



Robotika

Úvod do kinematiky

Vladimír Smutný

Centrum strojového vnímání

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky (CIIRC)

České vysoké učení technické v Praze

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37

Mechanika



m p

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37



Kinematika

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37

Kinematika studuje geometrii pohybu robotu a trajektorie, po kterých se pohybují jednotlivé body. Klíčový pojem je



Kinematika studuje geometrii pohybu robotu a trajektorie, po kterých se pohybují jednotlivé body. Klíčový pojem je **poloha**.

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37

Kinematika studuje geometrii pohybu robotu a trajektorie, po kterých se pohybují jednotlivé body. Klíčový pojem je **poloha**.

Statika



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37

Kinematika studuje geometrii pohybu robota a trajektorie, po kterých se pohybují jednotlivé body. Klíčový pojem je **poloha**.

Statika studuje vliv sil působících na robota v klidu a jejich vliv na jeho deformace. Klíčový pojem je



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37

Kinematika studuje geometrii pohybu robota a trajektorie, po kterých se pohybují jednotlivé body. Klíčový pojem je **poloha**.

Statika studuje vliv sil působících na robota v klidu a jejich vliv na jeho deformace. Klíčový pojem je **pružnost**.



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37

Kinematika studuje geometrii pohybu robota a trajektorie, po kterých se pohybují jednotlivé body. Klíčový pojem je **poloha**.

Statika studuje vliv sil působících na robota v klidu a jejich vliv na jeho deformace. Klíčový pojem je **pružnost**.

Dynamika



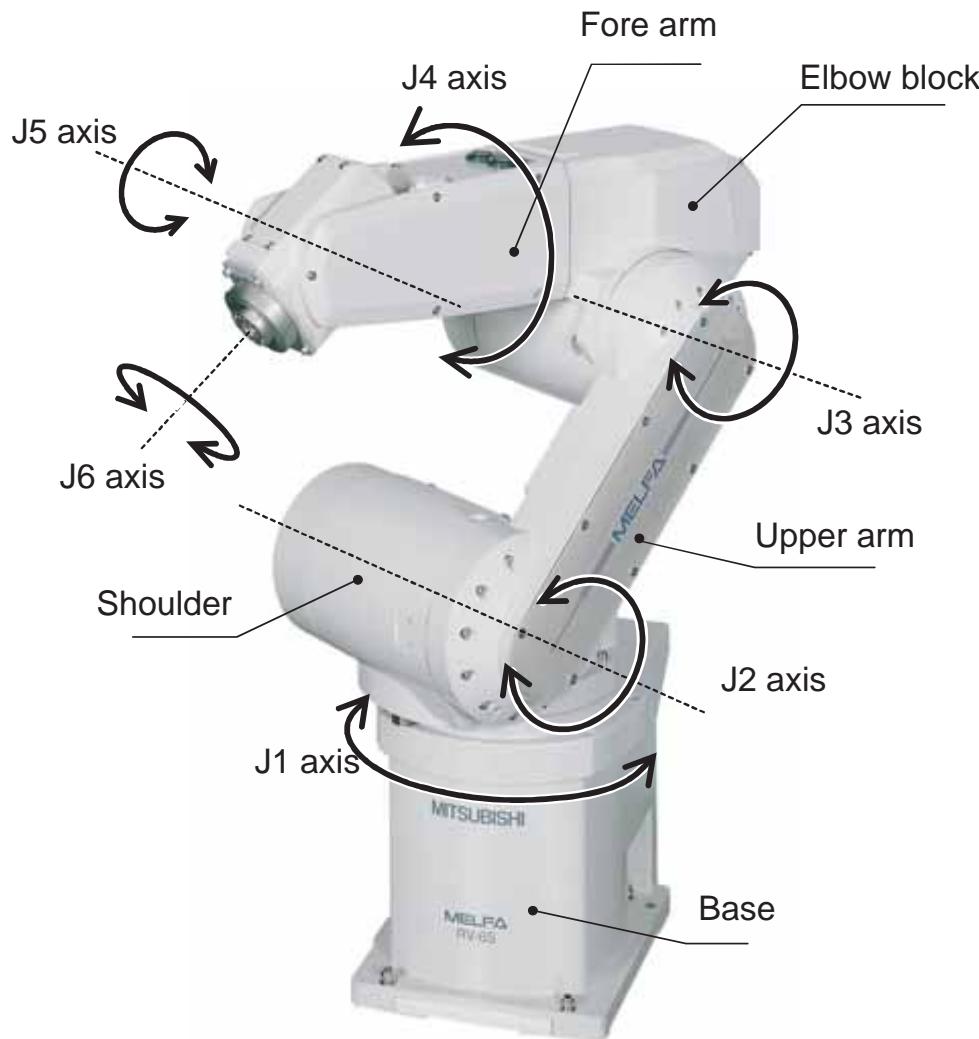
Kinematika studuje geometrii pohybu robota a trajektorie, po kterých se pohybují jednotlivé body. Klíčový pojem je **poloha**.

Statika studuje vliv sil působících na robota v klidu a jejich vliv na jeho deformace. Klíčový pojem je **pružnost**.

Dynamika analyzuje vliv sil a momentů na robota za pohybu.

Použité pojmy a zákony mohou být použity na jakémkoliv mechanické stroje.

Kinematika – Terminologie



Rameno (link) je pevná část robota.

Kloub (joint) je část robota, která umožňuje řízený nebo volný pohyb dvou ramen, které spojuje.

Chapadlo (end effector) je část manipulátoru, sloužící k uchopování nebo namontování dalších nástrojů (svařovací hlavice, stříkací hlavice,...).

Základna (rám, base) je část manipulátoru, která je pevně spojena se zemí.

Kinematická dvojice (kinematic pair) je dvojice ramen spojených kloubem.

Kinematika – Terminologie II

Kinematický řetězec je množina ramen spojených klouby. Kinematický řetězec může být reprezentován grafem. Uzly grafu představují ramena a hrany predstavují klouby.

Mechanismus je kinematický řetězec, jehož jedno rameno je připevněno k zemi.

Kinematika – Terminologie III

Otevřený kinematický řet.
je řetězec, který může být po-
psán acyklickým grafem.



Smíšený kinematický řet.,
graf obsahuje smyčku.

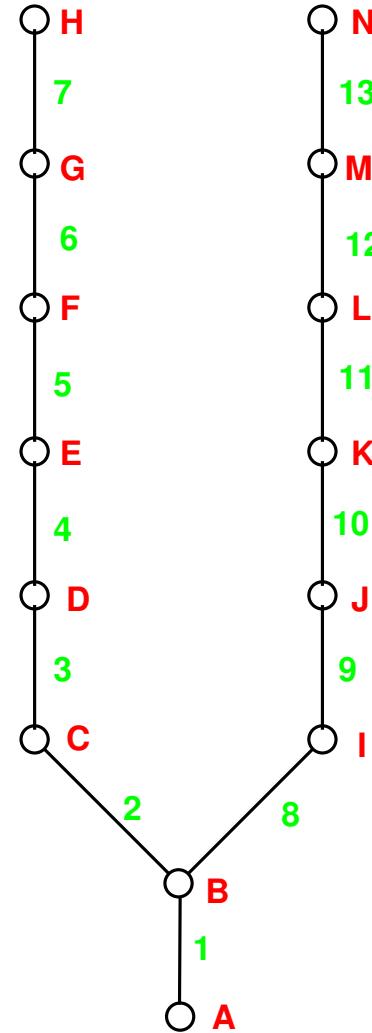


Paralelní manipulátor
obsahuje ekvivalentní
smyčky.

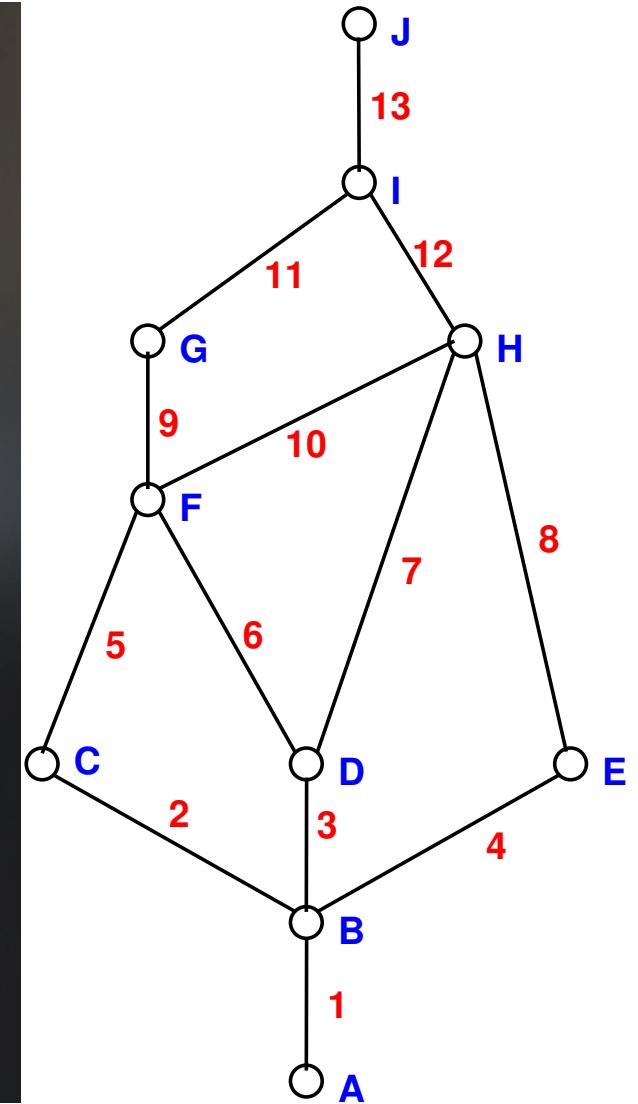


<https://www.youtube.com/watch?v=7zgKDgTIfgk>

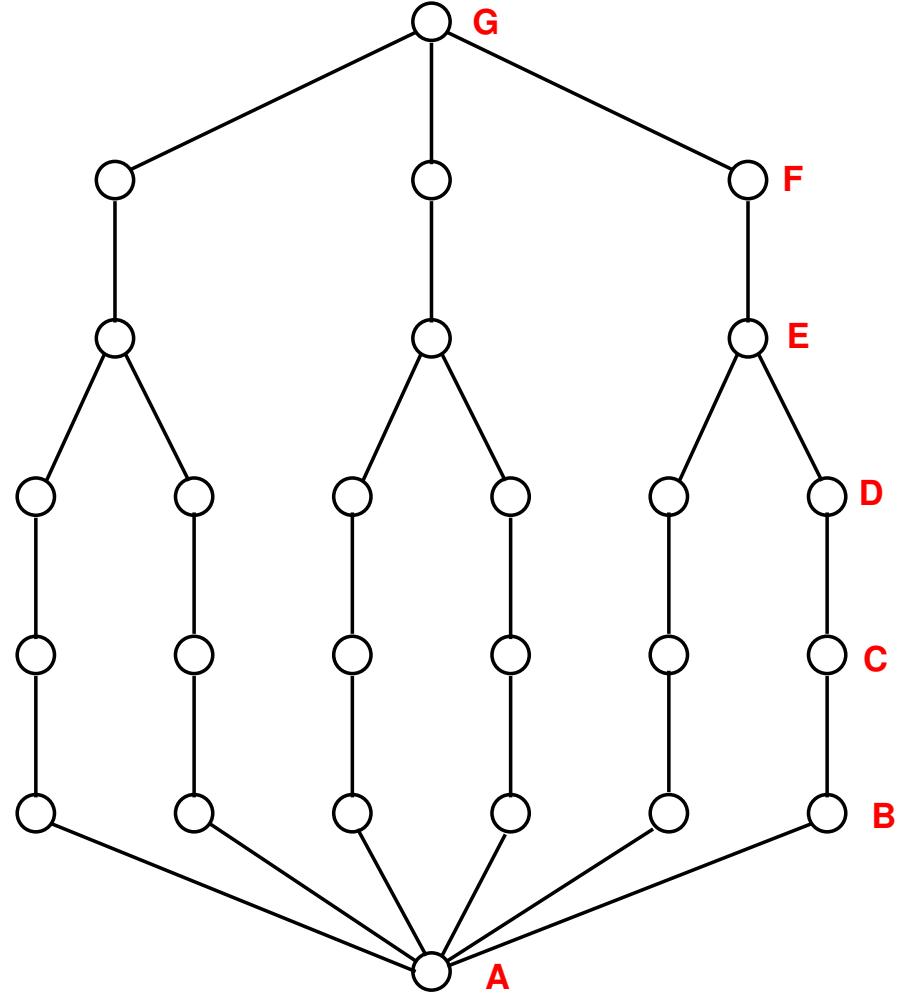
Graf robotu - Otevřený kinematický řetězec

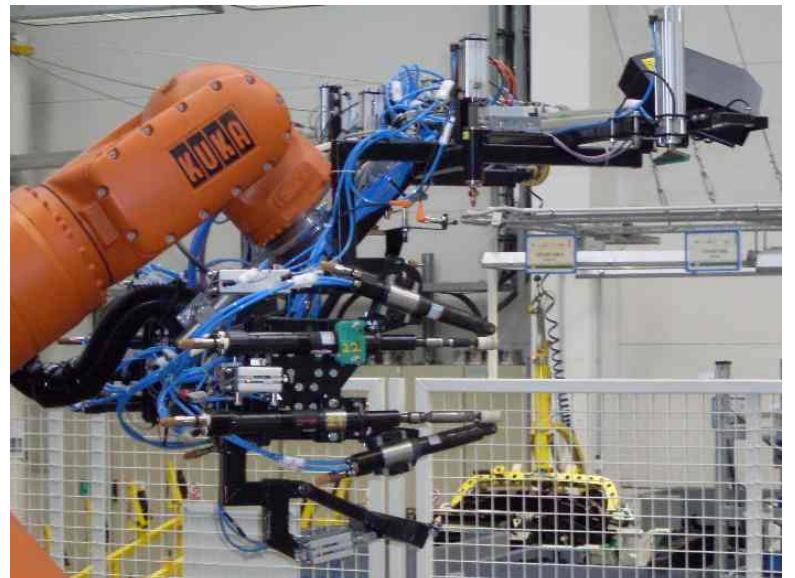


Graf robotu - Smíšený kinematický řetězec



Graf robotu – paralelní – Stewartova/Goughova plošina





1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

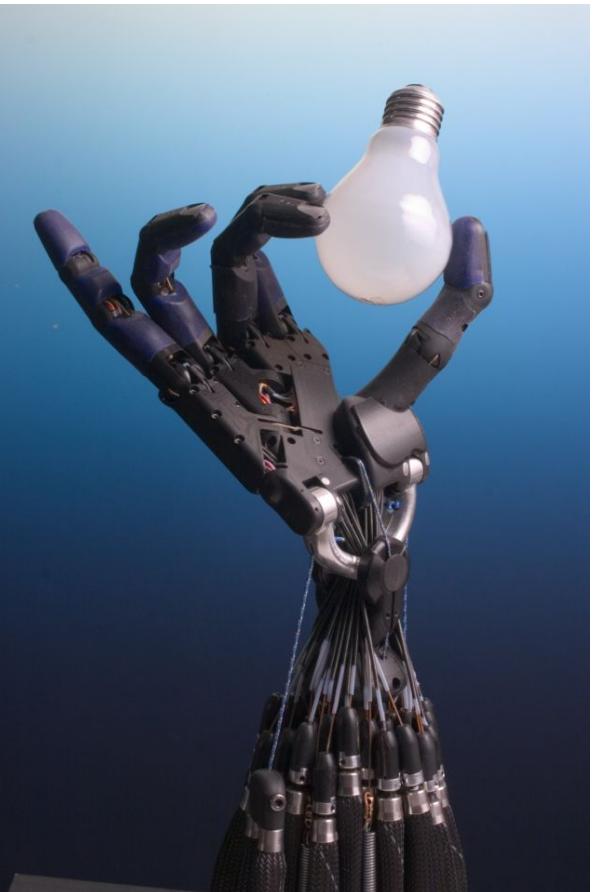
29 30

31 32

33 34

35 36

37



Versaball: <http://www.youtube.com/embed/b0uzb0LA7fY>

Schunk dexterous hand: <https://www.youtube.com/watch?v=hPtSbPzR0rs>

Schunk SDH-2: <https://www.youtube.com/watch?v=4QvShViUceM>

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v rovině má

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v rovině má 2 DOF.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v rovině má 2 DOF.

