1. (15 bodů) Sportovní družstvo střelců je rozděleno do tří skupin. V první skupině jsou 3 střelci, kteří zasáhnou terč s pravděpodobností 0.8, ve druhé skupině je 5 střelců s úspěšností zásahu 0.7 a ve třetí skupině jsou 2 střelci s úspěšností zásahu 0.6. V rámci sportovního utkání se odehrály následující dvě situace:

   a) Náhodně zvolený střelec z družstva vystřelil, ale nezasáhl terč. Nemáme informaci, který střelec to byl. S jakou pravděpodobností můžeme usuzovat, že střelec pochází ze druhé skupiny?

   b) Každá ze skupin si vybere jednoho svého zástupce. Všichni tito tři střelci vystřelí najednou. S jakou pravděpodobností budou v terči právě dva zásahy?

Řešení:

a) Označme si jevy

$$A_i = \textit{vybraný střelec je z i-té skupiny}$$

pro $i = 1, 2, 3$ a

$$B = \textit{vybraný střelec zasáhne terč.}$$

Družstvo má $2 + 5 + 3 = 10$ členů. Máme $P(A_1) = \frac{3}{10} = 0.3$, $P(A_2) = 0.5$ a $P(A_3) = 0.2$ a dále $P(B|A_1) = 0.8$, $P(B|A_2) = 0.7$ a $P(B|A_3) = 0.6$.

Chceme zjistit $P(A_2|\overline{B})$. Pomocí Bayesovy věty a věty o úplné pravděpodobnosti máme

$$P(A_2|\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}|A_2) \cdot P(A_2)}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{B}|A_2) \cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(\overline{B}|A_i) \cdot P(A_i)} =$$
$$= \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.2 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.2} = \frac{0.15}{0.29} \doteq \mathbf{0.517}\,.$$

b) Označme si jevy

$$C_i = \textit{střelec z i-té skupiny se trefil}$$

pro $i = 1, 2, 3$ a

$$D = \textit{právě dva střelci se trefili.}$$

Jevy C_i jsou navzájem nezávislé a $P(C_1) = 0.8$, $P(C_2) = 0.7$ a $P(C_3) = 0.6$ Máme

$$D = \big(C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3}\big) \cup \big(C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3\big) \cup \big(\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3\big)\,.$$

Tedy

$$P(D) = P\big(C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3}\big) + P\big(C_1 \cap \overline{C_2} \cap C_3\big) + P\big(\overline{C_1} \cap C_2 \cap C_3\big) =$$
$$= P(C_1)P(C_2)P(\overline{C_3}) + P(C_1)P(\overline{C_2})P(C_3) + P(\overline{C_1})P(C_2)P(C_3) =$$
$$= 0.8 \cdot 0.7 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.6 = \mathbf{0.452}\,.$$

2. (15 bodů) Ve vstupním testu z předmětu B0B01PST bylo dosaženo následující bodové hodnocení

body	0	1	2	3	4	5
četnost	7	3	8	6	10	8

Na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ testujte hypotézu, že bodové hodnocení testu má rovnoměrné rozdělení.

Řešení:

H_0 : výsledky testu mají rovnoměrné rozdělení,
H_1 : výsledky testu nemají rovnoměrné rozdělení.

Data jsou setříděna do $k = 6$ tříd a celkový rozsah souboru je $n = 42$. K testování použijeme test dobré shody s testovou statistikou

$$T = \sum_{i=1}^{6} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} \sim \chi^2(5)\,,$$

kde $p_i = \frac{1}{6}$. Podmínka použitelnosti testu $np_i = 42/6 = 7 > 5$ je splněna, test lze použít.

body	0	1	2	3	4	5
empirická četnost	7	3	8	6	10	8
teor. četnost	7	7	7	7	7	7

Pro realizaci testovací statistiky dostaneme

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{7}\left(0^2 + (3-7)^2 + (8-7)^2 + (6-7)^2 + (10-7)^2 + (8-7)^2\right) = \\ &= \frac{1}{7}\,(0 + 16 + 1 + 1 + 9 + 1) = \frac{28}{7} = 4\,. \end{aligned}$$

Z tabulek nalezneme hodnotu kvantilu $q_{\chi^2(5)}(0.95) \doteq 11.07$. Protože je

$$t = 4 \not> q_{\chi^2(5)}(0.95) \doteq 11.07\,,$$

testovanou hypotézu H_0 **nezamítáme** ve prospěch hypotézy H_1.

3. (15 bodů) Velitel dává družstvu vojáků povely „vpravo v bok“, „vlevo v bok“, „čelem vzad“, a to náhodně, nezávisle na předchozích, přičemž povel „čelem vzad“ používá s dvakrát menší pravděpodobností než kterýkoli ze zbývajících. V čase t je družstvo orientováno na sever. Popište model pomocí Markovova řetězce a klasifikujte jeho stavy, včetně případné periody. Odhadněte stav v časech

   a) $t + 3\,,$
   b) $t - 3\,,$
   c) $t + 3000\,.$

Řešení:

Pro pořadí stavů *sever, východ, jih, západ* je matice přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Všechny stavy jsou trvalé a neperiodické, tvoří jedinou komponentu, řetězec je ergodický.

a) Pravděpodobnosti stavů lze najít např. jako příslušný (zde 1.) řádek matice

$$\boldsymbol{P}^3 = \begin{pmatrix} \frac{24}{125} & \frac{38}{125} & \frac{25}{125} & \frac{38}{125} \\ \frac{38}{125} & \frac{24}{125} & \frac{38}{125} & \frac{25}{125} \\ \frac{25}{125} & \frac{38}{125} & \frac{24}{125} & \frac{38}{125} \\ \frac{38}{125} & \frac{25}{125} & \frac{38}{125} & \frac{24}{125} \end{pmatrix}.$$

nejvěrohodnější vychází východ a západ.

b) Pravděpodobnosti stavů lze najít např. jako příslušný (zde 1.) *sloupec* matice $\boldsymbol{P}^3$; ta je ale symetrická, takže dostáváme stejný výsledek jako v předchozí otázce.

c) Zde bude rozdělení pravděpodobností stavů velmi blízké stacionárnímu. Vzhledem k symetrii je rozdělení $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ stacionární a díky ergodicitě je jediné. Všechny stavy jsou přibližně stejně věrohodné.

4. (5 bodů) Máme odhadnout průměr mince (přesně kruhového tvaru). Necháme ho odhadnout velmi mnoha lidmi a zprůměrujeme. Teoreticky takto můžeme dostat libovolně přesný odhad, například na 1 μm. Posuďte, nakolik je to možné a v čem případně může být problém.

Řešení:

Metoda vychází z předpokladu, že každý z odhadů je tvořen součtem správné hodnoty a náhodné chyby, která je všech lidí nezávislá na ostatních a má stejně rozdělení.

Lidí nemusí existovat dostatečný počet na to, abychom takovou přesnost dosáhli.

Především mohou být odhady zatíženy stálou chybou. Stačí změnit osvětlení a dosáhneme efektu jako u zrakových klamů, výsledek bude jiný. Nezávislost může být narušena tím, že lidé odhadované hodnoty zaokrouhlují, často na stejnou hodnotu, která se tím ale nestává tou správnou. Malou chybou je, že rozdělení chyby není u všech lidí stejné, někteří odhadují lépe, jiní hůře. Zásadně by však vadilo, kdyby část lidí měla náhodnou chybu s rozdělením, které nemá rozptyl; tím by se odhad pomocí výběrového průměru zcela znehodnotil.