h)| &\doteq \ln c + p \ln |h|, \\
 p &\doteq \frac{\ln |e(h)| - \ln c}{\ln |h|} \rightarrow \frac{\ln |e(h)|}{\ln |h|}
 \end{aligned}$$

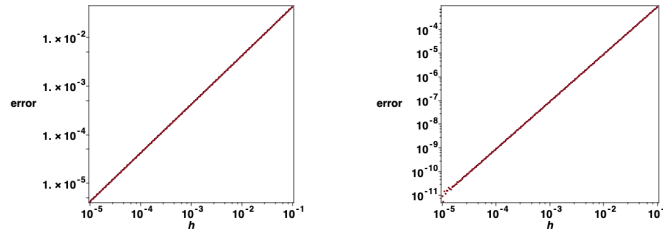
pro $h \rightarrow 0$, tj. $\ln |h| \rightarrow -\infty$.

Definujeme **řád metody** (řád odhadu $d(x, h)$) jako

$$p = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |e(h)|}{\ln |h|}$$

(pokud limita existuje).

Poznámka 2.1 V logaritmických souřadnicích má řád metody význam směrnice asymptoty v $(-\infty, \infty)$.



Závislost chyby nesymetrického odhadu (\approx lineární) a symetrického (\approx kvadratická).

Věta 2.1 *Nechť p je nejmenší číslo ≥ 1 , pro které koeficient u h^p v Taylorově rozvoje chyby odhadu $d(x, h)$ derivace $f'(x)$ může být obecně nenulový. Nechť f má v okolí bodu x spojitou derivaci řádu $p+1$. Pak p je řád metody.*

Důkaz. Z Lagrangeova tvaru zbytku Taylorova rozvoje

$$e(h) = \frac{h^p}{p!} f^{(p+1)}(\xi_h)$$

pro nějaké $\xi_h \in I(x, x+h)$.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \xi_h &= x, \\ \lim_{h \rightarrow 0} f^{(p+1)}(\xi_h) &= f^{(p+1)}(x) \in (-\infty, \infty), \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |e(h)|}{\ln |h|} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p \ln |h| - \ln p! + \ln |f^{(p+1)}(\xi_h)|}{\ln |h|} \\ &= p - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln p!}{\ln |h|} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln |f^{(p+1)}(\xi_h)|}{\ln h} = p. \end{aligned}$$

Čitatel posledního zlomku konverguje k $\ln |f^{(p+1)}(x)|$, jmenovatel k $-\infty$, celý zlomek k 0. \square
 Odhad $d_n(x, h)$ je řádu 1, $d_s(x, h)$ řádu 2.

2.3 Odhady chyb metody u numerické derivace

Pro **nesymetrický** odhad:

$$d_n(x, h) = f'(x) + \frac{h}{2} f''(\xi),$$

kde $\xi \in I(x, x+h)$, pokud f má na intervalu $I(x, x+h)$ spojitou druhou derivaci. Pak existuje M_2 takové, že

$$\forall t \in I(x, x+h) : |f''(t)| \leq M_2.$$

$$|d_n(x, h) - f'(x)| \leq \frac{M_2}{2} |h|.$$

Odhady chyb metody u numerické derivace

Pro **symetrický** odhad:

$$d_s(x, h) = f'(x) + \frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

kde $\xi \in I(x-h, x+h)$, pokud f má na intervalu $I(x-h, x+h)$ spojitou třetí derivaci. Pak existuje M_3 takové, že

$$\forall t \in I(x-h, x+h) : |f'''(t)| \leq M_3.$$

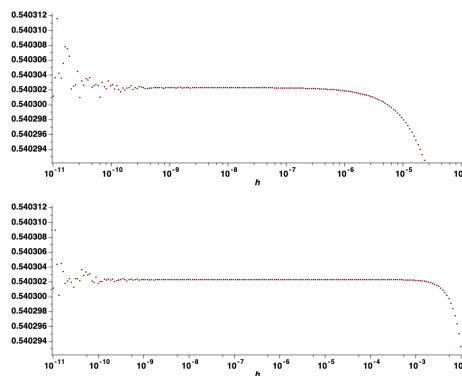
$$|d_s(x, h) - f'(x)| \leq \frac{M_3}{6} h^2.$$

2.4 Doporučená délka kroku

Typické výsledky numerické derivace

Typická závislost výsledku a chyby numerické derivace na kroku
(odhady derivace funkce sin v bodě 1, přesnější výsledek 0.5403023059):

krok	nesymetrický odhad		symetrický odhad	
	výsledek	chyba	výsledek	chyba
10^{-2}	0.5360859800	$-4.2 \cdot 10^{-3}$	0.5402933000	$-9 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	0.5398815000	$-4.2 \cdot 10^{-4}$	0.5403022000	$-1 \cdot 10^{-7}$
10^{-4}	0.5402600000	$-4.2 \cdot 10^{-5}$	0.5403020000	$-3 \cdot 10^{-7}$
10^{-5}	0.5403000000	$-2.3 \cdot 10^{-6}$	0.5403100000	$7.7 \cdot 10^{-6}$
10^{-6}	0.5403000000	$-2.3 \cdot 10^{-6}$	0.5404000000	$1 \cdot 10^{-4}$
10^{-7}	0.5400000000	$-3 \cdot 10^{-4}$	0.5400000000	$-3 \cdot 10^{-4}$
10^{-8}	0.5400000000	$-3 \cdot 10^{-4}$	0.5400000000	$-3 \cdot 10^{-4}$
10^{-9}	0.5000000000	$-4 \cdot 10^{-2}$	0.4000000000	-0.14
10^{-10}	0	-0.54	0	-0.54



Typická závislost výsledku numerické derivace na kroku
(nesymetrický a symetrický odhad derivace funkce sin v bodě 1).

Vyjdeme z odhadu chyby metody tvaru

$$\frac{M_{p+1}}{c} h^p,$$

kde p je řád metody,

M_{p+1} je odhad $|f^{(p+1)}|$,

c je konstanta pro danou metodu (nejčastěji $(p+1)!$).

Zaokrouhlovací chybu odhadneme výrazem

$$b r M_0 \frac{1}{h},$$

kde M_0 je odhad $|f|$,

r je relativní přesnost numerického výpočtu funkčních hodnot,

b je konstanta pro danou metodu (většinou řádu jednotek, určená počtem sčítanců v čitateli použitého výrazu).

Odhad celkové chyby:

$$d_{Rn}(h) = \frac{M_{p+1}}{c} h^p + b r M_0 \frac{1}{h}$$

minimum nastane pro h_{dop} :

$$e'(h_{dop}) = 0$$

$$p \frac{M_{p+1}}{c} h_{dop}^{p-1} - \frac{b r M_0}{h_{dop}^2} = 0$$

$$h_{dop} = \sqrt[p+1]{\frac{b c r M_0}{p M_{p+1}}}$$

Pro $d_n(x, h)$: $p = 1, c = 2, b = 2$,

$$h_{dop} = 2 \sqrt{\frac{r M_0}{M_2}} \quad \text{odhad chyby metody} \quad \frac{M_2}{2} h_{dop} = \sqrt{M_0 M_2 r} \sim \sqrt{r}$$

To je špatná zpráva! (Zaokrouhlovací chyba je podobná.)