Bod v prostoru má

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v rovině má 2 DOF.

Bod v prostoru má 3 DOF.

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v rovině má 2 DOF.

Bod v prostoru má 3 DOF.

Tuhé těleso v rovině má

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v rovině má 2 DOF.

Bod v prostoru má 3 DOF.

Tuhé těleso v rovině má 3 DOF.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v rovině má 2 DOF.

Bod v prostoru má 3 DOF.

Tuhé těleso v rovině má 3 DOF.

Tuhé těleso v prostoru má

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37



Počet stupňů volnosti (intuitivní definice) je minimální počet nezávislých parametrů, které jednoznačně systém popisují.

Příklady:

Bod v rovině má 2 DOF.

Bod v prostoru má 3 DOF.

Tuhé těleso v rovině má 3 DOF.

Tuhé těleso v prostoru má 6 DOF.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	

Kinematika – Počet stupňů volnosti

Počet stupňů volnosti je důležitý pojem nejen v robotice. Zde je několik souvisejících definic:

Okolní prostor – prostor, ve kterém robot nebo mechanismus pracuje, obvykle E^2 (rovina, planární manipulátor) nebo E^3 (prostor). Je to Euklidovský prostor (nebo jeho approximace).

Operační prostor

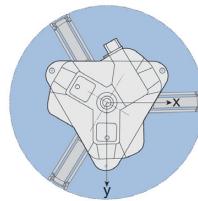
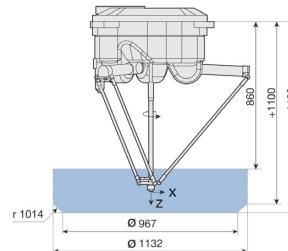
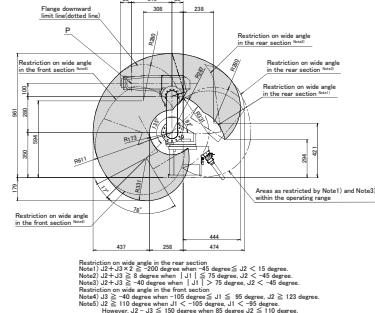
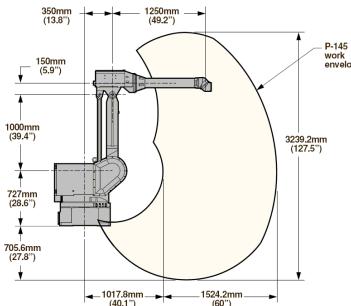
je podprostor okolního prostoru, do kterého může při pohybu robot zasáhnout některou ze svých částí.



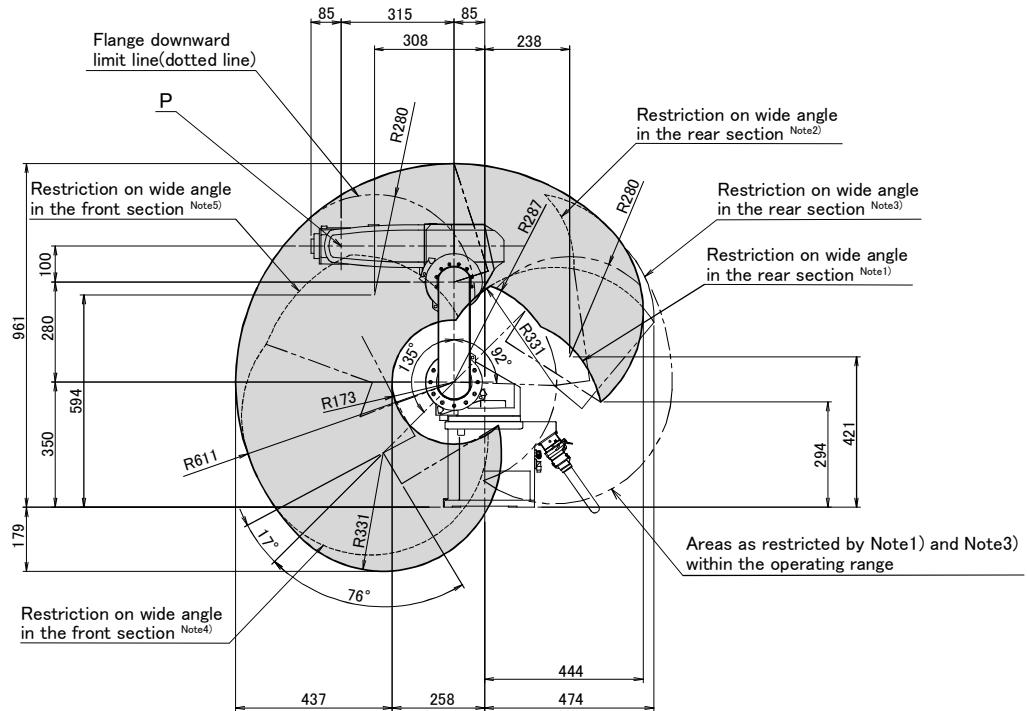
Kinematika – Počet stupňů volnosti

Pracovní obálka (pracovní prostor 3-D)

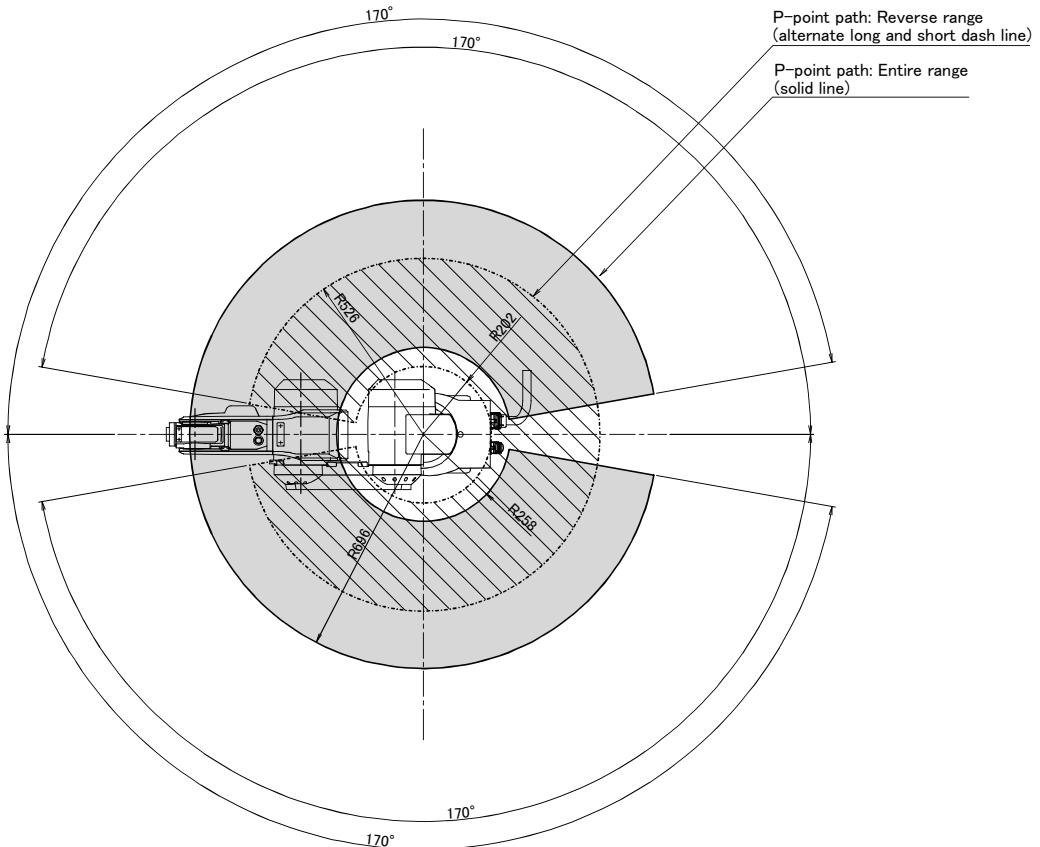
je podprostor okolního prostoru, kde kam robot může sahnout referenčním bodem chápada.



Pracovní obálka - příklad



Note1) $J_2 + J_3 \times 2 \leq -200$ degree when $-45 \leq J_2 < 15$ degree.
 Note2) $J_2 + J_3 \geq 8$ degree when $|J_1| \leq 75$ degree, $J_2 < -45$ degree.
 Note3) $J_2 + J_3 \geq -40$ degree when $|J_1| > 75$ degree, $J_2 < -45$ degree.
 Restriction on wide angle in the front section
 Note4) $J_3 \geq -40$ degree when $-105 \leq J_1 \leq 95$ degree, $J_2 \geq 123$ degree.
 Note5) $J_2 \geq 110$ degree when $J_1 < -105$ degree, $J_1 < -95$ degree.
 However, $J_2 - J_3 \leq 150$ degree when $85 \leq J_2 \leq 110$ degree.



Kinematika – Počet stupňů volnosti

Obvykle studujeme možné polohy manipulovaného objektu nebo nástroje.
Předpokládejme, že manipulovaný objekt je tuhé těleso

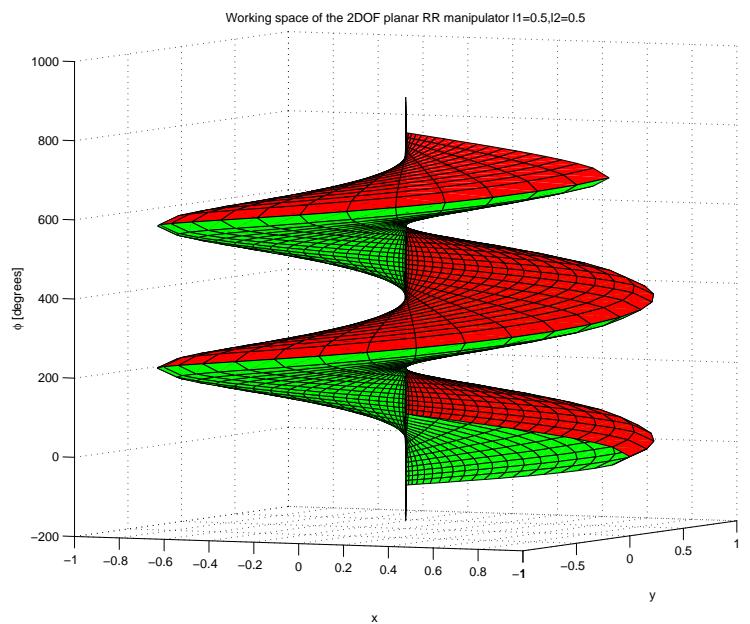
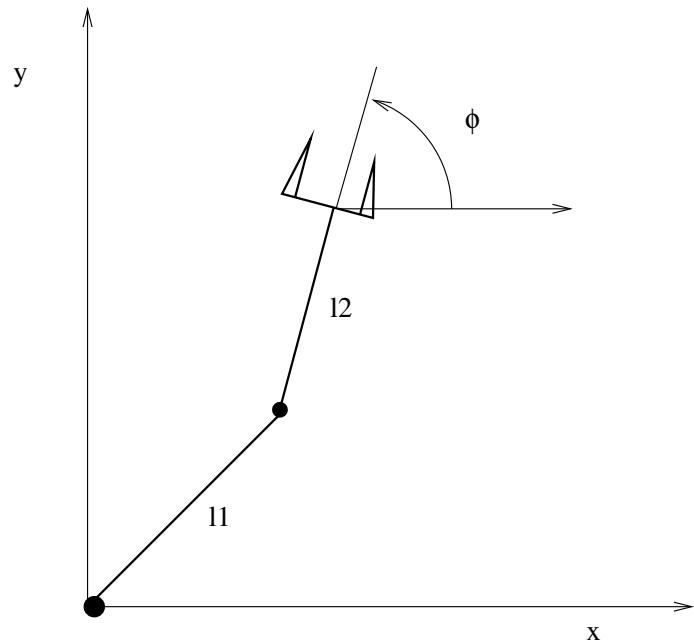
Poloha tuhého tělesa ve třírozměrném okolním prostoru může být popsána šesti parametry. Význam těchto parametrů závisí na zvolené parametrizaci, např. souřadnice zvoleného bodu (3 parametry) a orientace určená třemi úhly.

Prostor všech poloh je šestirozměrný prostor reprezentující všechny možné polohy tuhého tělesa.

Poloha chapadla může být studována v prostoru všech poloh.

Pracovní prostor je podprostor prostoru všech poloh obsahující všechny polohy, které může chapadlo zaujmout. Řešitelnost konkrétní úlohy musíme posuzovat v tomto šestirozměrném pracovním prostoru.

