1. (15 bodů) Náhodná veličina X má diskrétní rozdělení určené pravděpodobnostní funkcí $p_X(-1) = 0.4$, $p_X(1) = 0.6$. Náhodná veličina Y má spojité exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\mathrm{E}Y = 1$.

   a) Určete distribuční funkci F_Z náhodné veličiny $Z = \mathrm{Mix}_{0.25}(X, Y)$.

   b) Vypočtěte medián $q_Z(0.5)$ a střední hodnotu $\mathrm{E}Z$.

Řešení:

a) Distribuční funkce:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0\,, & t < -1\,, \\ 0.4\,, & -1 \le t < 1\,, \\ 1\,, & t \ge 1\,, \end{cases}$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0\,, \\ 1 - \mathrm{e}^{-t}\,, & t \ge 0\,, \end{cases}$$

$$F_Z(t) = 0.25\,F_X(t) + 0.75\,F_Y(t) = \begin{cases} 0\,, & t < -1\,, \\ 0.1\,, & -1 \le t < 0\,, \\ 0.1 + 0.75\,(1 - \mathrm{e}^{-t})\,, & 0 \le t < 1\,, \\ 0.25 + 0.75\,(1 - \mathrm{e}^{-t})\,, & t \ge 1\,. \end{cases}$$

b) Jelikož

$$F_Z(0) = 0.1 < 0.5\,,$$
$$F_Z(1-) = P(Z < 1) = 0.1 + 0.75\,(1 - \mathrm{e}^{-1}) = 0.85 - 0.75\,\mathrm{e}^{-1} \doteq 0.574 > 0.5\,,$$

je medián $t_{1/2}$ v intervalu $(0, 1)$ a platí pro něj

$$0.5 = F_Z(t_{1/2}) = 0.1 + 0.75\,(1 - \mathrm{e}^{-t_{1/2}}) = 0.85 - 0.75\,\mathrm{e}^{-t_{1/2}}\,,$$
$$t_{1/2} = -\ln\left(\frac{0.35}{0.75}\right) = \ln\left(\frac{15}{7}\right) \doteq \mathbf{0.762}\,.$$

$$\mathrm{E}X = 0.4 \cdot (-1) + 0.6 \cdot 1 = 0.2\,,$$
$$\mathrm{E}Z = 0.25 \cdot \mathrm{E}X + 0.75 \cdot \mathrm{E}Y = 0.25 \cdot 0.2 + 0.75 \cdot 1 = \mathbf{0.8}\,.$$

2. (15 bodů) Za předpokladu, že soubor

$$\boldsymbol{x} = (2.5,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 6,\quad 7.8,\quad 10.7,\quad 12)$$

je realizací náhodného výběru z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, testujte na hladině významnosti $\alpha = 5\ \%$ hypotézu, že rozptyl σ^2 je nejvýše 20.

Řešení:

Nulová hypotéza: $H_0\colon \sigma^2 \leq 20\,,$
Alternativní hypotéza: $H_1\colon \sigma^2 > 20\,.$
Rozsah výběru je $n = 8$, realizace výběrového průměru

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{8}\,(2.5 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7.8 + 10.7 + 12) = \frac{48}{8} = 6\,,$$

realizace výběrového rozptylu

$$s_{\boldsymbol{x}}^2 = \frac{1}{7}\,(3.5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 0^2 + 1.8^2 + 4.7^2 + 6^2) = \frac{102.58}{7} \doteq 14.65\,.$$

Realizaci testové statistiky

$$\frac{(n-1)\,s_{\boldsymbol{x}}^2}{\sigma_0^2} \doteq \frac{7 \cdot 14.65}{20} \doteq 5.13$$

porovnáme s kvantilem $q_{\chi^2(7)}(0.95) \doteq 14.07$ a nulovou hypotézu **nezamítáme**.

3. (15 bodů) Alice a Bob opakovaně házejí jednou kostkou. Hra končí výhrou Boba, pokud padne šestka, výhrou Alice, pokud padne liché číslo po sudém, jinak se hází dál. Jaké šance na výhru hráči mají?

Řešení:

Označme absorpční stavy:
1 ... vyhrál Bob,
2 ... vyhrála Alice.
Pokud v žádném z nich nejsme, rozlišujeme dva přechodné stavy:
3 ... poslední číslo bylo sudé různé od 6, tj. 2 nebo 4,
4 ... ještě nic nepadlo (tj. začátek) nebo poslední číslo bylo liché.
Počáteční stav má stejné vlastnosti jako stav 4 a můžeme ho s nim ztotožnit.

$$\boldsymbol{P} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/3 & 1/2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 \\ 1/6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}^{-1} = 3\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Po prvním hodu vyhrává Bob s pravděpodobností 1/6, ve zbývajících případech je v jednom z přechodných stavů, jejich pravděpodobnosti po prvním hodu jsou $(1/3, 1/2)$ a výsledky mají nepodmíněné pravděpodobnosti

$$(1/3, 1/2) \cdot \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = (1/3, 1/2)\,,$$

takže hra je spravedlivá a Bob i Alice mají pravděpodobnost výhry 1/2.

4. (5 bodů) (Geocaching) Když se podívám, kdo v poslední době našel stejnou kešku, většina z nich má na kontě víc než 1000 nalezených kešek. Co z toho můžeme usoudit? (Např. že je to klam či náhoda, že většina hledačů má na kontě víc než 1000 nalezených kešek apod.?)

Řešení:

Téměř každý, kdo našel kešku, je u ní zapsán. Ten, kdo jich našel hodně, má také hodně záznamů, proto jeho jméno (či přezdívku) budeme potkávat častěji. Kromě toho si možná záznamy víc hlídá než příležitostný hledač, který na ně třeba nedbá. (Bez této péče by se do kategorie velmi úspěšných hledačů nedostal.)