Pro $d_s(x, h)$: $p = 2, c = 6, b = 1$ (v čitateli máme dva členy, ale dělíme dvěma),

$$h_{dop} = \sqrt[3]{\frac{3r M_0}{M_3}} \quad \text{odhad chyby metody} \quad \frac{M_3}{6} h_{dop}^2 = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{3}} M_0^{2/3} M_3^{1/3} r^{2/3}$$

Příklad: $r = 10^{-10}$, funkční hodnoty i hodnoty derivací zhruba stejné (jako např. u funkce $x \mapsto e^x$):

Pro odhad $d_n(x, h)$: $h_{dop} = 2 \sqrt{10^{-10}} = 2 \cdot 10^{-5}$ s odhadem relativní chyby $\frac{\sqrt{M_0 M_2}}{M_1} \sqrt{r} = \sqrt{r} = 10^{-5}$,

Pro odhad $d_s(x, h)$: $h_{dop} = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-10}} \doteq 6.7 \cdot 10^{-4}$ s odhadem relativní chyby $\frac{1}{2 \cdot 3^{1/3}} \frac{M_0^{2/3} M_3^{1/3}}{M_1} r^{2/3} = \frac{1}{2 \cdot 3^{1/3}} r^{2/3} \doteq 7.47 \cdot 10^{-8}$.

Pro funkci $x \mapsto e^{100x}$ (pouze změna měřítka na ose x) je $M_k = 100^k M_0$,

- pro odhad $d_n(x, h)$: $h_{dop} = 2 \sqrt{10^{-14}} = 2 \cdot 10^{-7}$ s odhadem relativní chyby $\sqrt{r} = 10^{-5}$,
- pro odhad $d_s(x, h)$: $h_{dop} = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-16}} \doteq 6.7 \cdot 10^{-6}$ s odhadem relativní chyby $\frac{1}{2 \cdot 3^{1/3}} r^{2/3} \doteq 7.47 \cdot 10^{-8}$.

Pro odhad derivace \ln v bodě $x = 10^{-6}$ (předchozí délky kroků nelze použít): $M_0 \doteq 14, M_1 \doteq 10^6, M_2 \doteq 10^{12}, M_3 \doteq 2 \cdot 10^{18}$,

- pro odhad $d_n(x, h)$: $h_{dop} = \sqrt{4 \cdot 14 \cdot 10^{-22}} \doteq 8 \cdot 10^{-11}$ s odhadem relativní chyby $\frac{\sqrt{14 \cdot 10^{12}}}{10^6} \sqrt{r} \doteq 3.74 \cdot 10^{-5}$,
- pro odhad $d_s(x, h)$: $h_{dop} = \sqrt[3]{3 \cdot 7 \cdot 10^{-28}} \doteq 1.3 \cdot 10^{-9}$ s odhadem relativní chyby $\frac{1}{2 \cdot 3^{1/3}} \frac{14^{2/3} \cdot (2 \cdot 10^{18})^{1/3}}{10^6} r^{2/3} \doteq 5.47 \cdot 10^{-7}$.

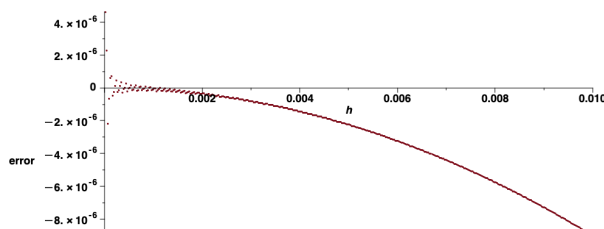
Upřesnění:

Dosud jsme uvažovali jen chybu vyhodnocení funkce f pro přesný argument, odhadnutou výrazem $r M_0$. Nepřesnost $r x$ v argumentu se projeví ve funkční hodnotě chybou přibližně $r x M_1$, která může být značná, bude-li velká (absolutní hodnota) derivace funkce f . Proto je žádoucí volit čísla $h, x, x + h$ tak, aby byla v počítači zobrazena přesně, tedy nikoli např. $h = 10^{-3}$ v binární reprezentaci.

Odvození optimální délky kroku by se mělo modifikovat podle toho, která z chyb $r M_0, r x M_1$ je větší. (Ještě lépe by bylo uvažovat obě chyby najednou, ale tím by se řešení zkomplikovalo, ani by nemuselo být jednoznačné.)

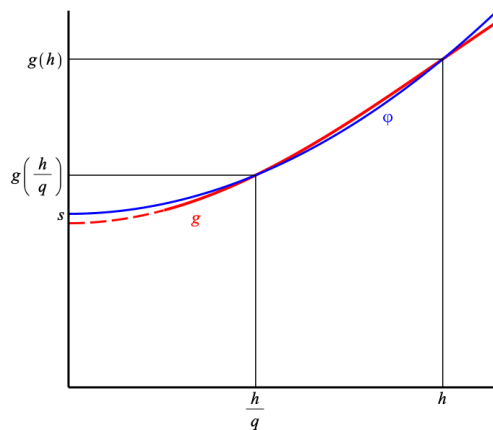
2.5 Obecný princip Richardsonovy extrapolace

Motivace:



Závislost chyby symetrického odhadu derivace (\approx kvadratická).

Princip:



Úloha: Správný výsledek nějakého výpočtu je $g(0) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h)$. Předpokládáme, že g má v okolí bodu 0 Taylorův rozvoj

$$g(h) = g(0) + \frac{h^p}{p!} g^{(p)}(0) + \frac{h^r}{r!} g^{(r)}(0) + \dots,$$

kde p (řád metody) známe a $r > p$. Z hodnot funkce g v konečně mnoha nenulových bodech máme odhadnout $g(0)$.

Zanedbáme členy řádů vyšších než p a aproximujeme g polynomem $\varphi(h) = s + ch^p$, $s, c \in \mathbb{R}$. Ke stanovení s, c zvolíme 2 uzlové body $h, h/q$, kde $q \neq 1$:

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= s + ch^p = g(h), \\ \varphi\left(\frac{h}{q}\right) &= s + c\frac{h^p}{q^p} = g\left(\frac{h}{q}\right). \end{aligned}$$

To je regulární soustava dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé s, c , z nichž nás zajímá pouze $s = \varphi(0)$:

$$\begin{aligned} (q^p - 1)s &= q^p g\left(\frac{h}{q}\right) - g(h), \\ s &= \frac{q^p g\left(\frac{h}{q}\right) - g(h)}{q^p - 1}. \end{aligned}$$

Odhad s hodnoty $g(0)$ je zatížen pouze chybami vyšších řádů než p (zde řádu r).

Často $q = 2$, pak

$$s = \frac{2^p g\left(\frac{h}{2}\right) - g(h)}{2^p - 1}.$$

2.6 Využití Richardsonovy extrapolace v numerické derivaci

Odhad $d_n(x, h)$ má chybu řádu 1; z hodnot $d_n(x, h), d_n(x, h/q)$ vypočteme odhad

$$d_{Rn}(x, h) = \frac{q d_n(x, h/q) - d_n(x, h)}{q - 1},$$

s chybou řádu 2. Pro $q = 2$:

$$d_{Rn}(x, h) = 2 d_n(x, h/2) - d_n(x, h) = \frac{-f(x+h) + 4f(x+h/2) - 3f(x)}{h}.$$

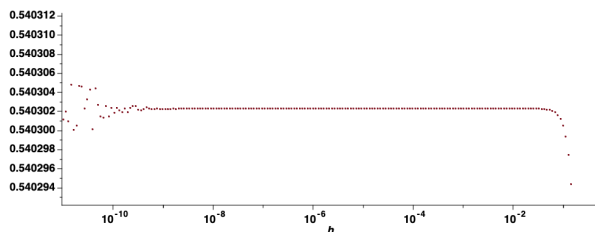
Ze symetrických odhadů $d_s(x, h), d_s(x, h/q)$:

$$d_{Rs}(x, h) = \frac{q^2 d_s(x, h/q) - d_s(x, h)}{q^2 - 1},$$

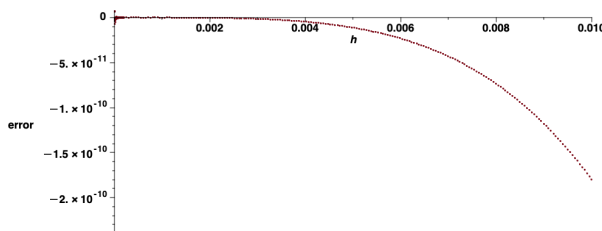
s chybou řádu 4. Pro $q = 2$:

$$d_{Rs}(x, h) = \frac{4d_s(x, h/2) - d_s(x, h)}{3} = \frac{-f(x+h) + 8f(x+h/2) - 8f(x-h/2) + f(x-h)}{6h}.$$

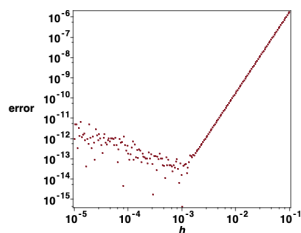
Symetrický odhad $d_s(x, h)$ lze též dostat Richardsonovou extrapolací z odhadu $d_{Rn}(x, h)$ s $q = -1$.