Počet stupňů volnosti - jednoduchý příklad



Druhy kinematických dvojic



m p

Symbol

Název

má/odnímá DOF



rotační

1 / 5



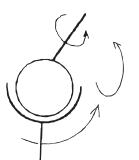
posuvná

1 / 5



válcová

2 / 4



sférická

3 / 3



plochá

3 / 3

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37



Počet stupňů volnosti – Grüblerovo (Kutzbachovo) kritérium

Počet stupňů volnosti mechanismu:

c_i počet stupňů volnosti odebraných kloubem i ,

f_i počet stupňů volnosti kloubu i ,

n počet ramen mechanismu (mechanismus má rám fixní),

j počet kloubů mechanismu (všechny jsou uvažovány binární),

λ počet stupňů volnosti tuhého tělesa v okolního prostoru,

F počet stupňů volnosti mechanismu.

$$F = \lambda(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i,$$

nebo

$$F = \lambda(n - 1) - \sum_{i=1}^j c_i.$$

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

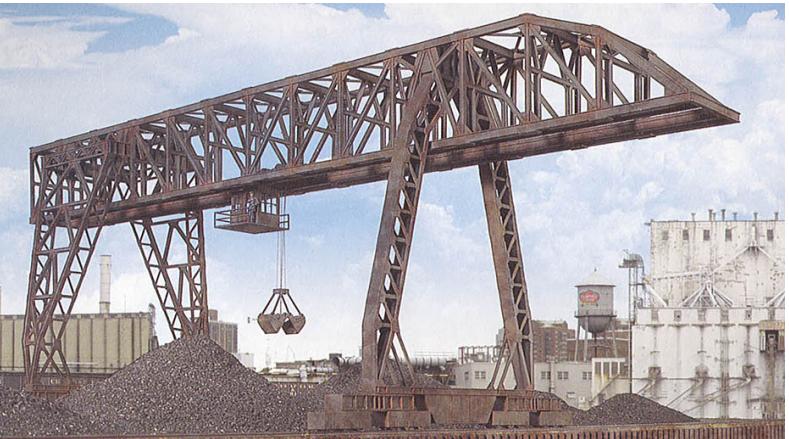
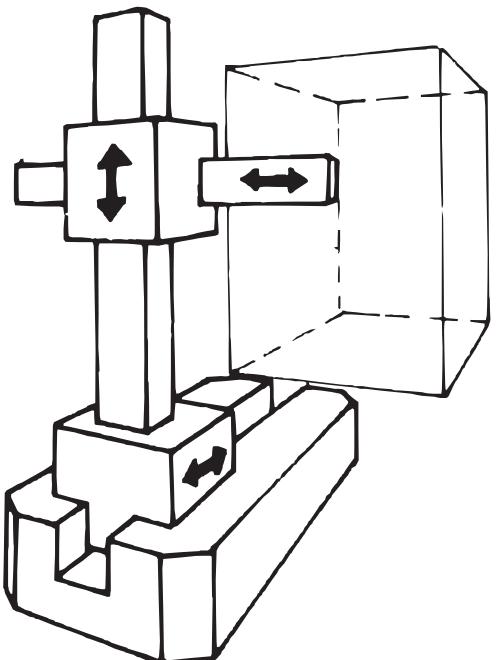
35 36

37

Typická struktura manipulátoru – Pravoúhlá (kartézská) – PPP



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

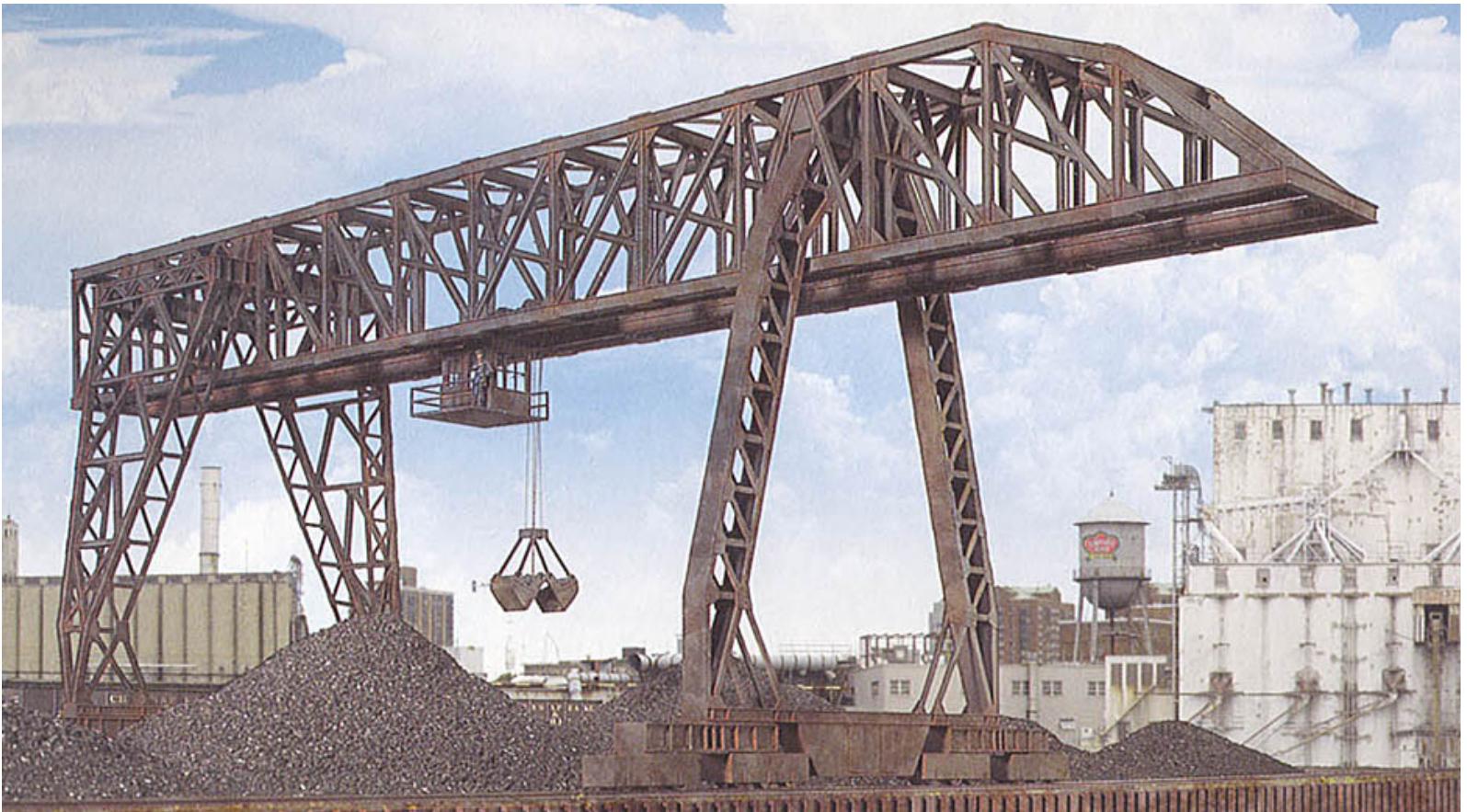
29 30

31 32

33 34

35 36

37



Kvíz: Kolik má drapák/hák stupňů volnosti? **A-3, B-4, C-5, D-Jiné číslo**

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

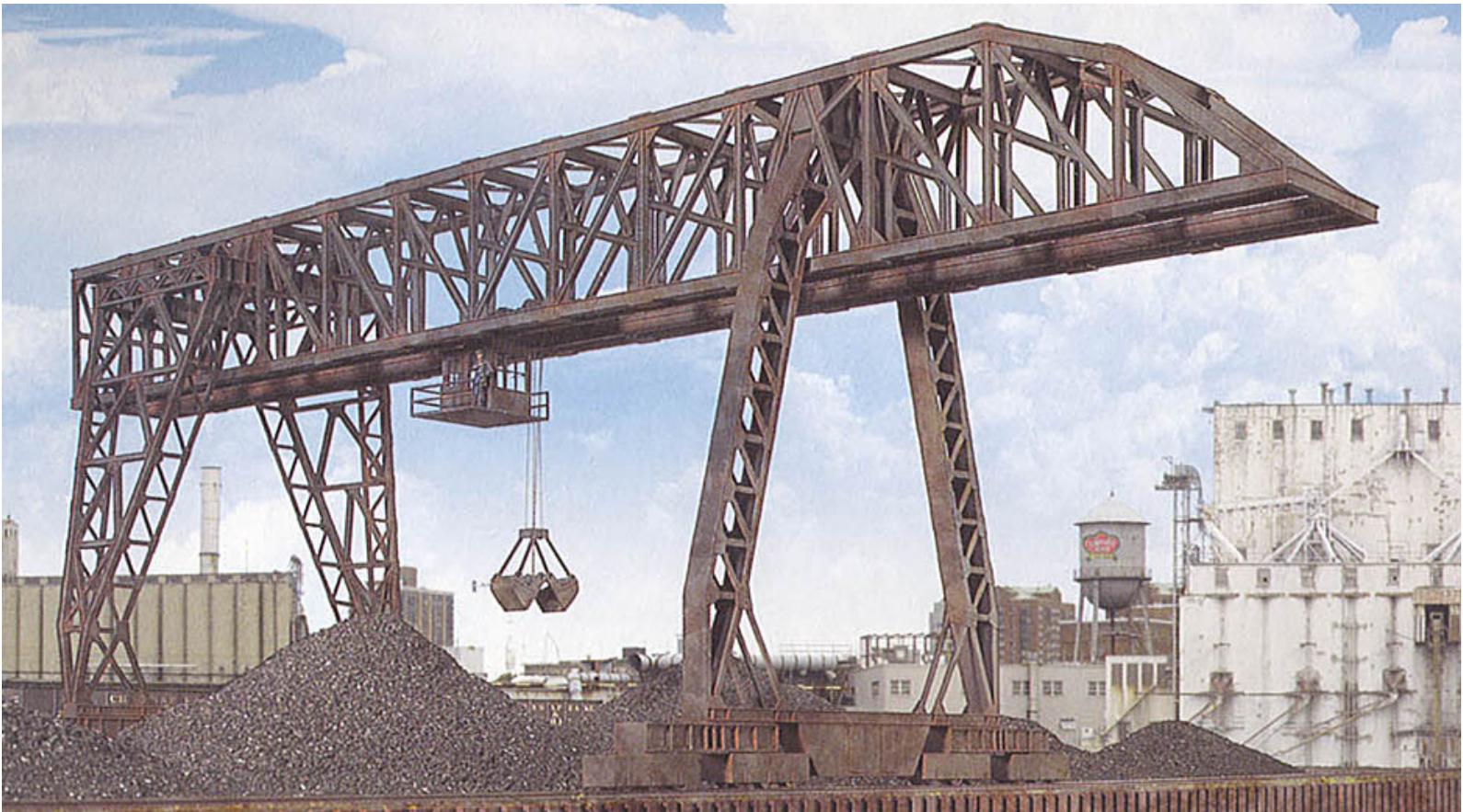
29 30

31 32

33 34

35 36

37



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

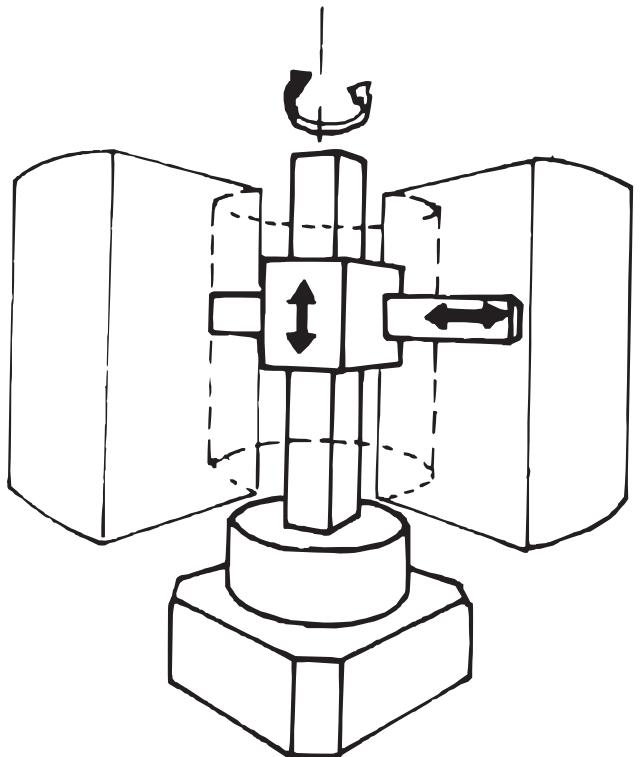
37

Kvíz: Kolik řídí bagrista/jeřábník stupňů volnosti? **A-3, B-4, C-5, D-Jiné číslo**

