1. (5 bodů) Náhodná veličina X má spojité rozdělení určené hustotou f_X, kde

$$f_X(u) = \begin{cases} 0, & u \in (-\infty,\, 1), \\ \dfrac{2}{u^3}, & u \in \langle 1,\, \infty). \end{cases}$$

a) Určete distribuční funkci F_X a nakreslete grafy funkcí f_X a F_X.

b) Vypočtěte střední hodnotu $\mathrm{E}Y$ náhodné veličiny $Y = \sqrt{X}$.

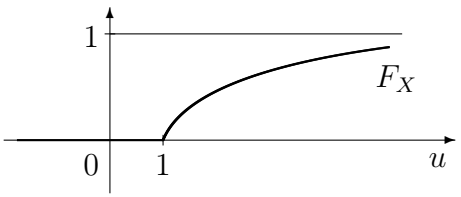
c) Vypočtěte pravděpodobnost $P(-1 \le X < 2)$.

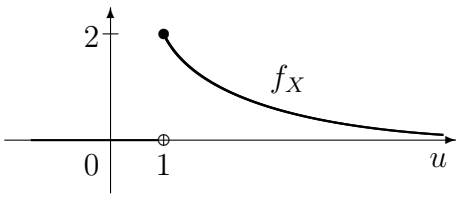
Řešení:

a) Distribuční funkci určíme pomocí vzorce $F_X(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{u} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

Je $F_X(u) = 0,\ -\infty < u < 1$, a

$$F_X(u) = \int_1^u \frac{2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{2t^2}\right]_{t=1}^{u} = 1 - \frac{1}{u^2}, \qquad 1 \le u < \infty\,.$$





b) Střední hodnotu vypočteme pomocí vzorce $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}\sqrt{X} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u}\, f_X(u)\,\mathrm{d}u$. Po dosazení dostaneme

$$\mathrm{E}Y = \mathrm{E}\sqrt{X} = \int_1^{\infty} \frac{2\sqrt{u}}{u^3}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\infty} 2u^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}u = 2\left[-\frac{2}{3}u^{-\frac{3}{2}}\right]_{u=1}^{\infty} = \frac{4}{3} \doteq 1.333.$$

c) Pravděpodobnost vypočteme podle vzorce

$$P(-1 \le X < 2) = F_X(2-) - F_X(-1-) = 1 - \frac{1}{4} - 0 = \frac{3}{4} = 0.75$$

nebo integrováním hustoty

$$P(-1 \le X < 2) = \int_{-1}^{2} f_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_1^2 \frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = 2\left[-\frac{1}{2}\,u^{-2}\right]_{u=1}^{2} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}\,.$$

2. (4 bodů) Náhodná veličina X je počet šestek při 360 hodech hrací kostkou. Vypočtěte pravděpodobnost $P(|X - \mathrm{E}X| < 10)$.

Řešení:

Náhodná veličina X má binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(360, \frac{1}{6})$, pro které je $\mathrm{E}X = np = 60$, $\mathrm{D}X = np(1-p) = 50$ a směrodatná odchylka $\sigma_X = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \doteq 7.071$. Pro zadaný počet pokusů můžeme považovat rozdělení náhodné veličiny X za normální s parametry $\mu = 60$ a $\sigma^2 = 50$.

$$\begin{aligned} P(|X - \mathrm{E}X| < 10) &= P(|X - 60| < 10) = P(50 < X < 70) = \\ &= F_X(70) - F_X(50) = \Phi\left(\frac{70-60}{5\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{50-60}{5\sqrt{2}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{10}{5\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{5\sqrt{2}}\right) = 2\,\Phi\left(\frac{10}{5\sqrt{2}}\right) - 1 = \\ &= 2\,\Phi(\sqrt{2}) - 1 \doteq 2\,\Phi(1.414) - 1 \doteq 2 \cdot 0.9213 - 1 \doteq 0.8426\,. \end{aligned}$$

3. (5 bodů) Datový soubor $x = (-4, -3, -2, -1.5, 0.5, 1, 2.5, 3)$ je posloupností realizací náhodné veličiny X, která má spojité rovnoměrné rozdělení v intervalu $\langle -h, h\rangle$. Metodou momentů určete odhad parametru h.

Řešení:

Realizace obsahuje $n = 8$ hodnot. Hledáme odhad jednoho parametru, budeme tudíž porovnávat jeden teoretický a jeden výběrový moment. Z hustoty f_X rovnoměrného rozdělení dostaneme

$$\mathrm{E}X = \frac{h-h}{2} = 0$$

nezávisle na h. Pro výpočet odhadu musíme použít momenty 2. řádu. Pro ně dostaneme

$$\mathrm{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-h}^{h} \frac{u^2}{2h}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2h}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{u=-h}^{h} = \frac{h^2}{3}\,.$$

Pro výběrový moment 2. řádu dostaneme hodnotu

$$m_2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = \frac{1}{8} \cdot 47.75 \doteq 5.97\,.$$

Porovnáním momentů dostaneme rovnici pro odhad parametru h

$$\mathrm{E}X^2 = m_2 \Rightarrow \frac{h^2}{3} = 5.97 \Rightarrow h^2 = 3 \cdot 5.97 = 17.91 \Rightarrow \widehat{h} = \sqrt{17.91} = 4.23.$$

Odhad $\widehat{h}$ musí splňovat podmínku $\widehat{h} \geq \max\{|x_i|;\ 1 \leq i \leq 8\} = 4$. Protože je $\widehat{h} = 4.23 > 4$, je získaný odhad **použitelným** odhadem parametru rozdělení.