Výsledky symetrického vzorce zpřesněného Richardsonovou extrapolací.



Chyba (4. řádu) symetrického vzorce zpřesněného Richardsonovou extrapolací.

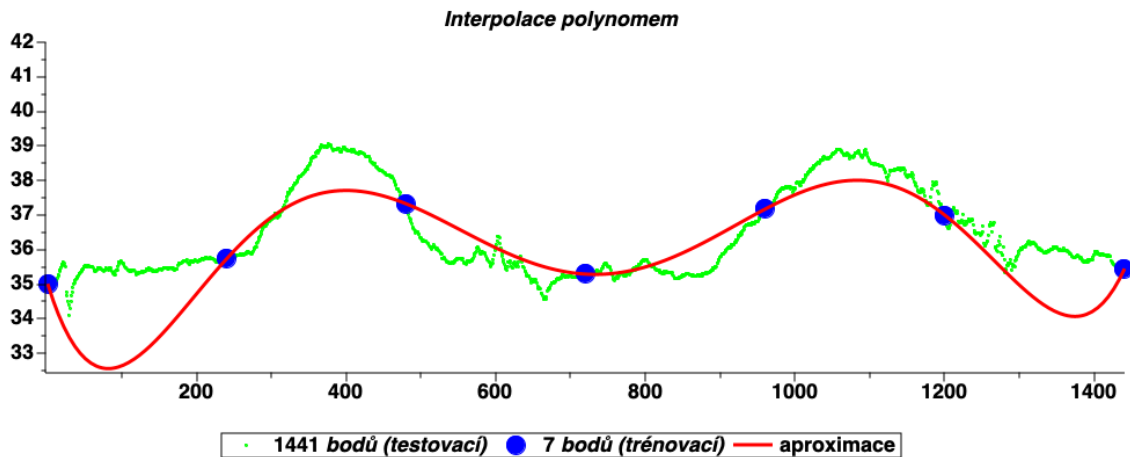


Chyba (4. řádu) symetrického vzorce zpřesněného Richardsonovou extrapolací.

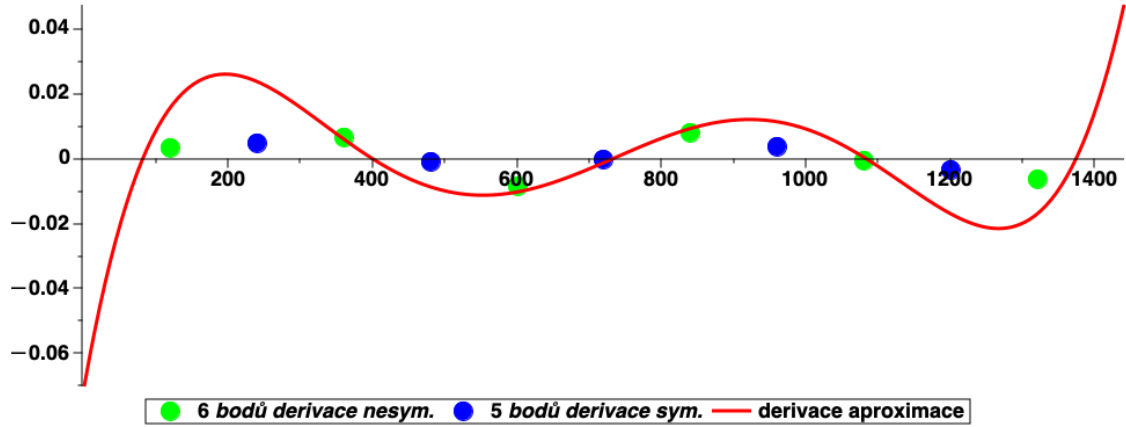
2.7 Odhad derivace z reálných dat

Vyjdeme z motivační úlohy (teplota pacienta).

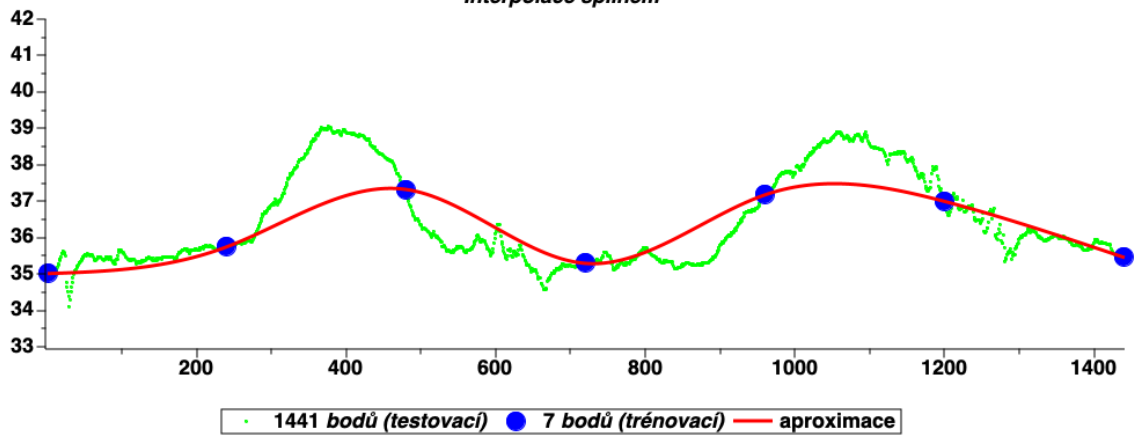
Použijeme nesymetrický i symetrický vzorec pro odhad derivace a porovnáme s derivací dříve použitých aproximací.