Typická struktura manipulátoru – Válcová (cylindrická) – RPP



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

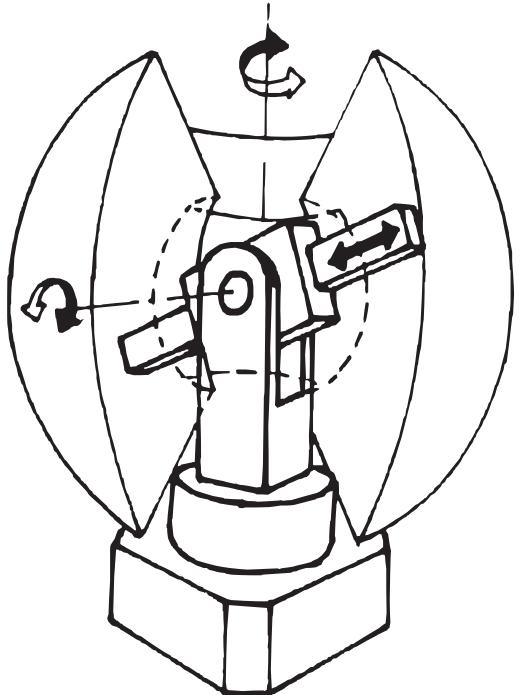
31 32

33 34

35 36

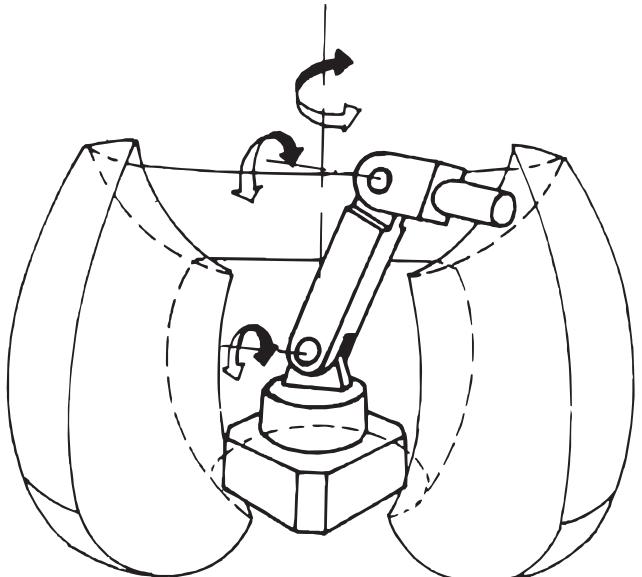
37

Typická struktura manipulátoru – Sférická – RRP



1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	

Typická struktura manipulátoru – Angulární – RRR



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

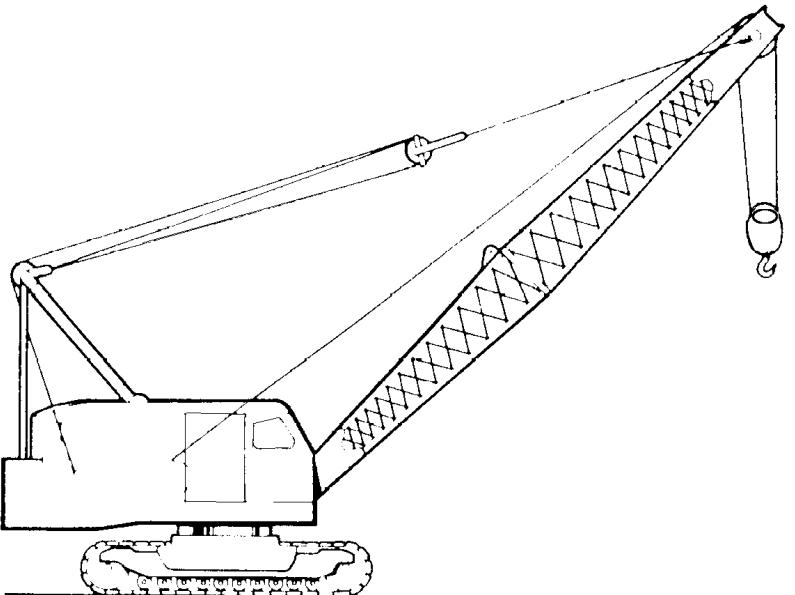
31 32

33 34

35 36

37

Typická struktura manipulátoru – jeřáb RRP



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

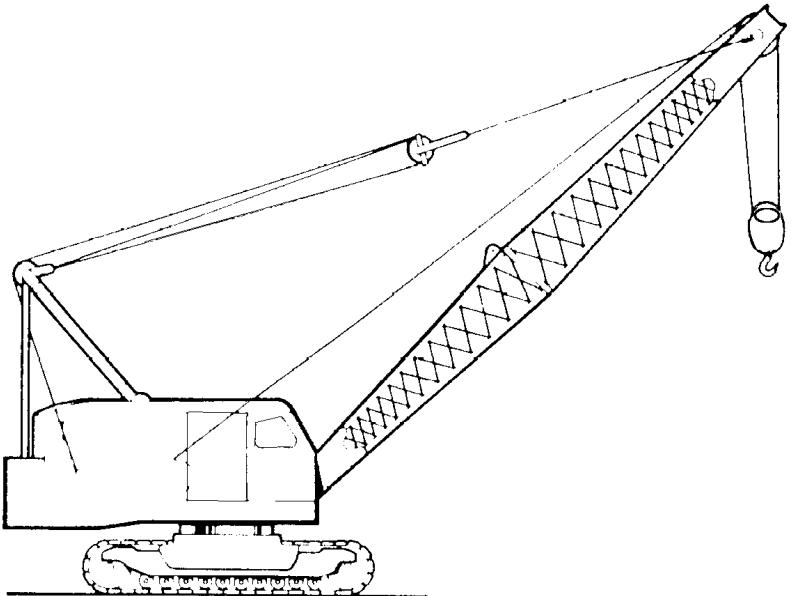
31 32

33 34

35 36

37

Typická struktura manipulátoru – jeřáb RRP



Kvíz: Kolik má hák stupňů volnosti? **A-3, B-4, C-5, D-Jiné číslo**

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

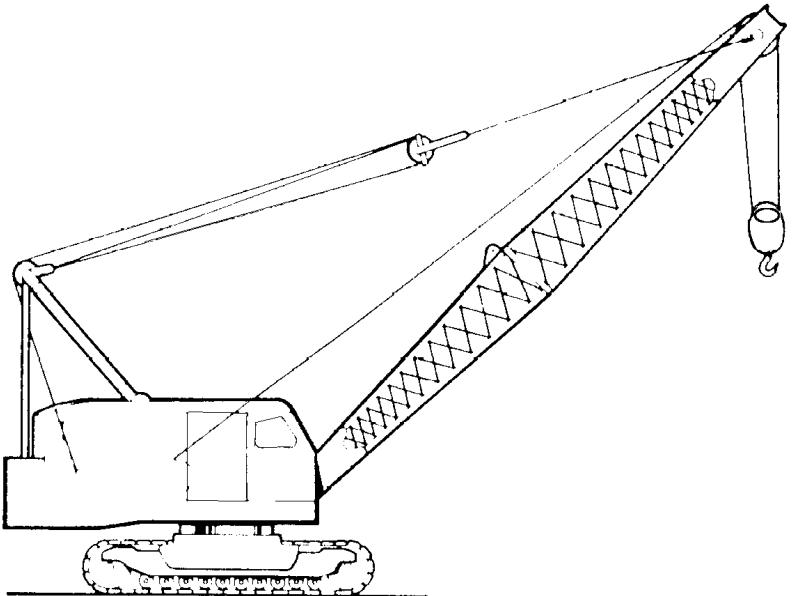
31 32

33 34

35 36

37

Typická struktura manipulátoru – jeřáb RRP



Kvíz: Kolik řídí jeřábník stupňů volnosti? **A-3, B-4, C-5, D-Jiné číslo**

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

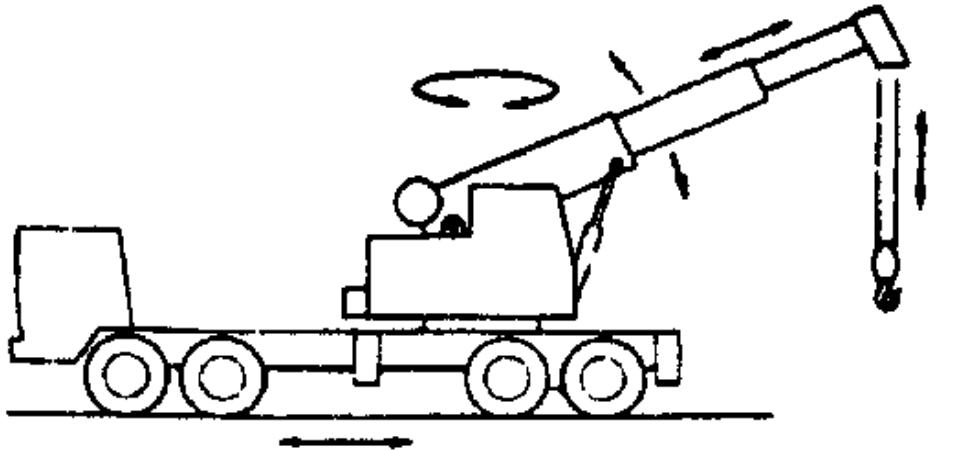
31 32

33 34

35 36

37

Typická struktura manipulátoru – jeřáb RRPP



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

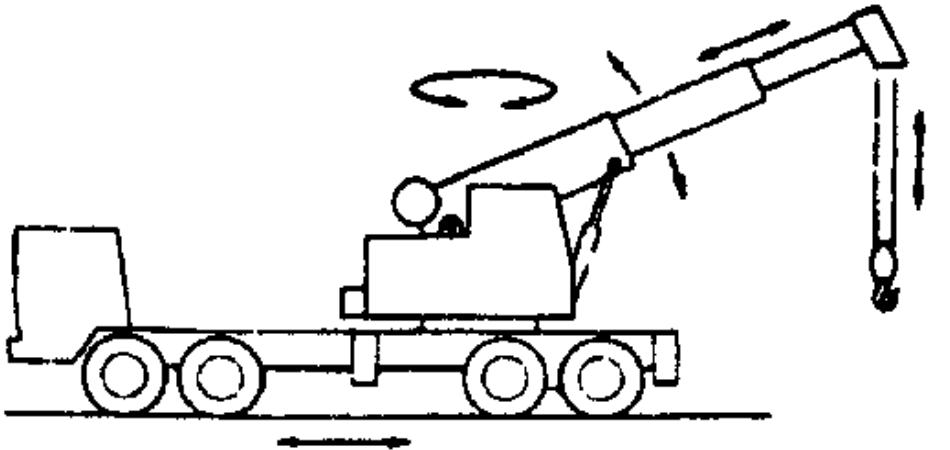
31 32

33 34

35 36

37

Typická struktura manipulátoru – jeřáb RRPP



Kvíz: Kolik má hák stupňů volnosti? **A-3, B-4, C-5, D-Jiné číslo**

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

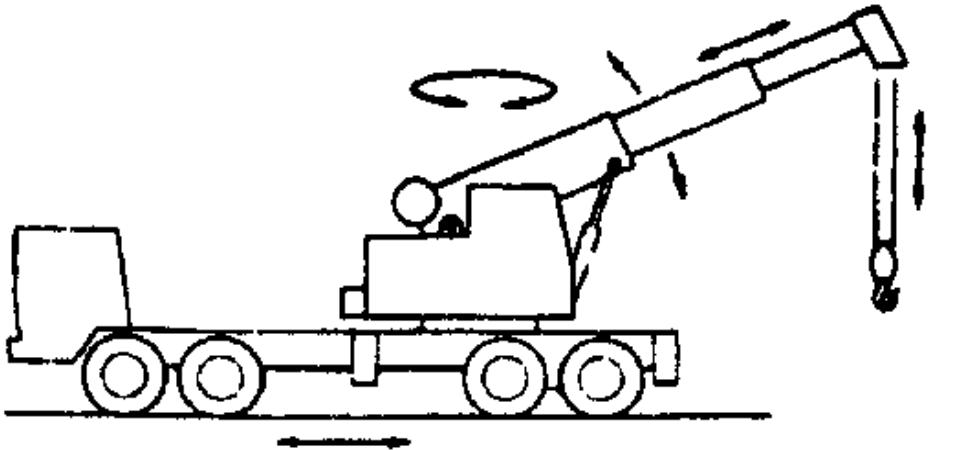
31 32

33 34

35 36

37

Typická struktura manipulátoru – jeřáb RRPP



Kvíz: Kolik řídí jeřábník stupňů volnosti? **A-3, B-4, C-5, D-Jiné číslo**

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

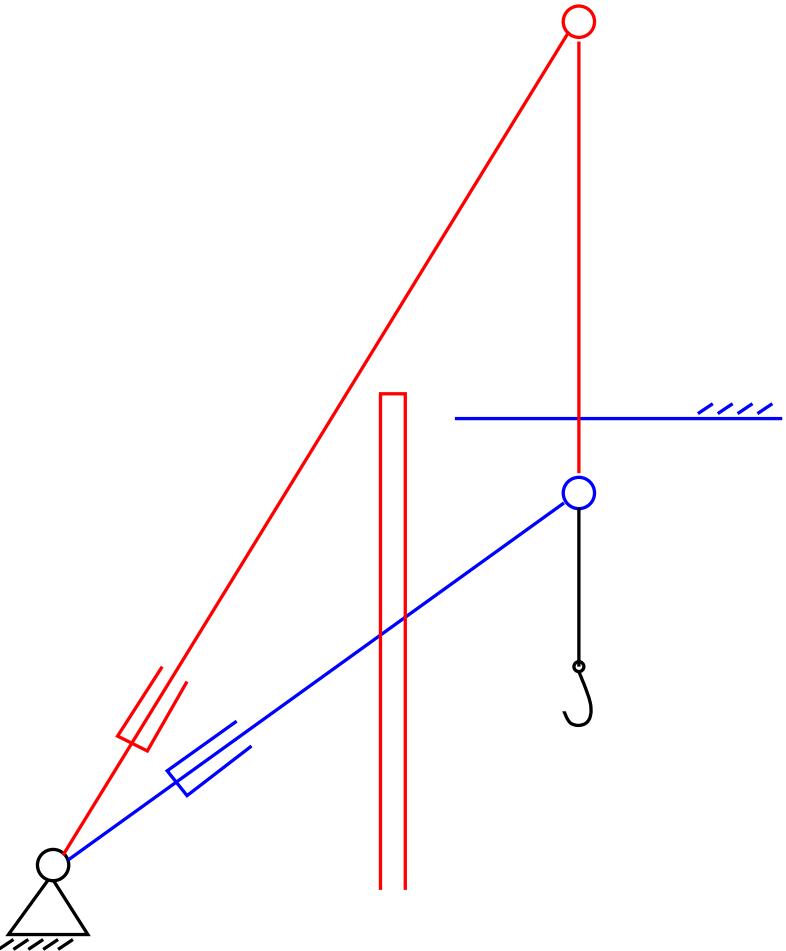
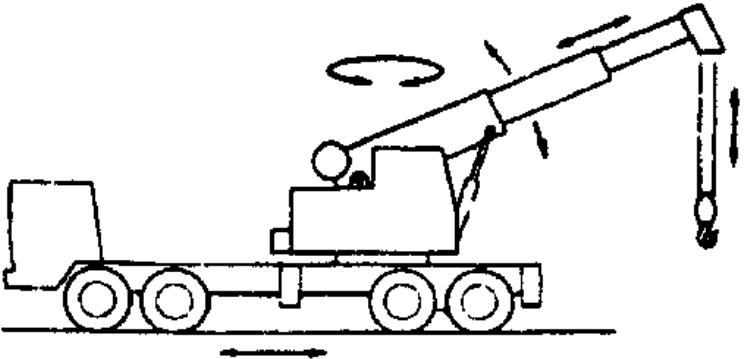
35 36

37

Typická struktura manipulátoru – jeřáb RRPP



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

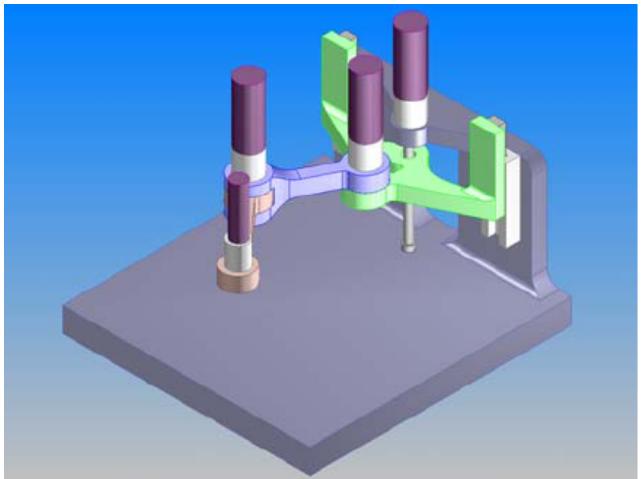
31 32

33 34

35 36

37

Typická struktura manipulátoru – SCARA – RRRP



Animace převzaty z webu [Masuda Salimianiho](#)

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

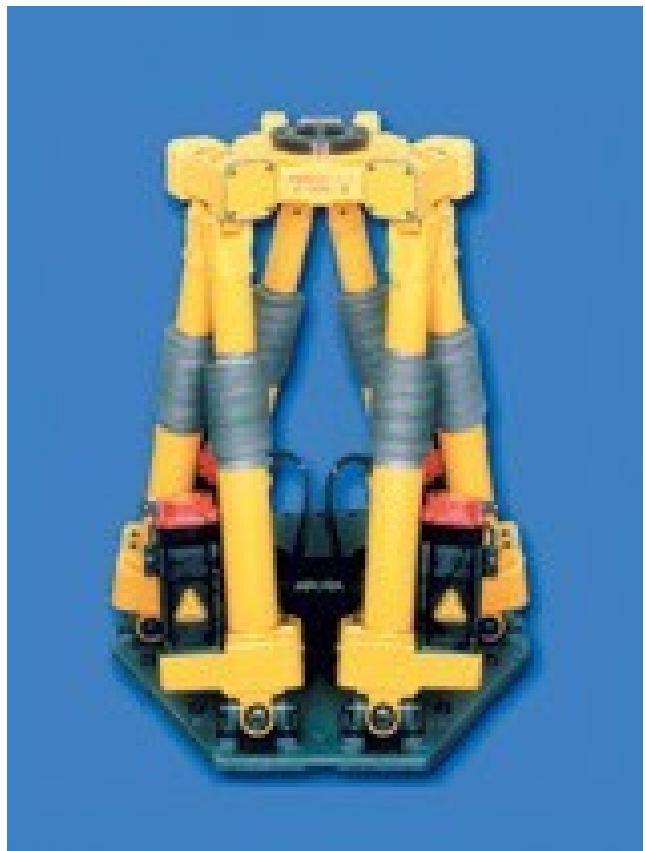
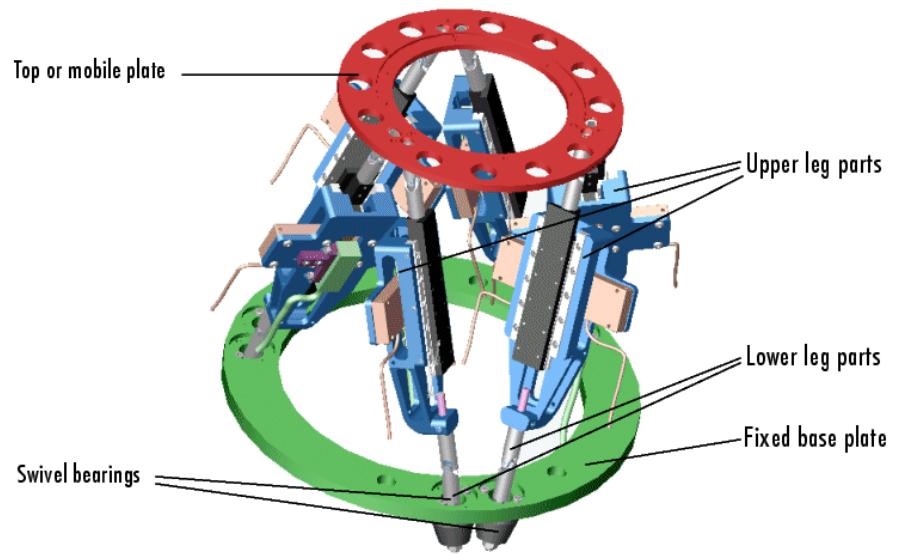
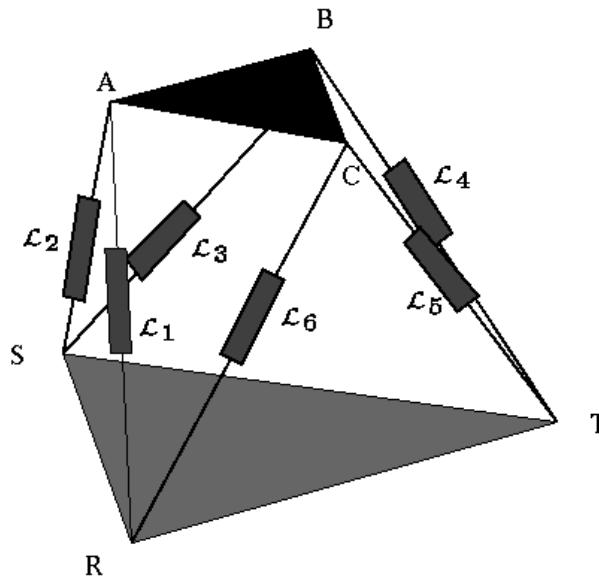
35 36

