1. (5 bodů) Náhodný vektor (X, Y) má diskrétní rozdělení určené sdruženou pravděpodobnostní funkcí $p_{X,Y}$, která je zadána tabulkou.

$y\backslash x$	-1	0	2
0	0.1	0.2	0.15
1	0.25	0.3	0

a) Vypočtěte střední hodnotu $\mathrm{E}(XY)$.

b) Vypočtěte pravděpodobnost $P(X \geq Y)$.

c) Určete marginální pravděpodobnostní funkce p_X a p_Y a rozhodněte, zda jsou náhodné veličíny X a Y závislé či nezávislé.

Řešení:

a) Střední hodnotu vypočteme pomocí vzorce

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{(x,y)} x\, y\, p_{X,Y}(x, y) = -1 \cdot 0.25 = -0.25.$$

b) Požadovanou pravděpodobnost dostaneme ze vzorce

$$P(X \geq Y) = \sum_{x,y;x\geq y} p_{X,Y}(x, y) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(2, 0) + p_{X,Y}(2, 1) = 0.2 + 0.15 + 0 = 0.35.$$

c) Marginální pravděpodobnostní funkce získáme pomocí vzorců

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y), \qquad p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$$

a hodnoty přidáme k tabulce sdružené pravděpodobnostní funkce

$y\backslash x$	-1	0	2	p_Y
0	0.1	0.2	0.15	0.45
1	0.25	0.3	0	0.55
p_X	0.35	0.5	0.15	

Náhodné veličíny X a Y jsou závislé, neboť pro nezávislost musí být splněna podmínka

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

a např. pro $x = 2$ a $y = 1$ dostaneme, že $0 \neq 0.45 \cdot 0.25$.

2. (4 bodů) Náhodná veličina X má normální rozdělení $\mathrm{N}(1, 5)$.

a) Z odhadu pravděpodobnosti pomocí Čebyševovy nerovnosti určete číslo a tak, aby $P(|X - \mathrm{E}X| < a) = 0.9$.

b) Pro získanou hodnotu a vypočtěte tuto pravděpodobnost pomocí tabulek pro distribuční funkci normálního rozdělení.

Řešení:

Pro náhodnou veličinu X je $\mathrm{E}X = 1$ a $\mathrm{D}X = 5$. Z Čebyševovy nerovnosti dostaneme odhad

$$P(|X-1| < a) \geq 1 - \frac{5}{a^2}\,.$$

Podmínka z úlohy bude splněna, pokud pro odhad pravděpodobnosti bude platit

$$1 - \frac{5}{a^2} \geq 0.9 \Rightarrow 0.1 \geq \frac{5}{a^2} \Rightarrow a^2 \geq 50 \Rightarrow a \geq \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \doteq 7.071\,.$$

b) Výpočtem dostaneme skutečnou hodnotu pravděpodobnosti

$$\begin{aligned} P(|X-1| < 5\sqrt{2}) &= P(1-5\sqrt{2} < X < 1+5\sqrt{2}) = F_X(1+5\sqrt{2}) - F_X(1-5\sqrt{2}) = \\ &= \Phi\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) - \Phi\left(-\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) = 2\,\Phi\left(\sqrt{10}\right) - 1 \doteq 2\,\Phi(3.162) - 1 \\ &\doteq 0.9984\,. \end{aligned}$$

3. (5 bodů) Z posloupnosti realizací (0.505, 0.53, 0.57, 0.625, 0.65, 0.772, 0.87, 0.95, 1.29, 2.88) náhodné veličiny X, která má hustotu dánu vzorcem

$$f_X(u) = \begin{cases} \dfrac{2a^2}{u^3}, & a < u, \\ 0, & \text{jinde}, \end{cases}$$

vypočtěte metodou momentů odhad kladného parametru a.

Řešení:

Odhad parametru a metodou momentů získáme porovnáním teoretického a výběrového momentu 1. řádu. Protože je hustota kladná pro $u > a$, musí odhad splňovat podmínky $0 < a \leq \min\{x_i : \ 1 \leq i \leq 10\}$. Vzhledem k tomu, že hodnoty realizace splňují podmínku $\min\{x_i : 1 \leq i \leq 10\} = 0.505 > 0$, může být uvedený soubor náhodným výběrem z popsaného rozdělení pro $a < 0.505$. Pomocí metody momentů dostaneme:

pro střední hodnotu

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^{\infty} \frac{2a^2}{u^2}\,\mathrm{d}u = 2a^2\left[\frac{-1}{u}\right]_{u=a}^{\infty} = 2a\,,$$

a pro 1. výběrový moment:

$$m_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{9.642}{10} = 0.9642\,.$$

Z rovnosti 1. momentů vypočteme odhad

$$\mathrm{E}X = m_1 \Rightarrow 2\,\widehat{a} = 0.9642 \Rightarrow \widehat{a} = 0.4821\,.$$

Protože vypočtený odhad splňuje uvedené podmínky

$$0 < \widehat{a} = 0.4821 \leq \min\{x_i : 1 \leq i \leq 10\} = 0.505\,,$$

je získaná hodnota $\widehat{a} = 0.4821$ použitelným odhadem parametru rozdělení.