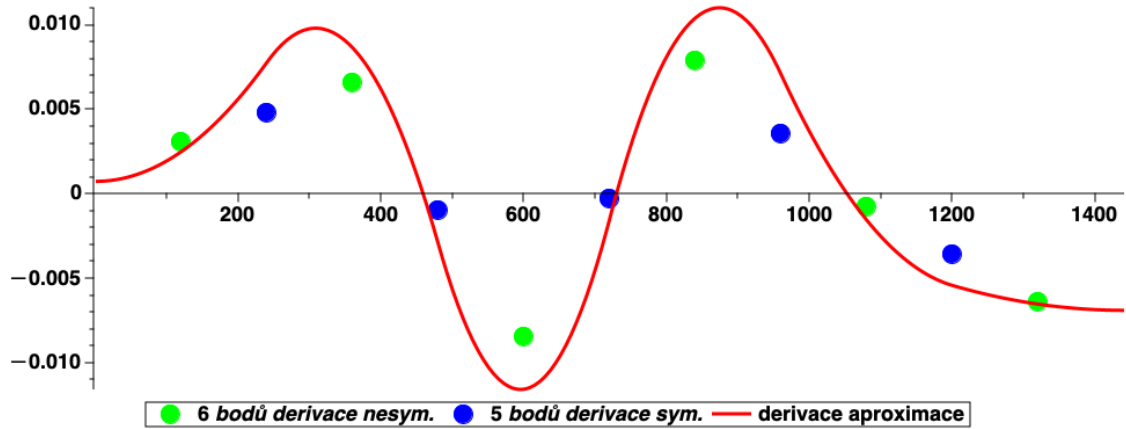
Interpolace polynomem



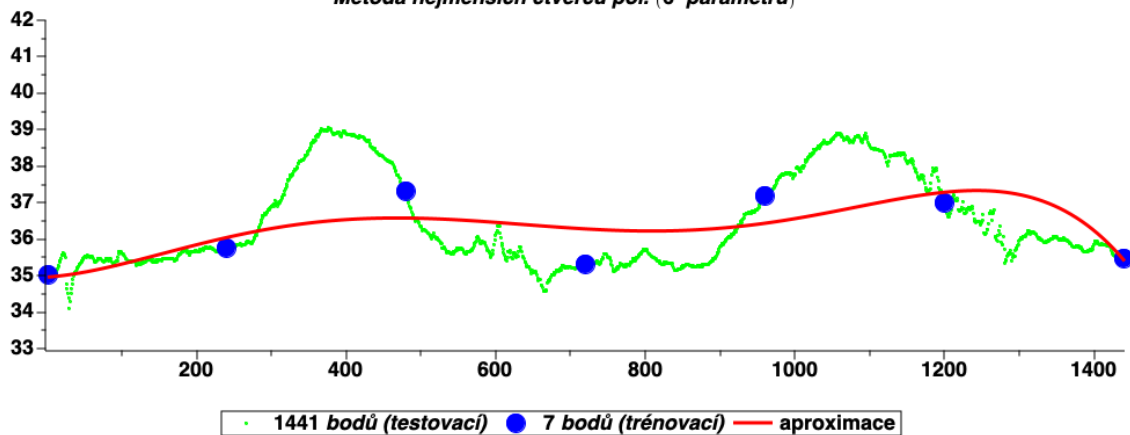
Interpolace splinem



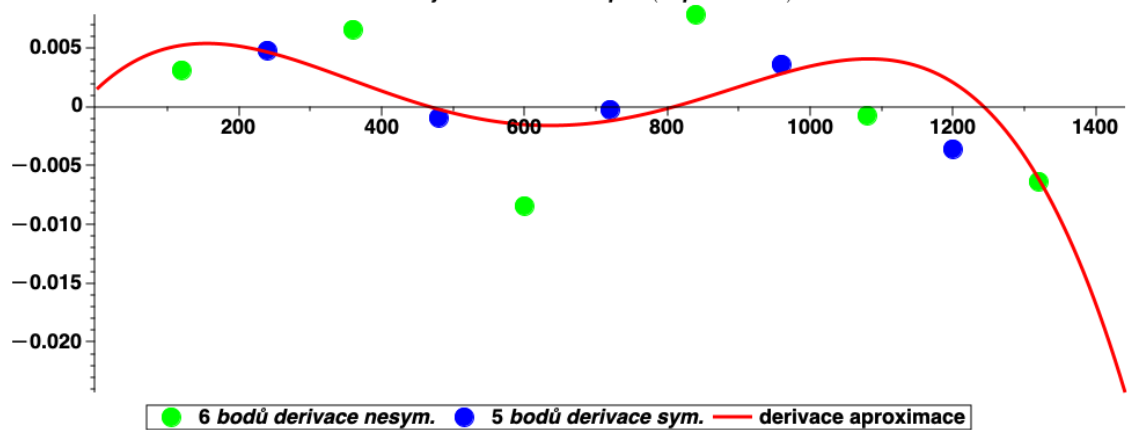
Interpolace splinem



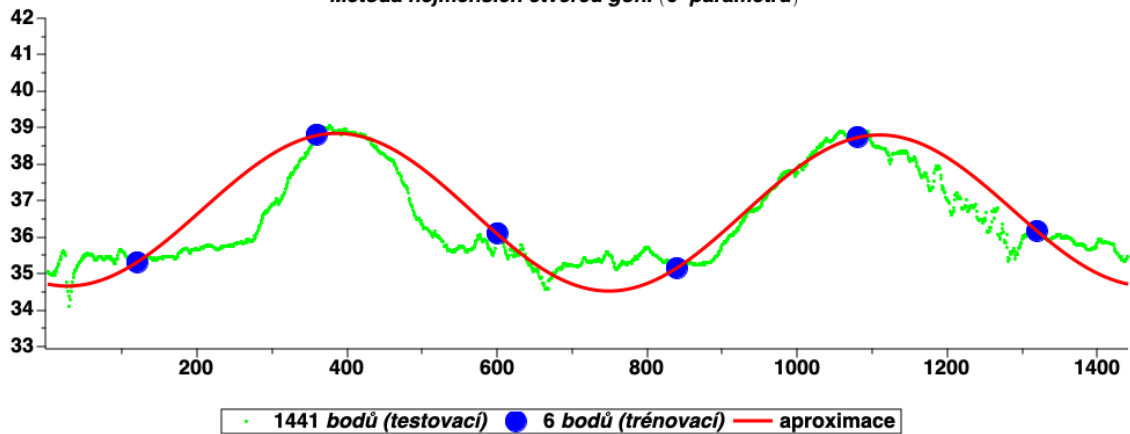
Metoda nejmenších čtverců pol. (6 parametrů)