37

Typická struktura manipulátoru – Stewartova/Goughova plošina



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

35 36

37

Zvětšení dosahu robota – Angulární robot na portálu



m p



1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

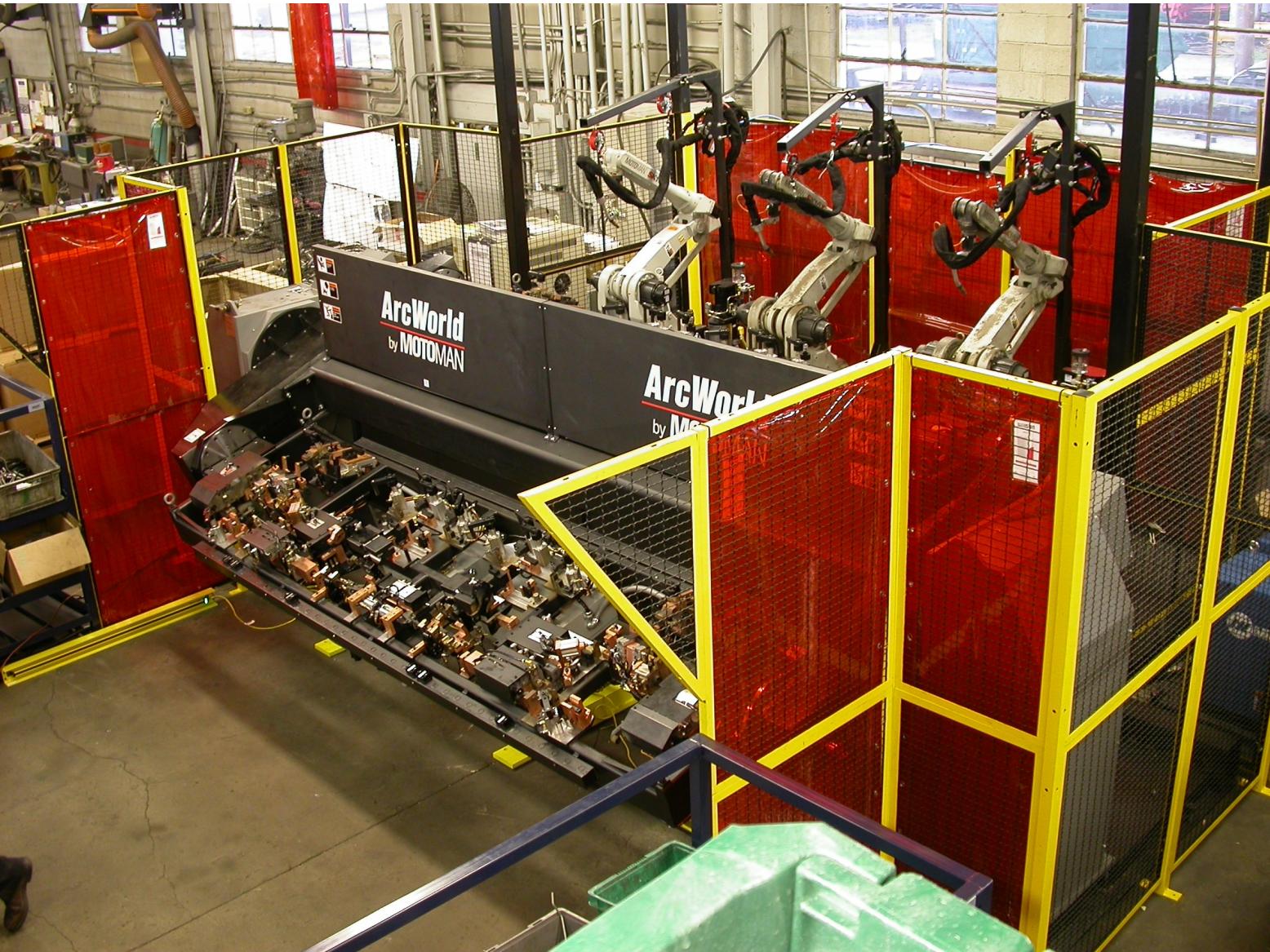
31 32

33 34

35 36

37

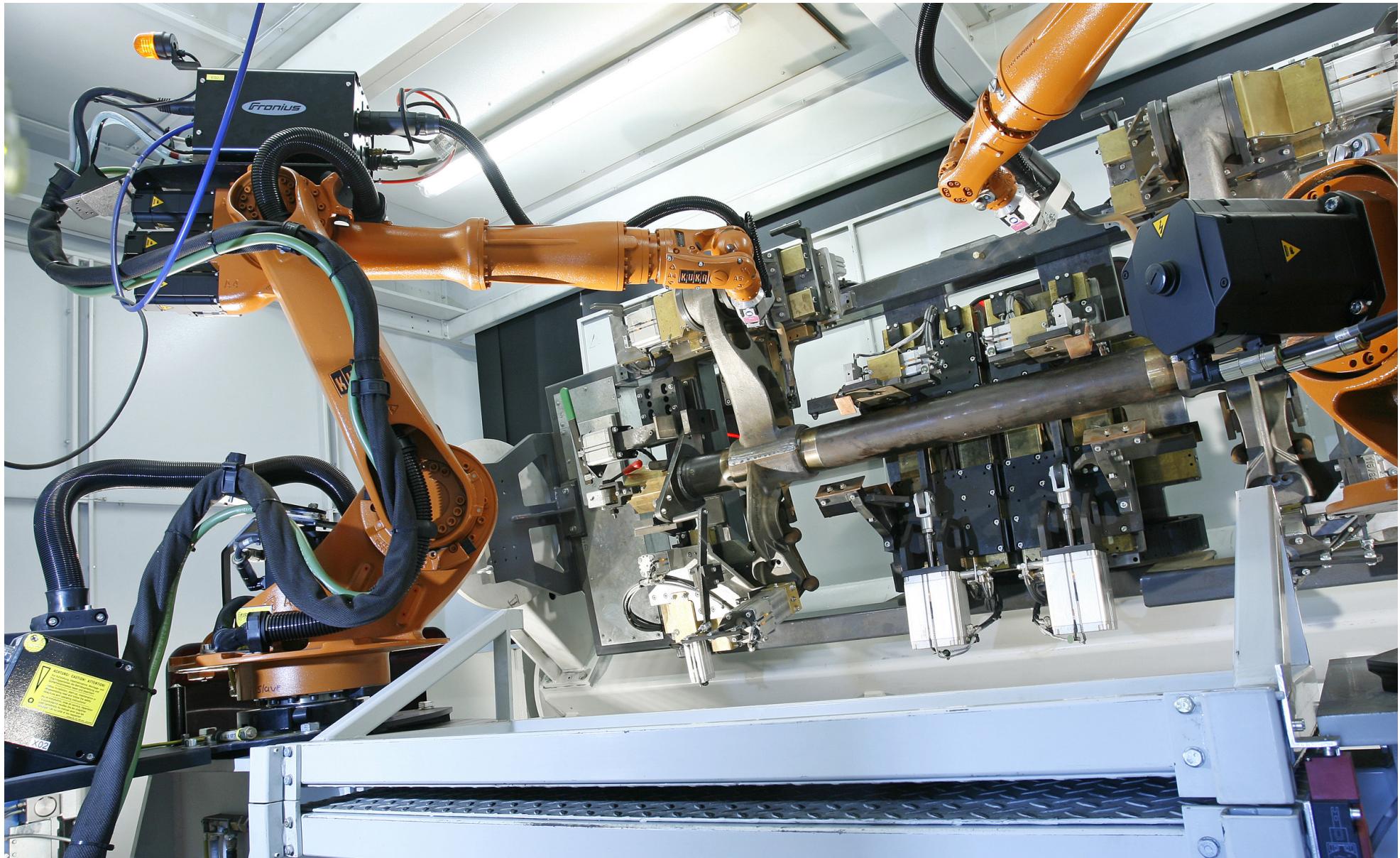
Angulární roboty, svařenec na otočném stole



