Příjmení a jméno: _____ **Identifikační číslo ČVUT**: _____ **Podpis**: _____

Úloha	1	2	3	4	Celkem
Maximum	15	15	15	5	50
Počet bodů					

1. (15 bodů) Náhodná veličina X má hustotu tvaru $f_X(x) = \begin{cases} c\,\sqrt{x}, & 0 \le x \le 4, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$

   Určete:

   a) Parametr c a distribuční funkci F_X.

   b) Střední hodnotu $\mathrm{E}(2 - X)$.

   c) Kvantilovou funkci q_X a medián, tj. $q_X(0.5)$.

Řešení:

a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = c\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = c\left[\tfrac{2}{3}\,x^{3/2}\right]_{x=0}^{4} = c\cdot\tfrac{16}{3} \;\Rightarrow\; c = \tfrac{3}{16}\,,$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0\,, \\ \frac{1}{8}\,x^{3/2}, & 0 \le x \le 4\,, \\ 1, & x > 4\,. \end{cases}$$

b)

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \tfrac{3}{16}\,x\,\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\tfrac{3}{40}\,x^{5/2}\right]_{x=0}^{4} = \tfrac{12}{5}\,,$$

$$\mathrm{E}(2 - X) = 2 - \tfrac{12}{5} = -\tfrac{2}{5}\,.$$

c)

$$\alpha = F_X(x) = \tfrac{1}{8}\,x^{3/2} \;\Rightarrow\; q_X(\alpha) = (8\,\alpha)^{2/3} = 4\,\alpha^{2/3}, \qquad \alpha \in (0,1)\,,$$

$$0.5 = F_X(q_X(0.5)) = \tfrac{1}{8}\,(q_X(0.5))^{3/2} \;\Rightarrow\; q_X(0.5) = 4^{2/3} = 2\,\sqrt[3]{2} \doteq 2.5198\,.$$

2. (15 bodů) Knižní průvodce jistým evropským velkoměstem říká, že průměrná cena kávy espresso v kavárnách v centru města je 2 EUR. Navštívili jsme 36 náhodně vybraných kaváren a naměřili výběrový průměr cen káv espresso 2.15 EUR, výběrová směrodatná odchylka byla 0.5 EUR. Testujte na hladině $\alpha = 5\,\%$, zda můžeme považovat údaj v knižním průvodci za pravdivý, vůči alternativě, že průměrná cena kávy espresso

   a) není 2 EUR,

   b) je vyšší než 2 EUR.

Jak se změní závěry, pokud bychom testovali na hladině $\alpha' = 1$ %?

Řešení:

Označme X cenu espressa (v EUR) v náhodně vybrané kavárně.

a) Za nulovou, resp. alternativní hypotézu si zvolíme

$H_0: \ \mathrm{E}X = 2\,,$
$H_1: \ \mathrm{E}X \neq 2\,.$

Za platnosti H_0 má náhodná veličina

$$T = \frac{\overline{\boldsymbol{X}} - 2}{S}\sqrt{n}$$

rozdělení t(35). Vypočteme hodnotu T z dat, tedy

$$T = \frac{2.15 - 2}{0.5} \cdot \sqrt{36} = 1.8\,.$$

Jelikož $|T| < q_{\mathrm{t}(35)}(0.975) \doteq 2.03$, hypotézu H_0 ve prospěch H_1 **nezamítáme**.

b) Za nulovou, resp. alternativní hypotézu si nyní zvolíme

$H_0': \ \mathrm{E}X \leq 2\,,$
$H_1': \ \mathrm{E}X > 2\,.$
(Někdy se i zde uvádí nulová hypotéza ve tvaru $H_0': \ \mathrm{E}X = 2$; postup a výsledek se nemění.)

Testovou statistiku T, vypočtenou z dat, tedy $T = 1.8$, nyní porovnáme s kvantilem $q_{\mathrm{t}(35)}(0.95)$. Jelikož $T > q_{\mathrm{t}(35)}(0.95) \doteq 1.69$, hypotézu H_0' ve prospěch H_1' **zamítáme**.

Při testování na hladině $\alpha' = 1$ % porovnáváme T s kvantily $q_{\mathrm{t}(35)}(0.995) \doteq 2.72$, resp. $q_{\mathrm{t}(35)}(0.99) \doteq 2.44$. V obou případech nulovou hypotézu **nezamítáme**.

3. (15 bodů) Opakovaně házíme kostkou. Náhodná veličina X_n je maximum z prvních n hodů. Tím generujeme (neklesající) posloupnost náhodných veličin $X_1, X_2, X_3, \ldots$.

a) Popište tuto posloupnost Markovovým řetězcem a uveďte jeho matici přechodu. *(4 body)*

b) Klasifikujte stavy. *(2 body)*

c) Stav v čase t byl 2. Určete (podmíněné) rozdělení pravděpodobností stavů v čase $t+2$. *(4 body)*

d) Stav v čase t byl 2. Odhadněte stav v čase $t-2$, tj. najděte nejvěrohodnější stav v čase $t-2$. *(5 bodů)*

Řešení:

a) Máme 6 stavů, počáteční stav $p(0) = 1$,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Stav 6 je trvalý absorpční, ostatní jsou přechodné.

c) Hledané pravděpodobností tvoří druhý řádek matice $\boldsymbol{P}^2$. Místo umocňování matice stačí dvakrát vynásobit vektor $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ maticí $\boldsymbol{P}$ zprava:

$$\begin{aligned} &(0, 1, 0, 0, 0, 0) \cdot \boldsymbol{P}^2 = \\ &= (0, \tfrac{2}{6}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}) \cdot \boldsymbol{P} = \\ &= (0, \tfrac{1}{9}, \tfrac{5}{36}, \tfrac{7}{36}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{11}{36}) \doteq \\ &\doteq (0, 0.111, 0.139, 0.194, 0.25, 0.306)\,. \end{aligned}$$

d) Hledáme maximum z pravděpodobností v 2. sloupci matice

$$\boldsymbol{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{1}{12} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & \frac{11}{36} \\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{36} & \frac{1}{4} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{4} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{25}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

to nastává pro nejvěrohodnější stav 2. Opět stačilo vynásobit jen některé prvky matice.

4. (5 bodů) Kterou z následujících úloh byste řešili metodou momentů, resp. metodou maximální věrohodnosti? (Popřípadě oběma metodami nebo žádnou z nich.) Zdůvodněte.

a) Odhad rozdělení směru větru na meteorologické stanici.

b) Výběr z několika modelů chování odběratele elektřiny.

c) Odhad parametrů $t_0 \in \mathbb{R}, \gamma > 0$ Cauchyho rozdělení s hustotou

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi\,\gamma\left(1 + \left(\frac{t-t_0}{\gamma}\right)^2\right)}\,.$$

Pomůcka: Pro parametry $t_0 = 0, \gamma = 1$ vychází hustota

$$f_X(t) = \frac{1}{\pi\,(1 + t^2)}\,.$$

Řešení:

Všechny uvedené případy lze řešit pouze metodou maximální věrohodnosti; metodu momentů nelze použít z následujících důvodů:

a) Směr větru je úhel a jeho „střední hodnota“ závisí na tom, kde zvolíme počátek měření úhlu, což nedává smysl.

b) Vybíráme z konečně mnoha možností a nelze očekávat, že řešení soustavy rovnic, na kterou vede metoda momentů, se bude shodovat s jednou z nich.

c) Cauchyho rozdělení nemá střední hodnotu.