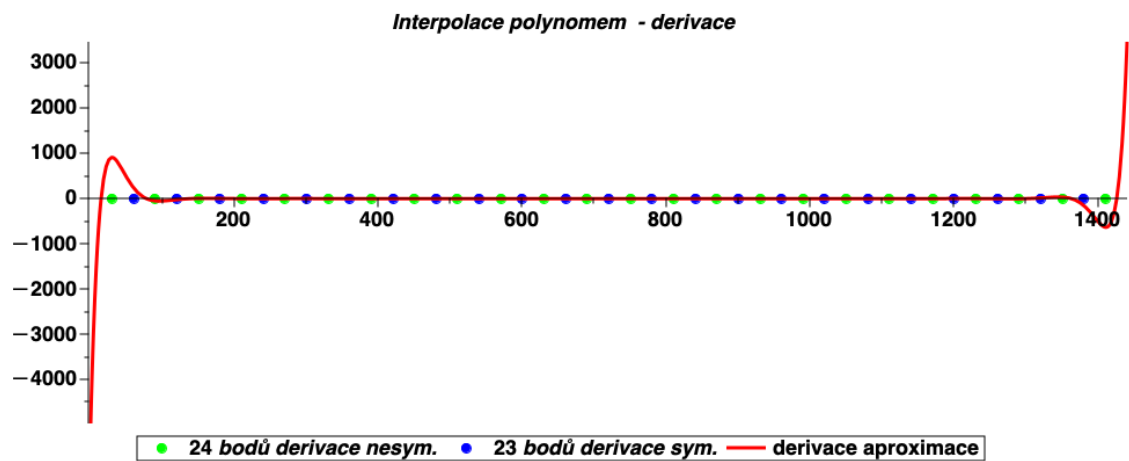
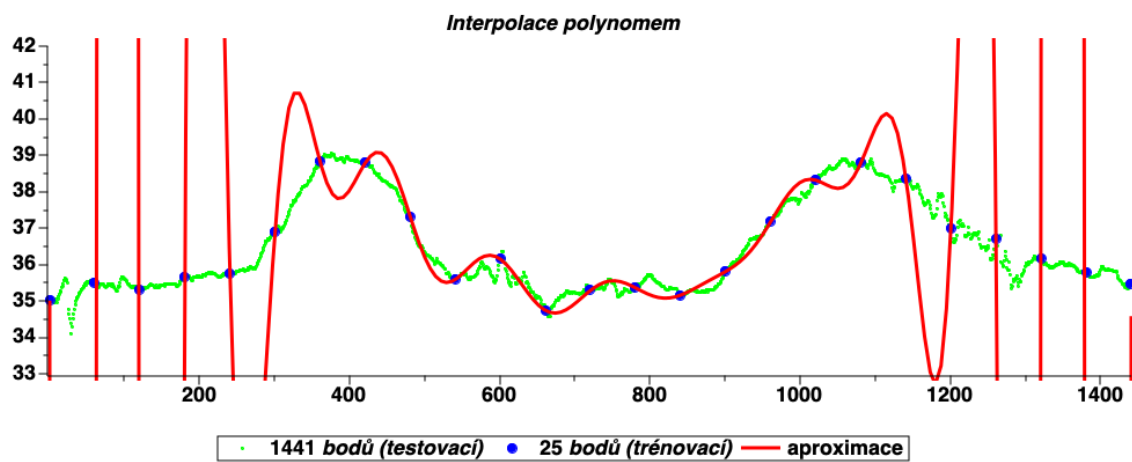
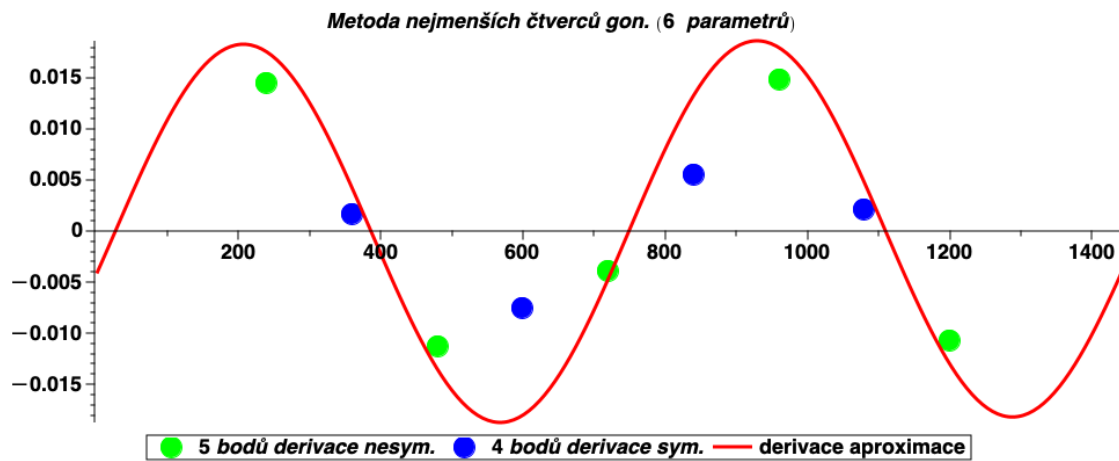


Metoda nejmenších čtverců pol. (6 parametrů)

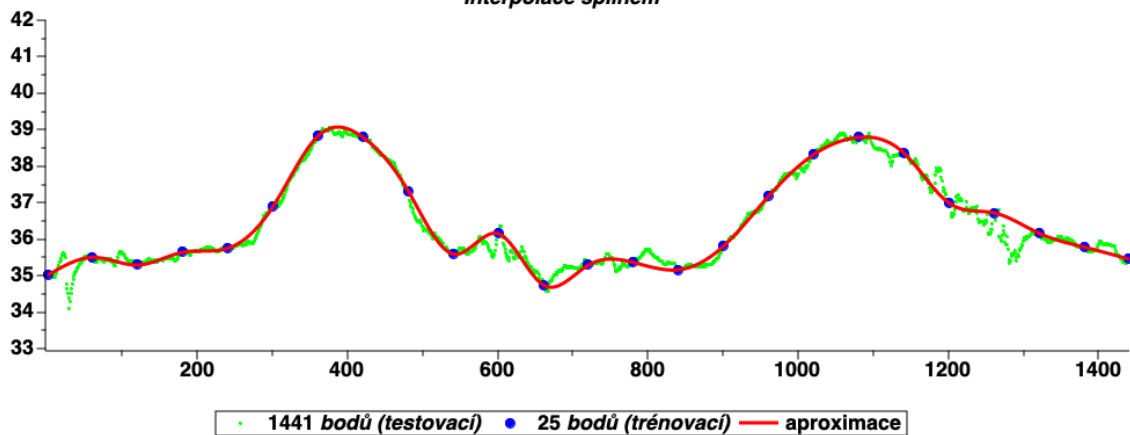


Metoda nejmenších čtverců gon. (6 parametrů)