1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	



Angulární robot, svařenec na otočném stole



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

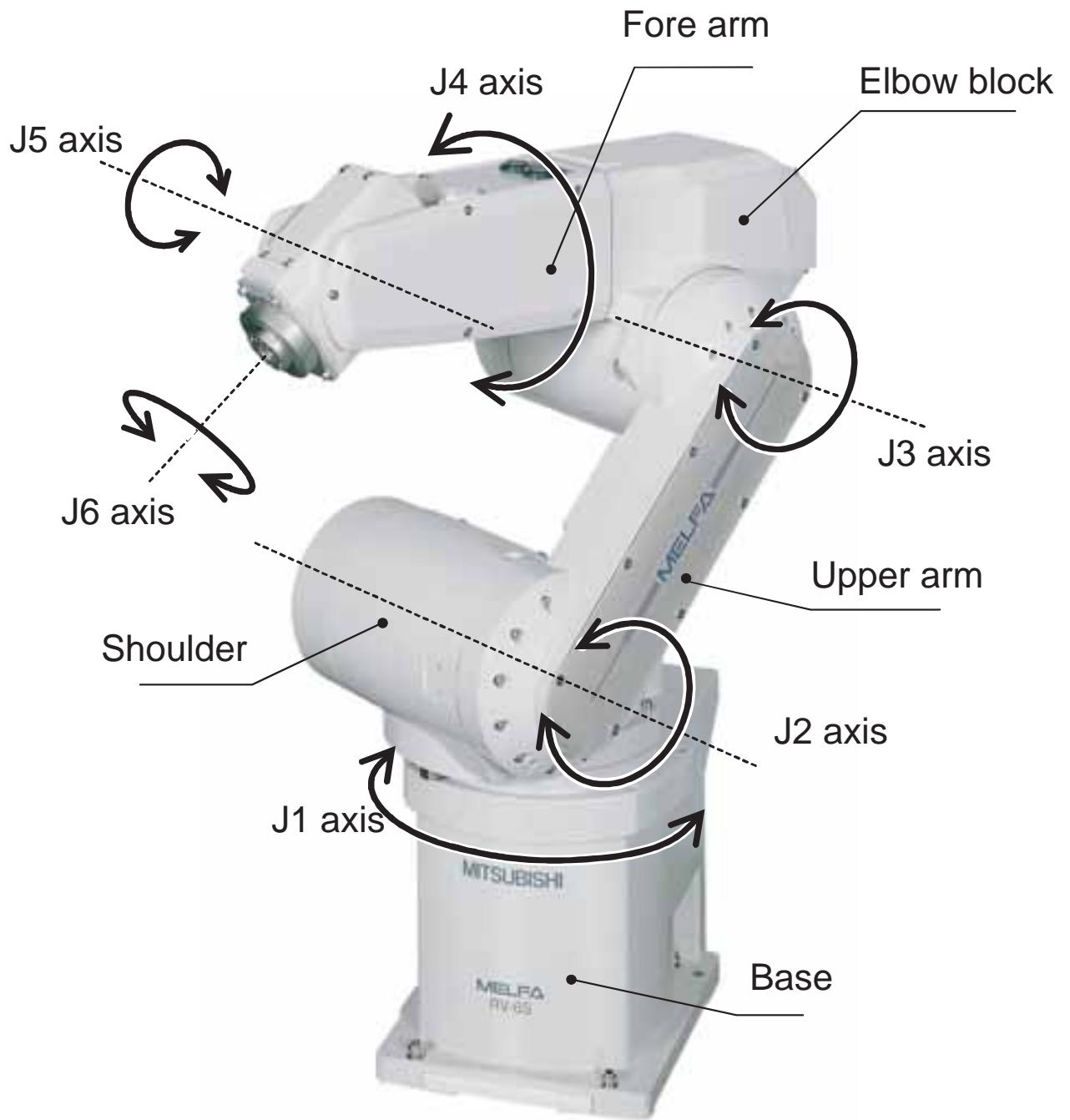
29 30

31 32

33 34

35 36

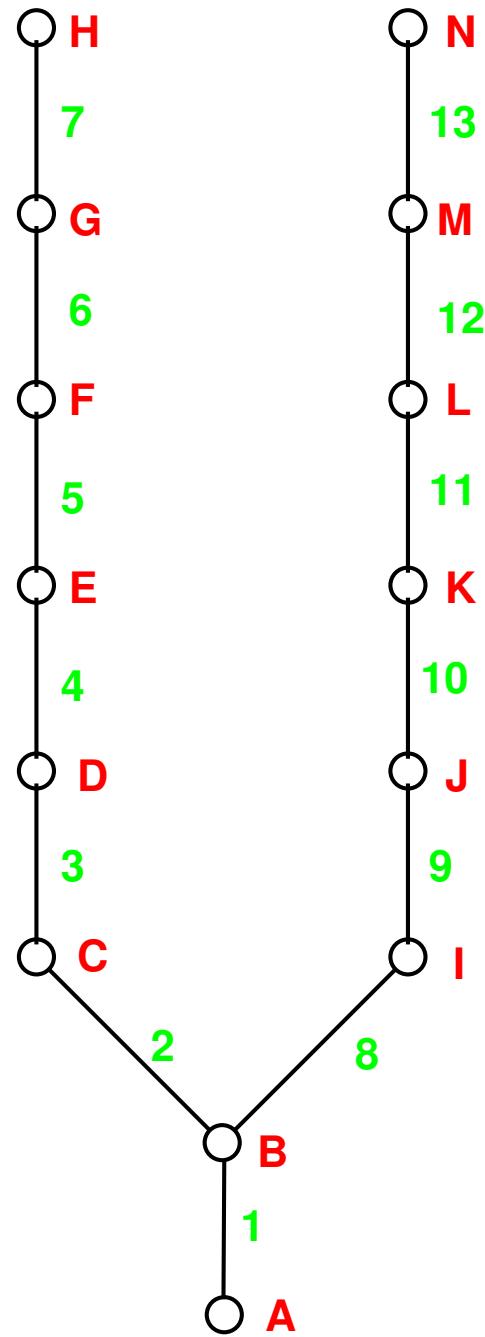
37

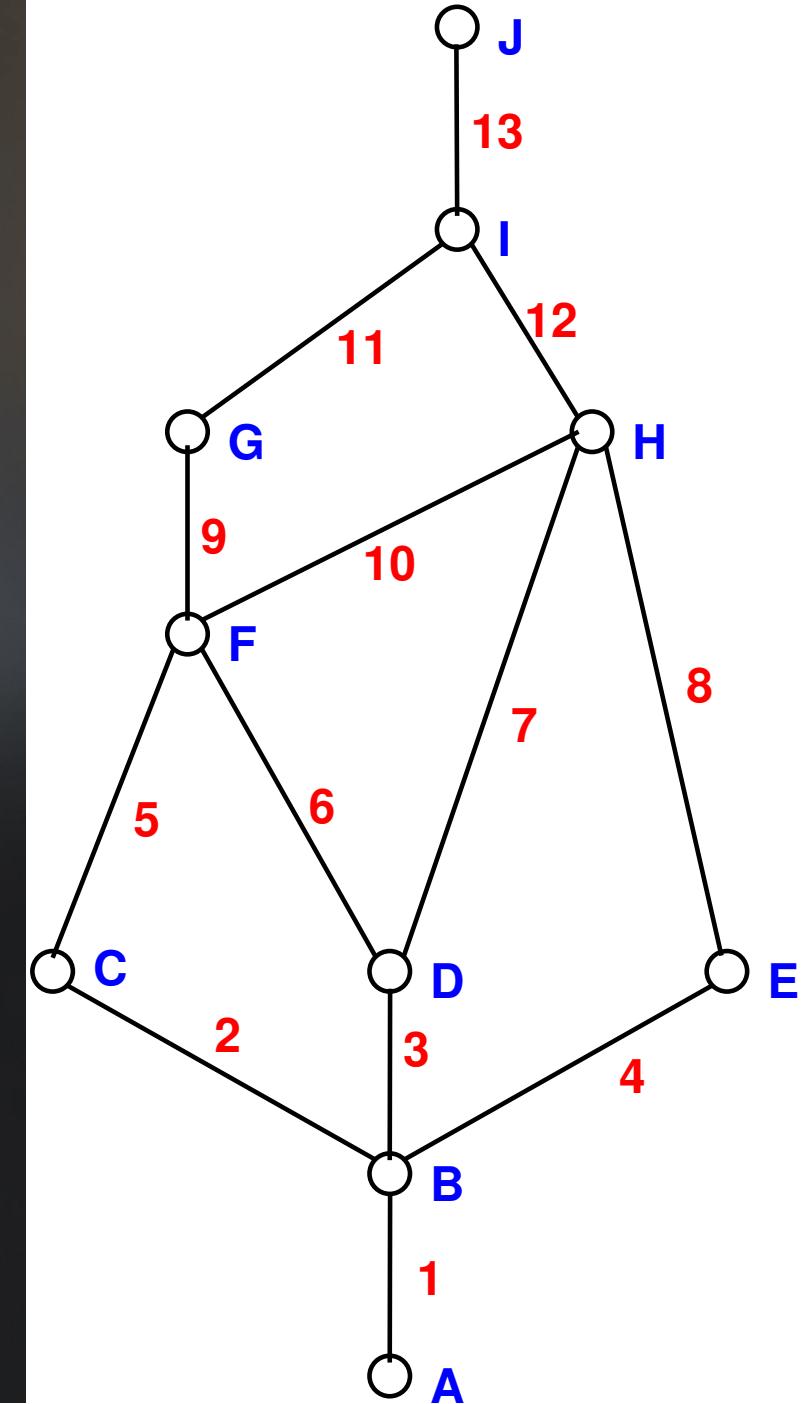


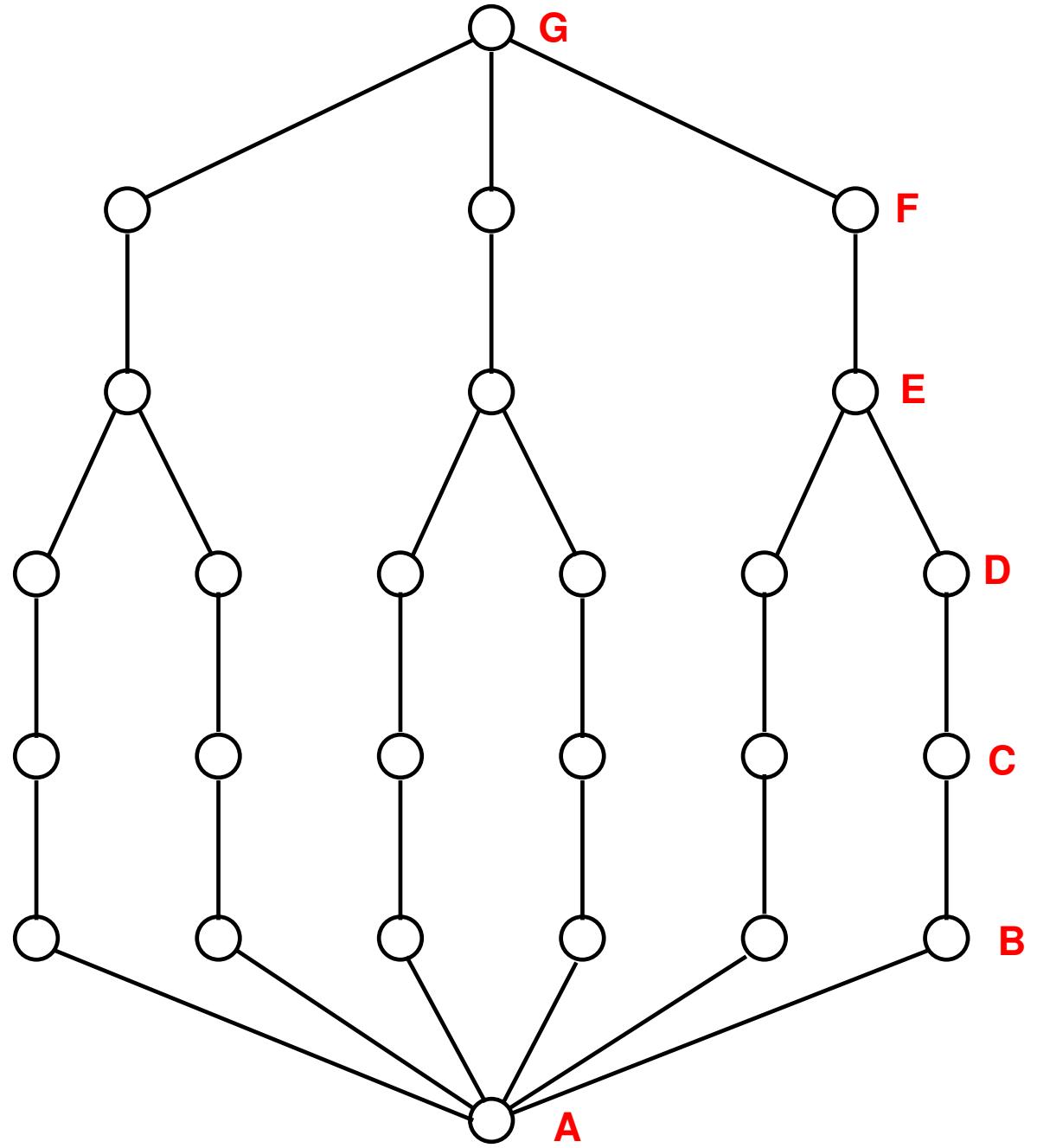










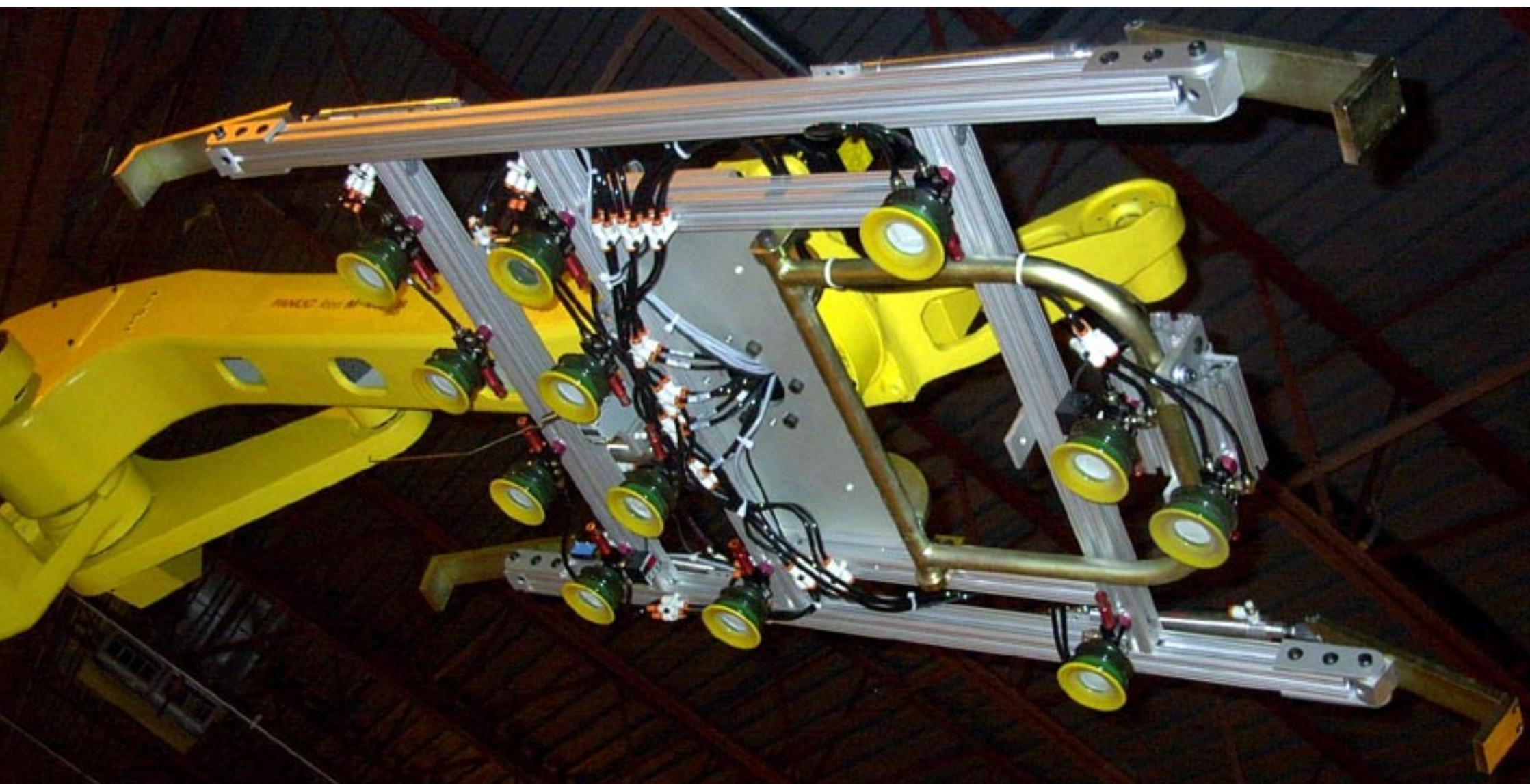




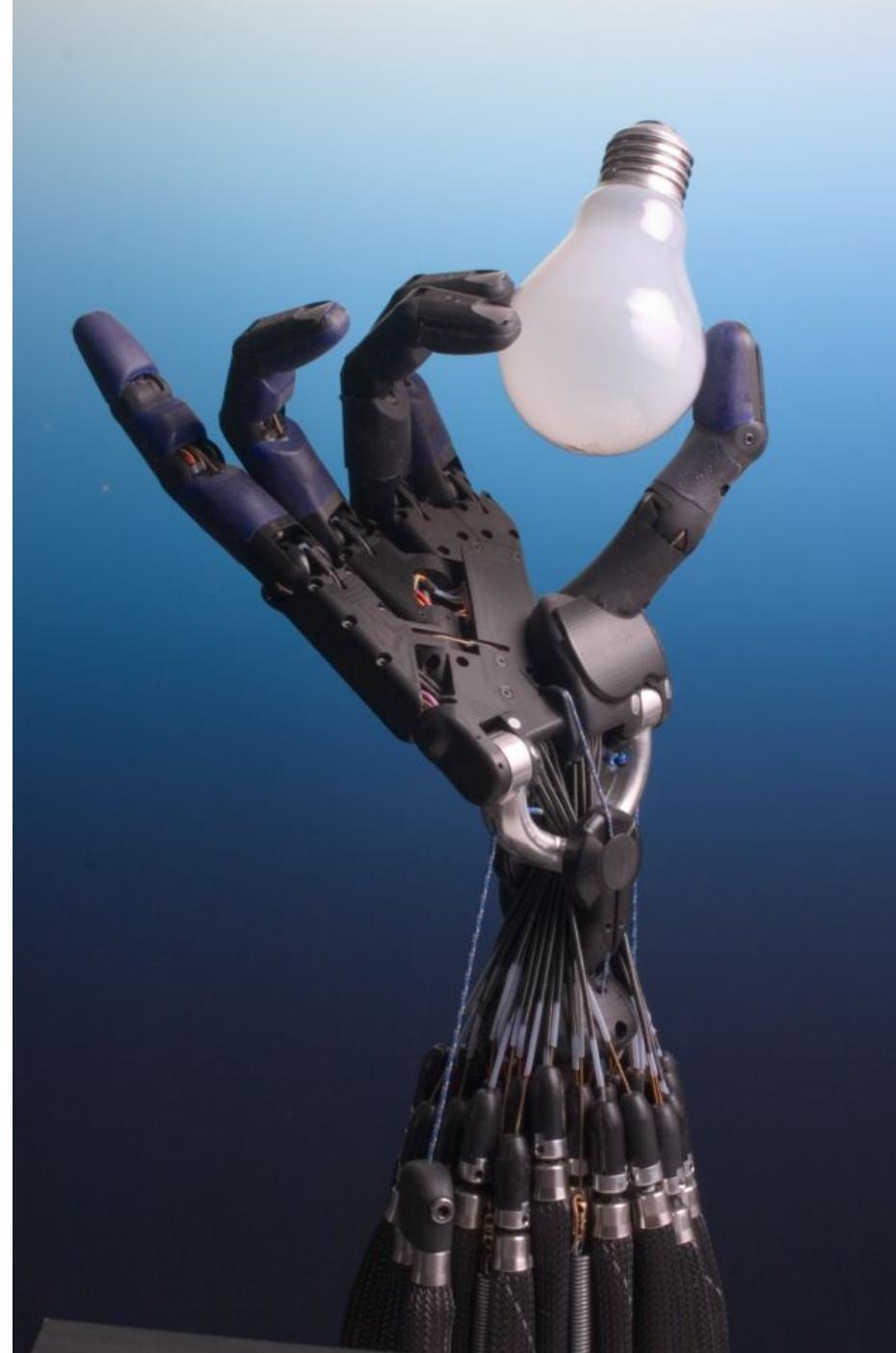






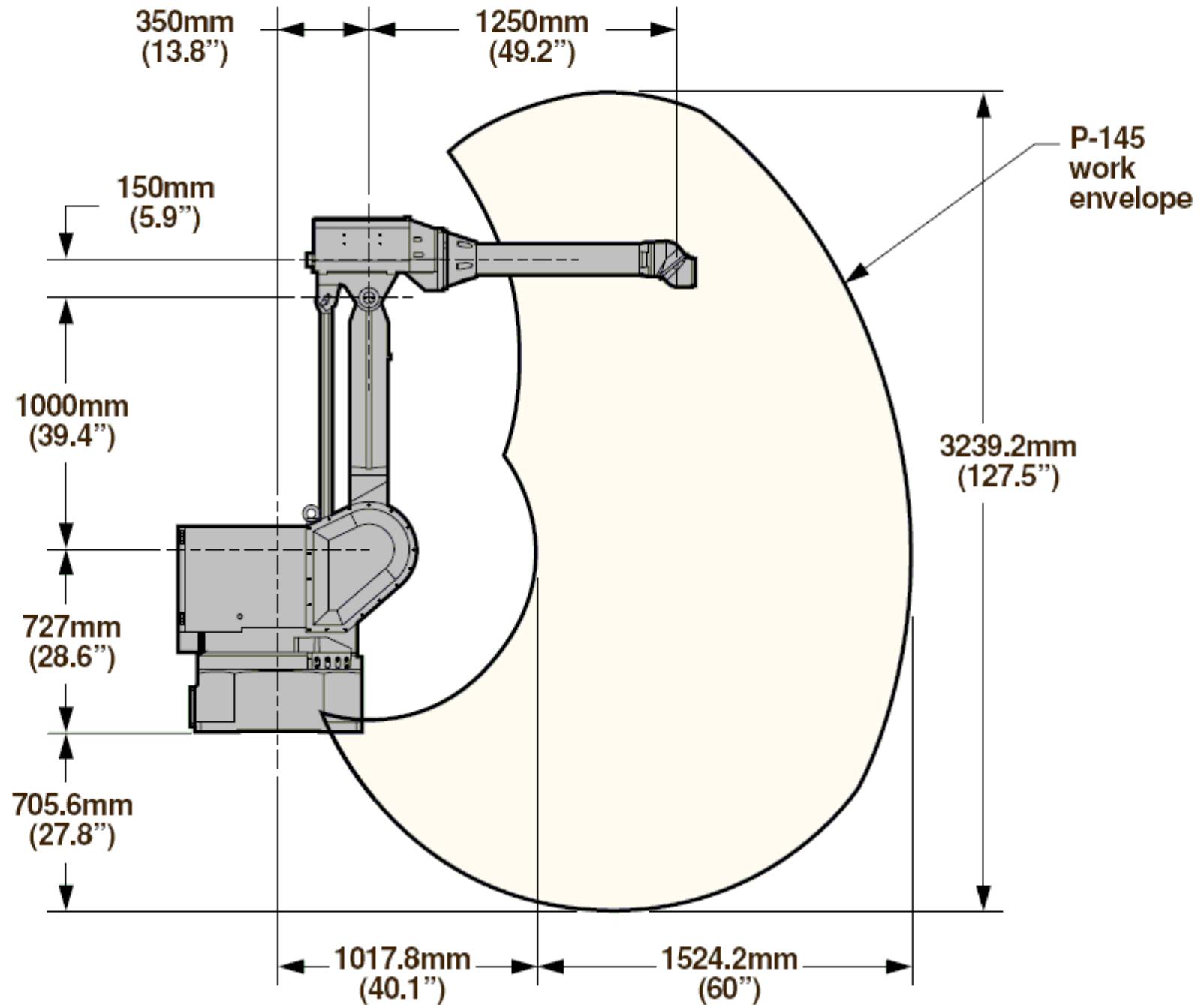


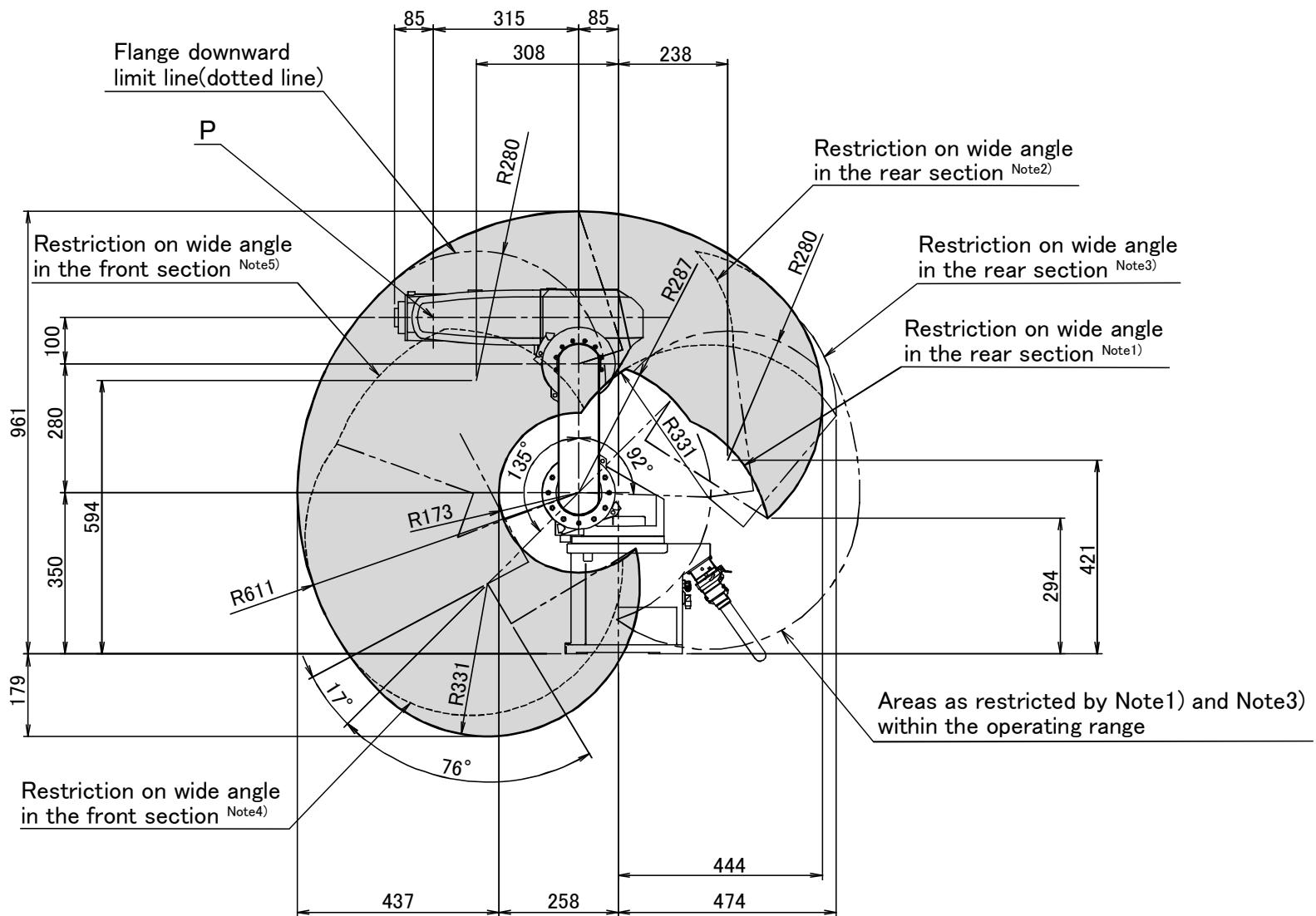












Restriction on wide angle in the rear section

Note1) $J_2 + J_3 \times 2 \geq -200$ degree when $-45 \leq J_2 < 15$ degree.

Note2) $J_2 + J_3 \geq 8$ degree when $|J_1| \leq 75$ degree, $J_2 < -45$ degree.

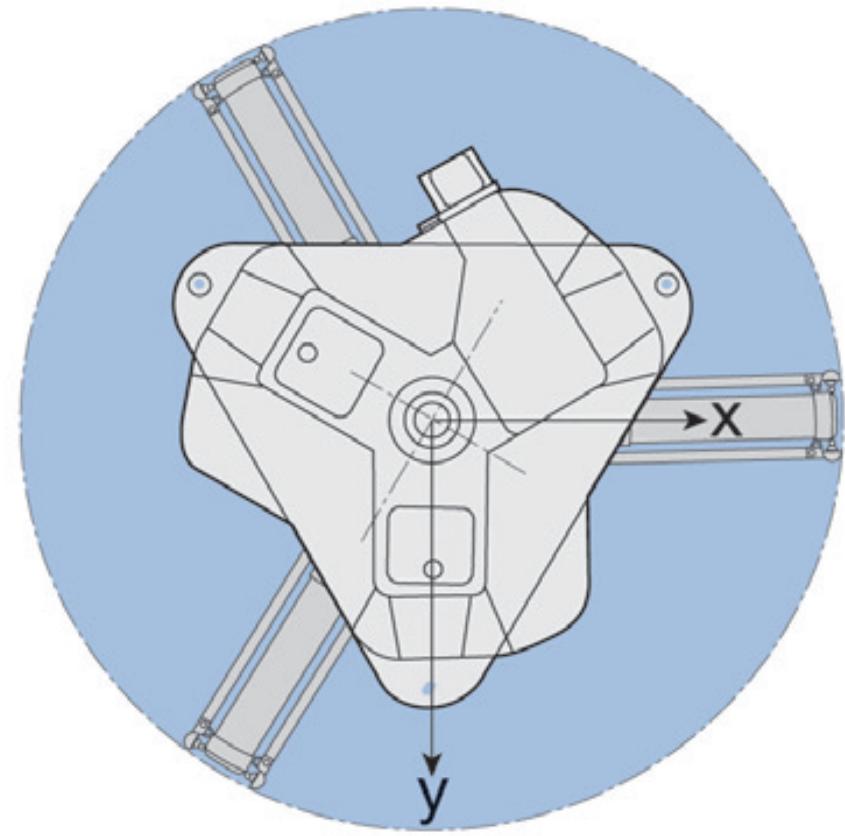
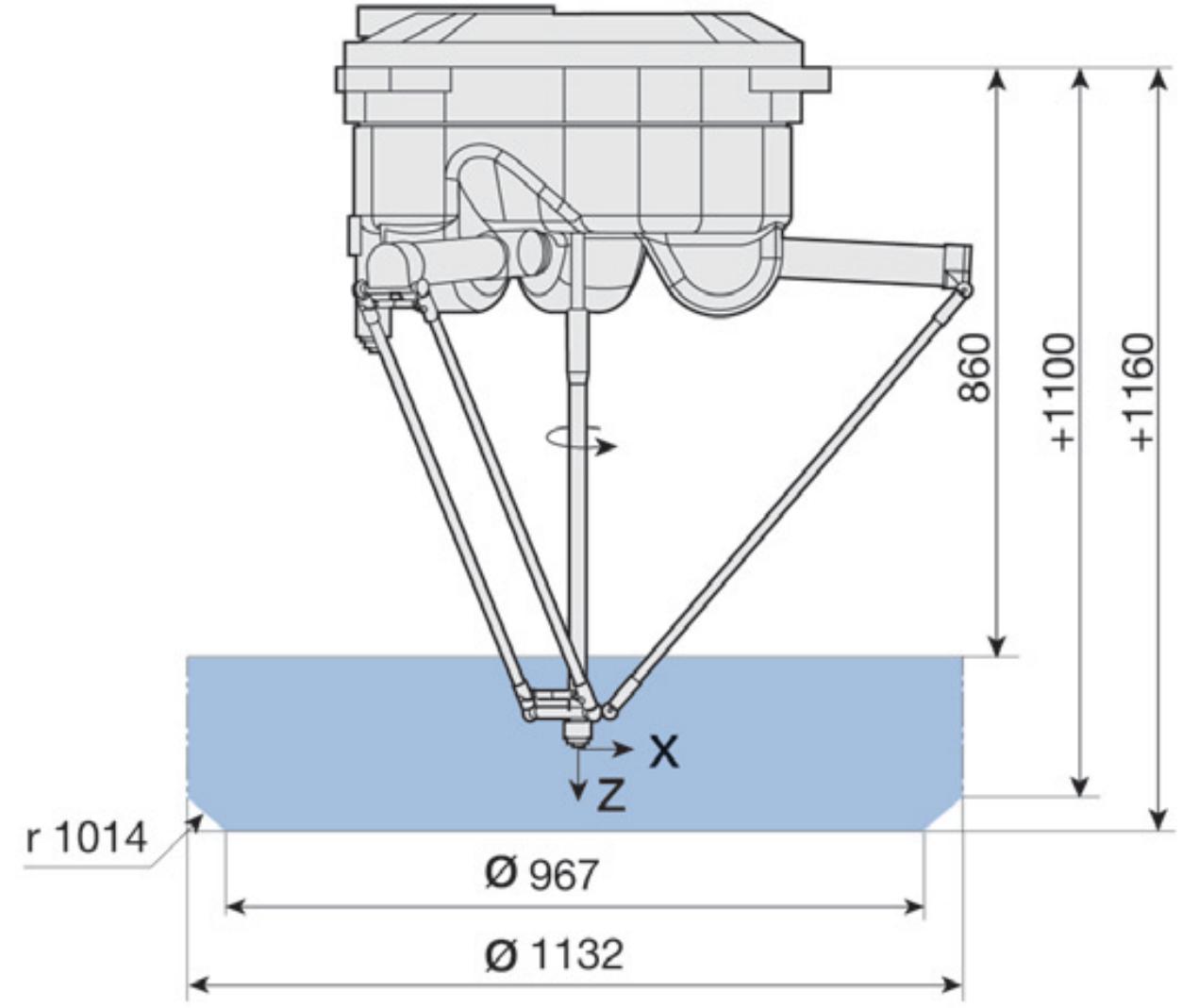
Note3) $J_2 + J_3 \geq -40$ degree when $|J_1| > 75$ degree, $J_2 < -45$ degree.

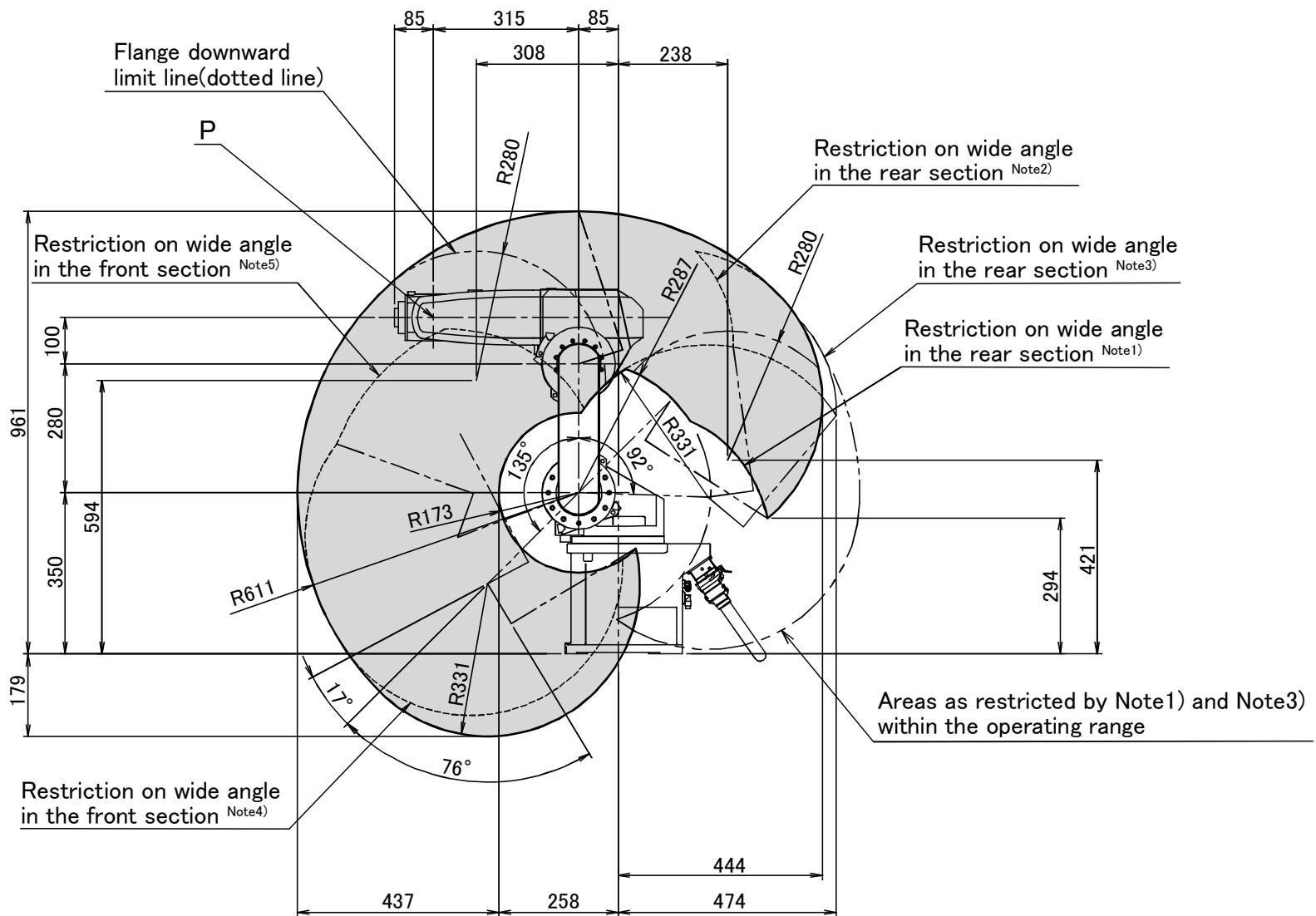
Restriction on wide angle in the front section

Note4) $J_3 \geq -40$ degree when $-105 \leq J_1 \leq 95$ degree, $J_2 \geq 123$ degree.