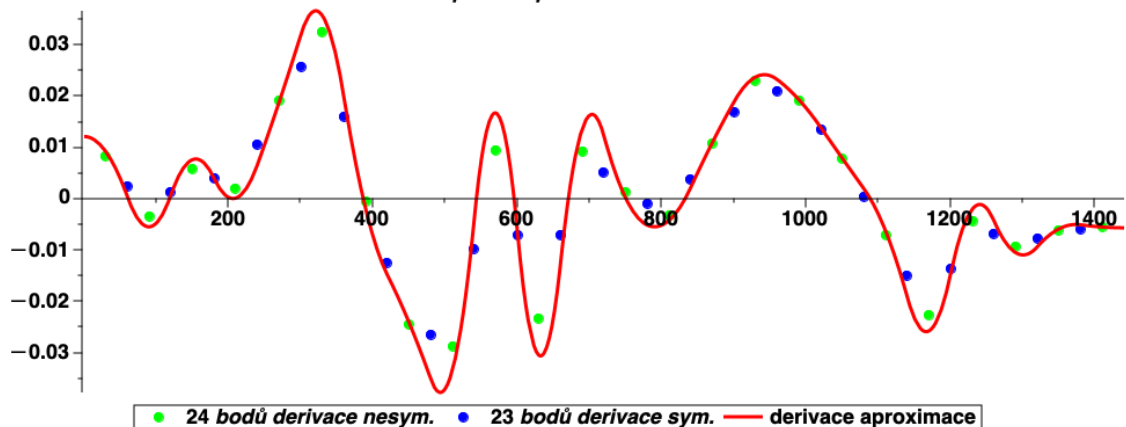




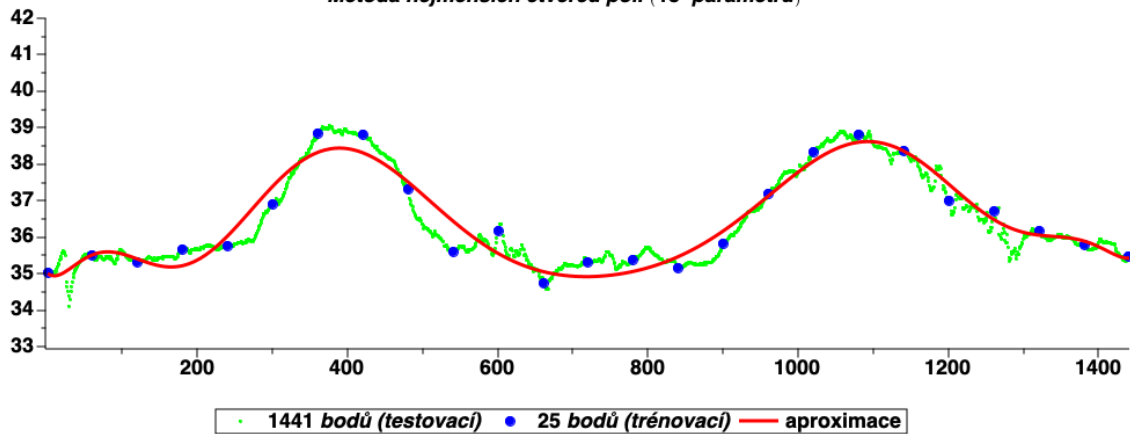
Interpolace splínem

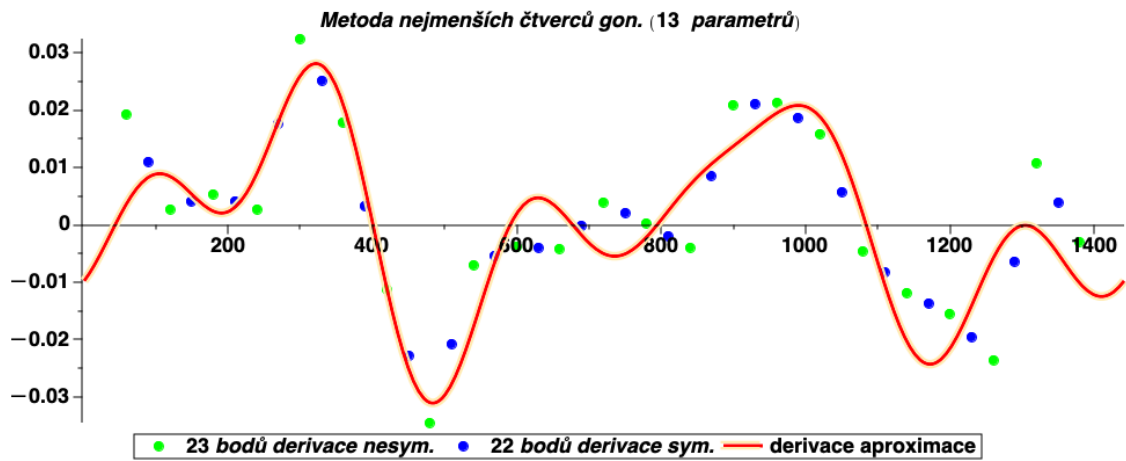
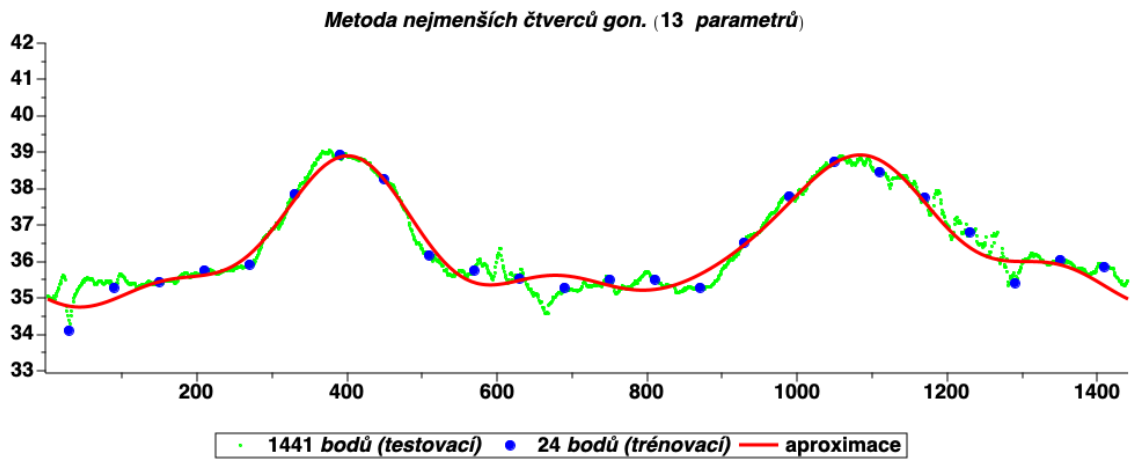
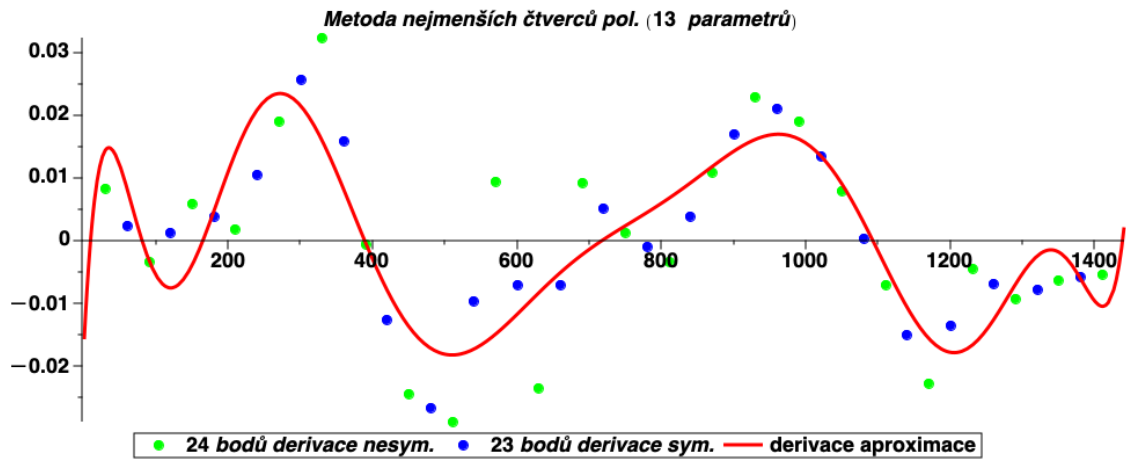


Interpolace splínem - derivace

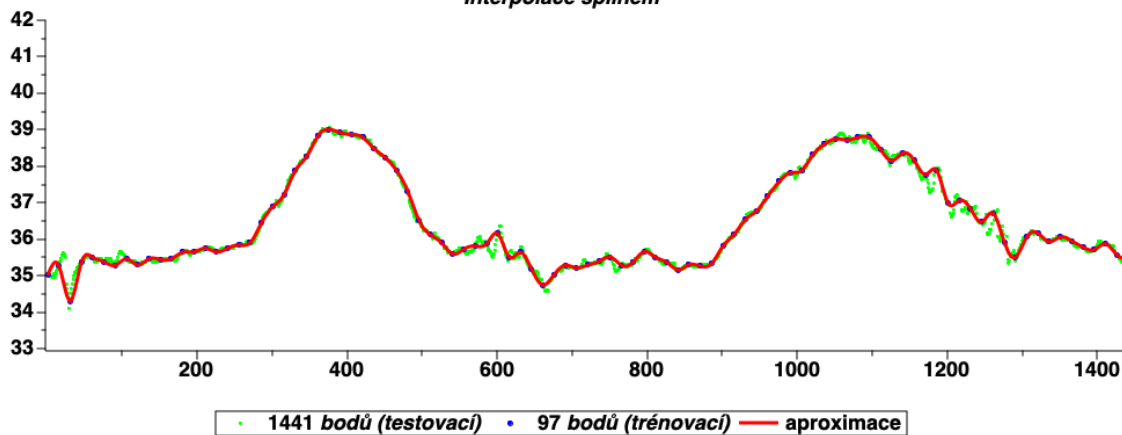


Metoda nejmenších čtverců pol. (13 parametrů)

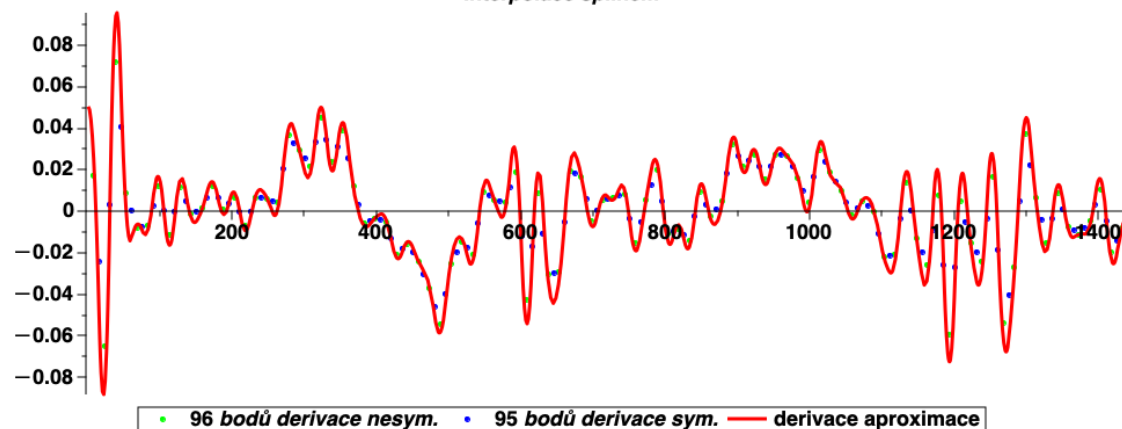




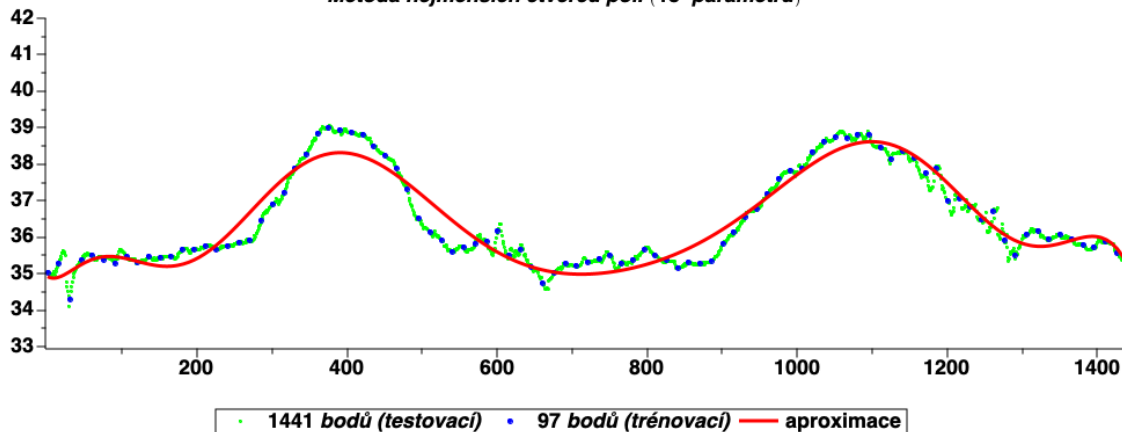
Interpolace splínem



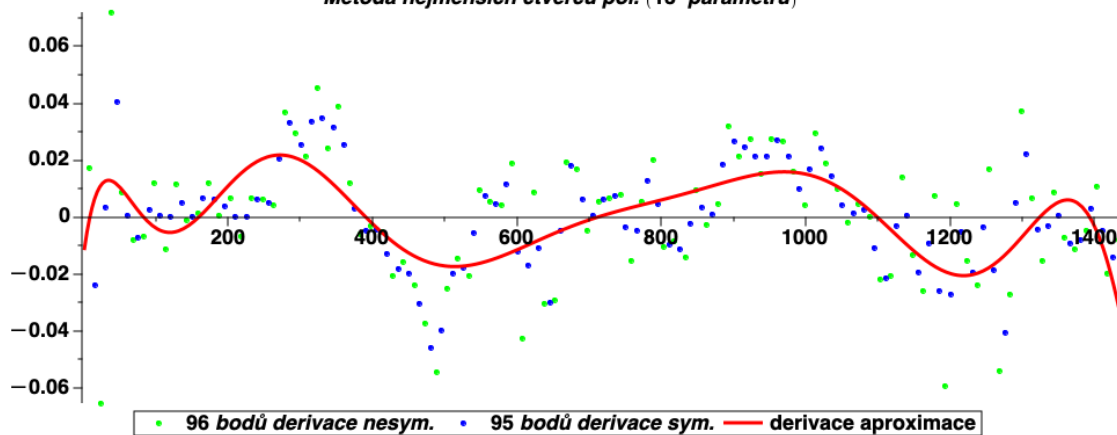
Interpolace splínem



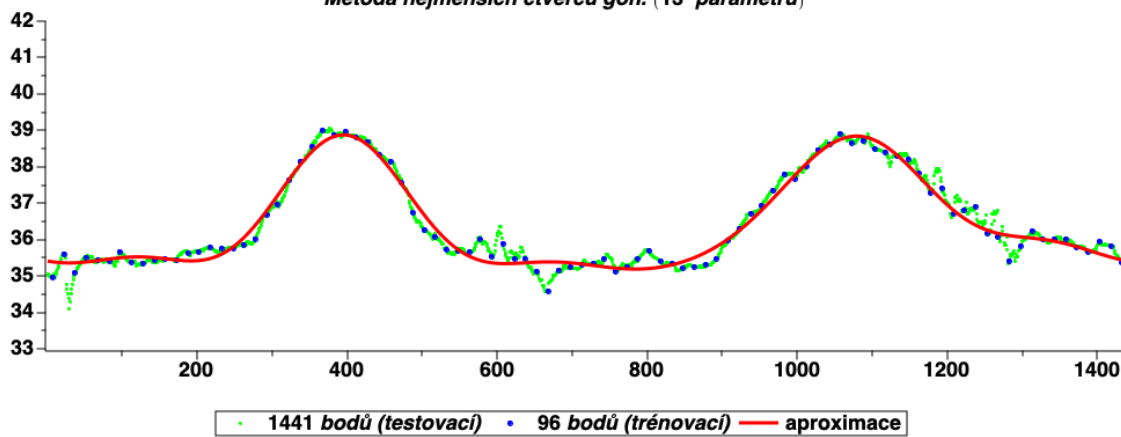
Metoda nejmenších čtverců pol. (13 parametrů)



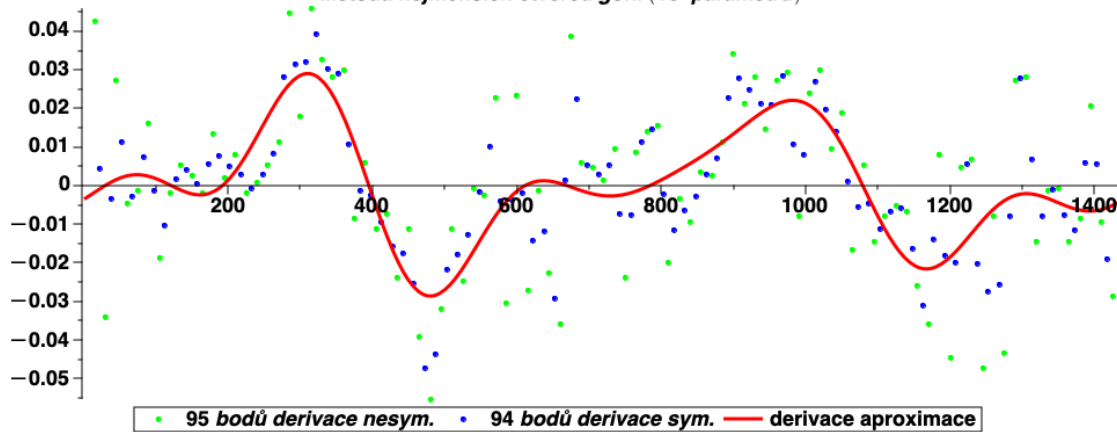
Metoda nejmenších čtverců pol. (13 parametrů)



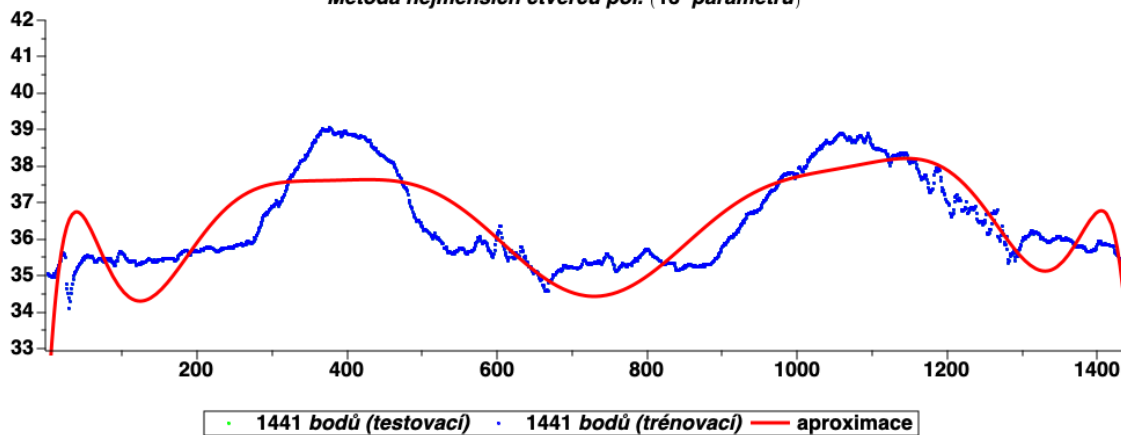
Metoda nejmenších čtverců gon. (13 parametrů)



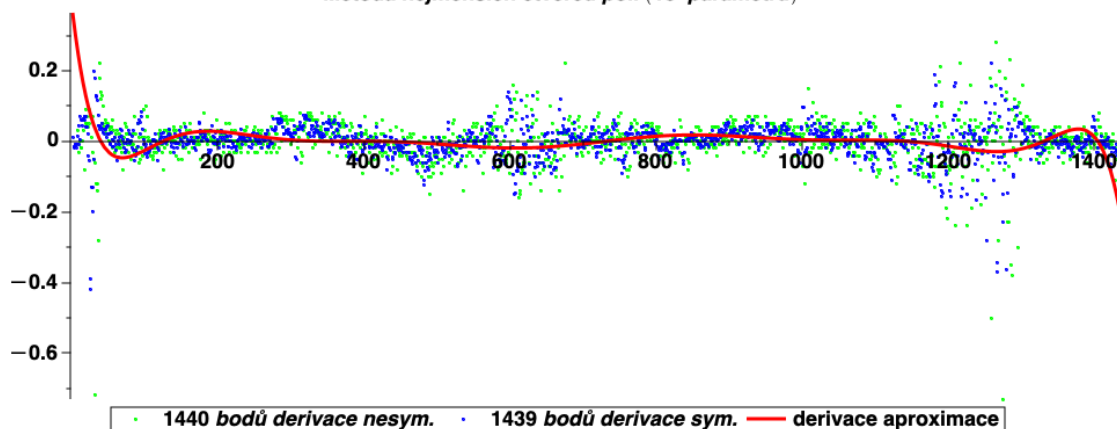
Metoda nejmenších čtverců gon. (13 parametrů)



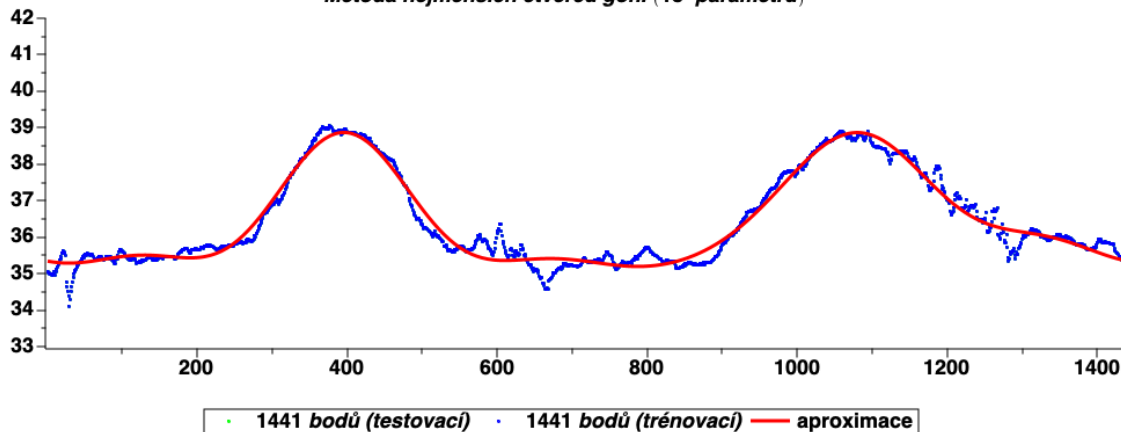
Metoda nejmenších čtverců pol. (13 parametrů)



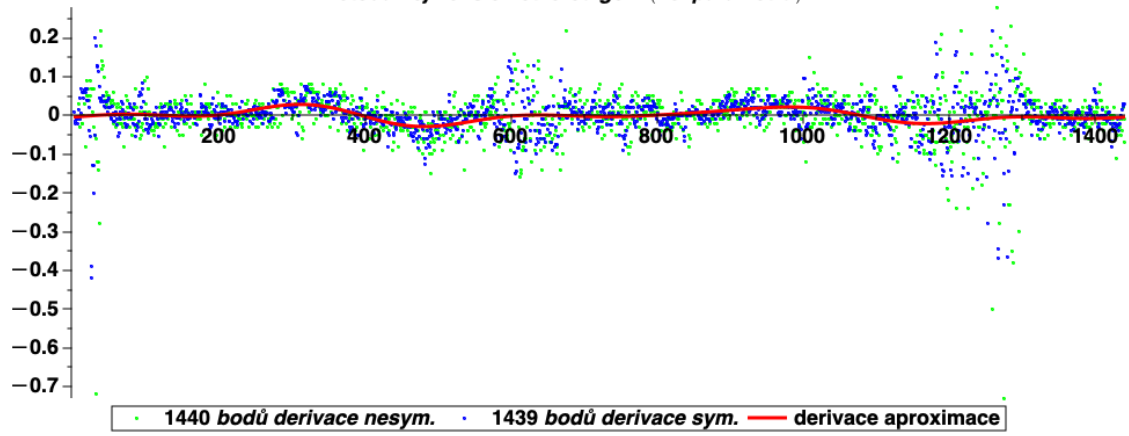
Metoda nejmenších čtverců pol. (13 parametrů)



Metoda nejmenších čtverců gon. (13 parametrů)



Metoda nejmenších čtverců gon. (13 parametrů)



Dodatek: Přehled značení

Popis je zjednodušený a nemusí být přesný, podrobnosti jsou v textu. Značení použité jen lokálně zde není uvedeno.

Značení specifické pro kapitoly 2 a 2

f ... derivovaná funkce

h ... krok při numerickém odhadu derivace

φ ... funkce aproximující závislost na kroku

$d, d_n, d_s, d_{Rn}, d_{Rs}$... numerické odhady derivace, $d(x, y) \approx f'(x)$ atd.

Značení používané podobně v celém předmětu

$I(\dots)$... nejmenší interval obsahující čísla (body) v závorce, např. $I(x_0, \dots, x_{n-1}) = \langle \min_i x_i, \max_i x_i \rangle$

M_j ... horní odhad absolutní hodnoty j -té derivace derivované funkce, $|f^{(j)}| \leq M_j$ na použitém intervalu

Literatura

- [Navara, Němeček] Navara, M., Němeček, A.: *Numerické metody*. ČVUT, Praha, dotisk 2005.
- [Knuth] Knuth, D.E.: *Fundamental Algorithms*. Vol. 1 of *The Art of Computer Programming*, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.
- [Num. Recipes] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P.: *Numerical Recipes (The Art of Scientific Computing)*. 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. <http://www.nrbook.com/a/bookcpdf.php>
- [Handbook Lin. Alg.] Hogben, L. (ed.): *Handbook of Linear Algebra*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton/London/New York, 2007.