Note5) $J_2 \geq 110$ degree when $J_1 < -105$ degree, $J_1 < -95$ degree.

However, $J_2 - J_3 \leq 150$ degree when $85 \leq J_2 \leq 110$ degree.





Restriction on wide angle in the rear section

Note1) $J_2 + J_3 \times 2 \geq -200$ degree when $-45 \text{ degree} \leq J_2 < 15 \text{ degree}$.

Note2) $J_2 + J_3 \geq 8$ degree when $|J_1| \leq 75 \text{ degree}$, $J_2 < -45 \text{ degree}$.

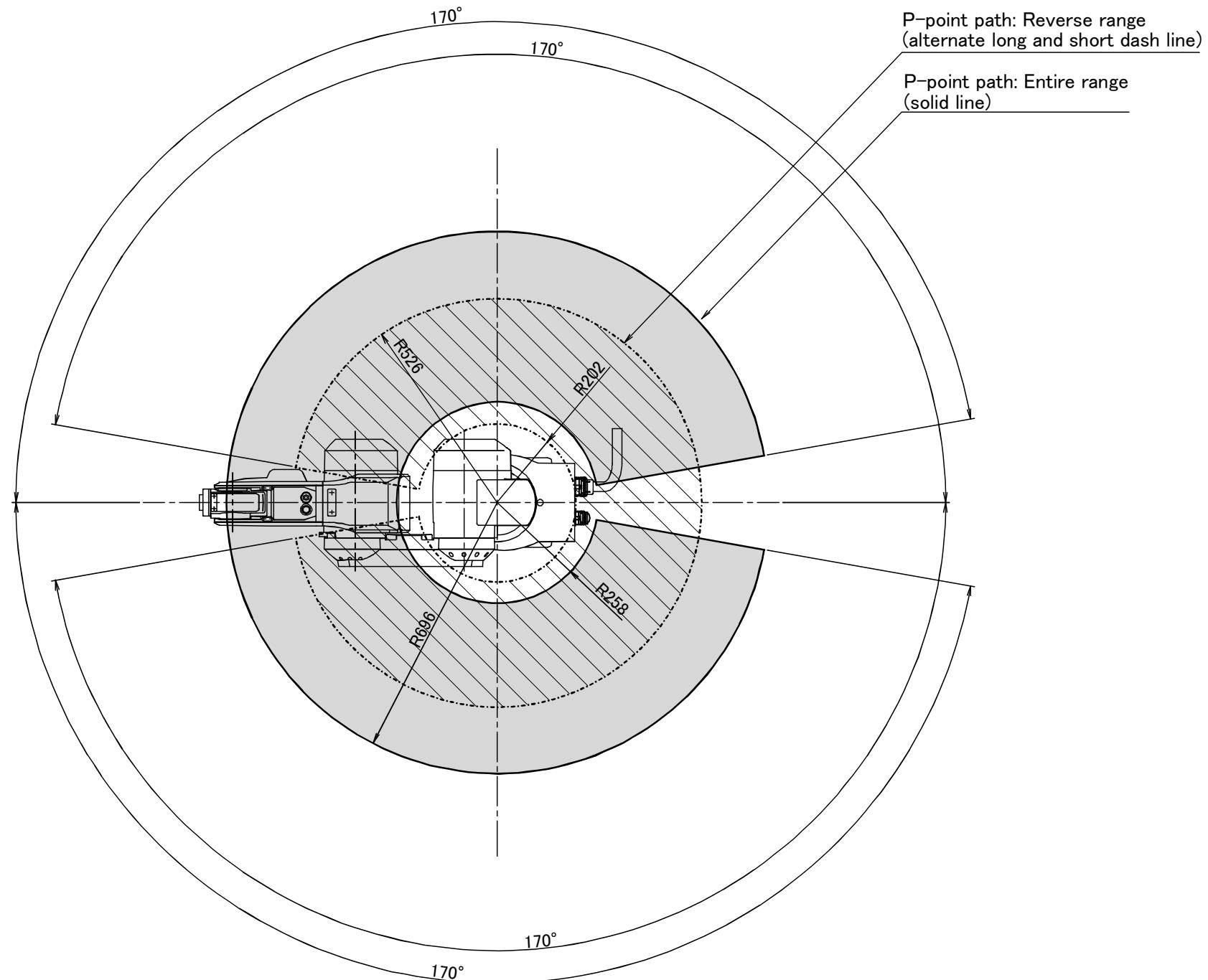
Note3) $J_2 + J_3 \geq -40$ degree when $|J_1| > 75 \text{ degree}$, $J_2 < -45 \text{ degree}$.

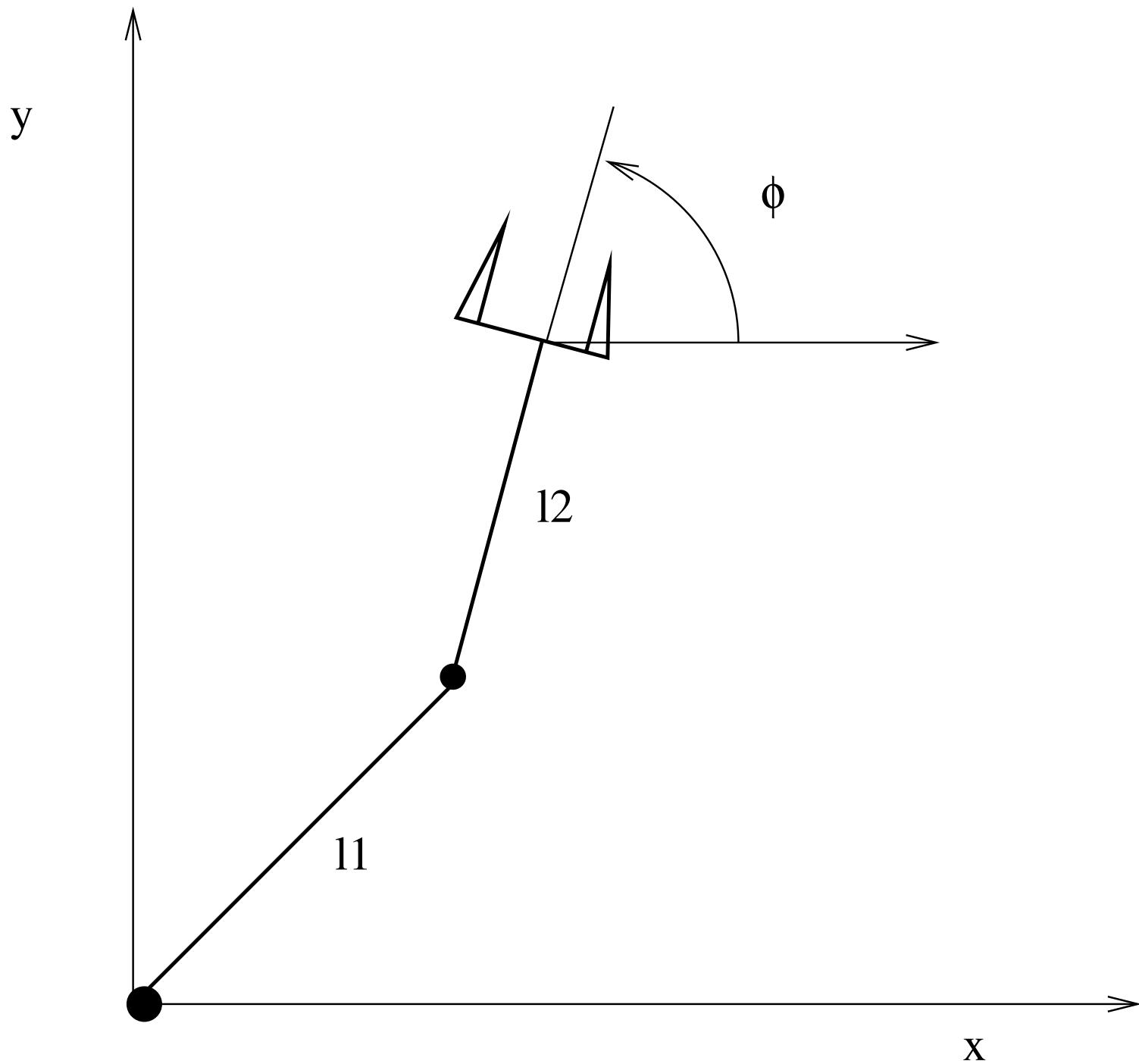
Restriction on wide angle in the front section

Note4) $J_3 \geq -40$ degree when $-105 \text{ degree} \leq J_1 \leq 95 \text{ degree}$, $J_2 \geq 123 \text{ degree}$.

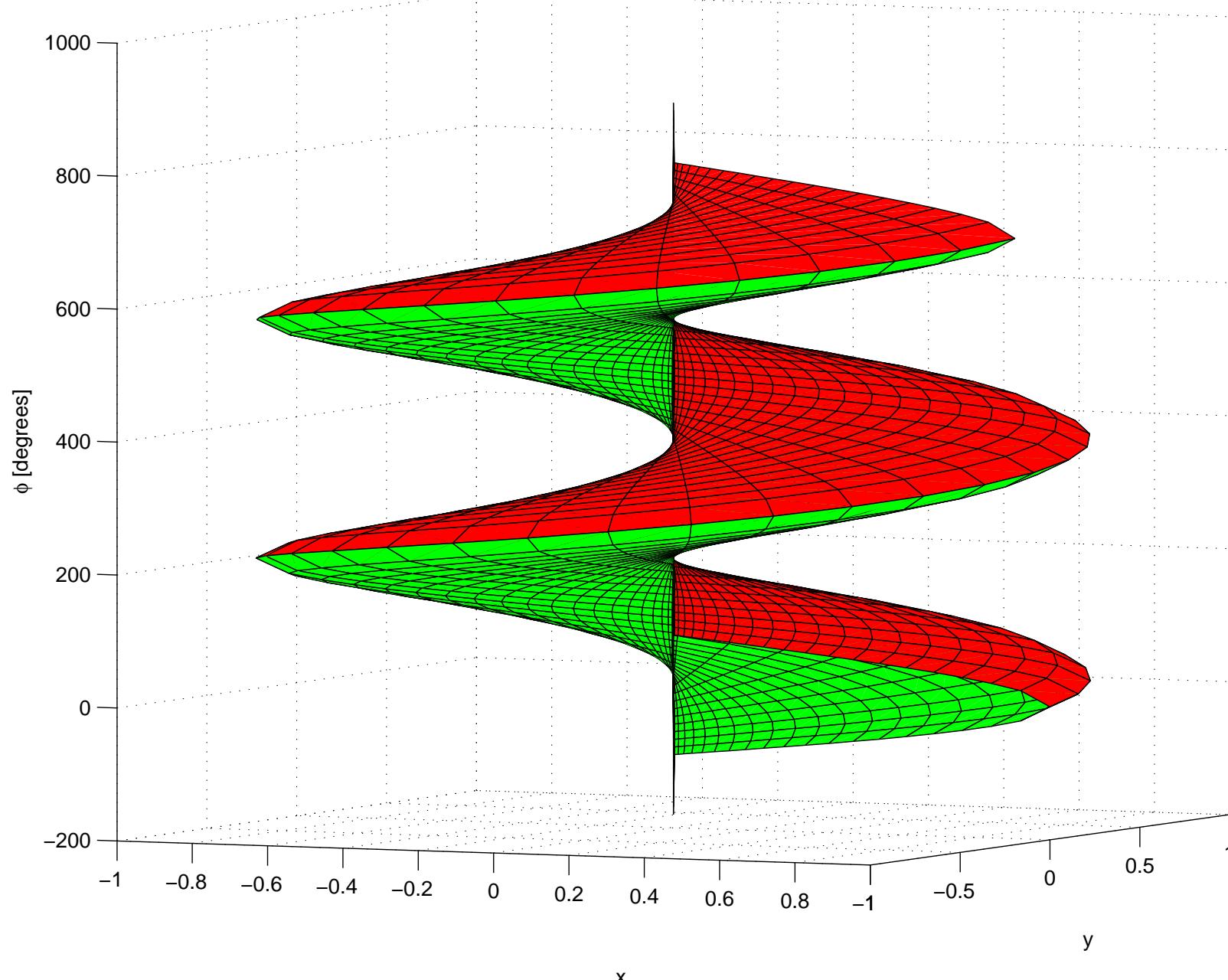
Note5) $J_2 \geq 110 \text{ degree}$ when $J_1 < -105 \text{ degree}$, $J_1 < -95 \text{ degree}$.

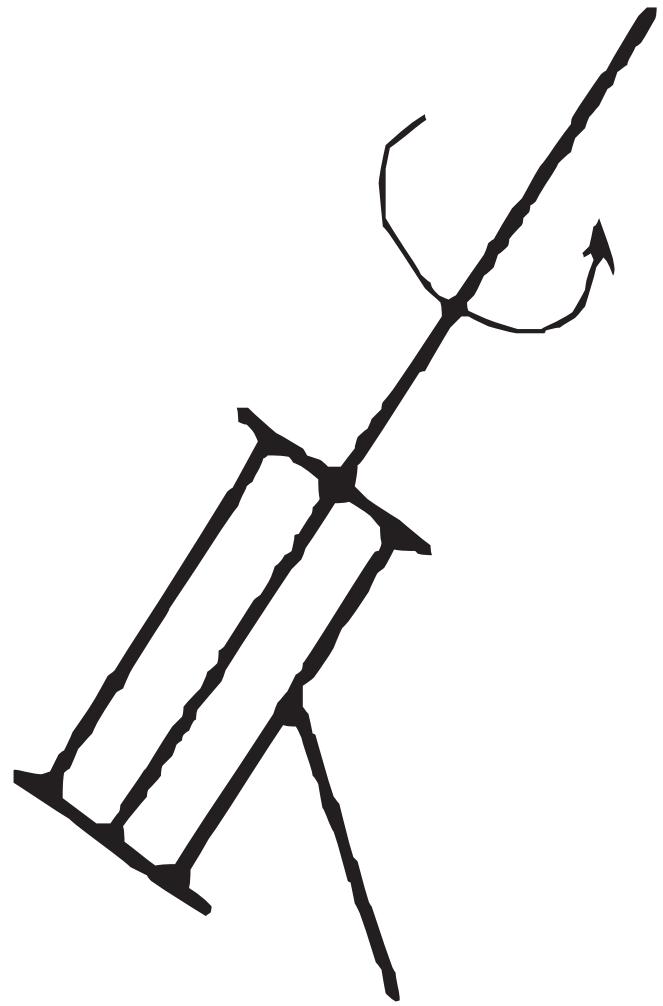
However, $J_2 - J_3 \leq 150$ degree when $85 \text{ degree} \leq J_2 \leq 110 \text{ degree}$.

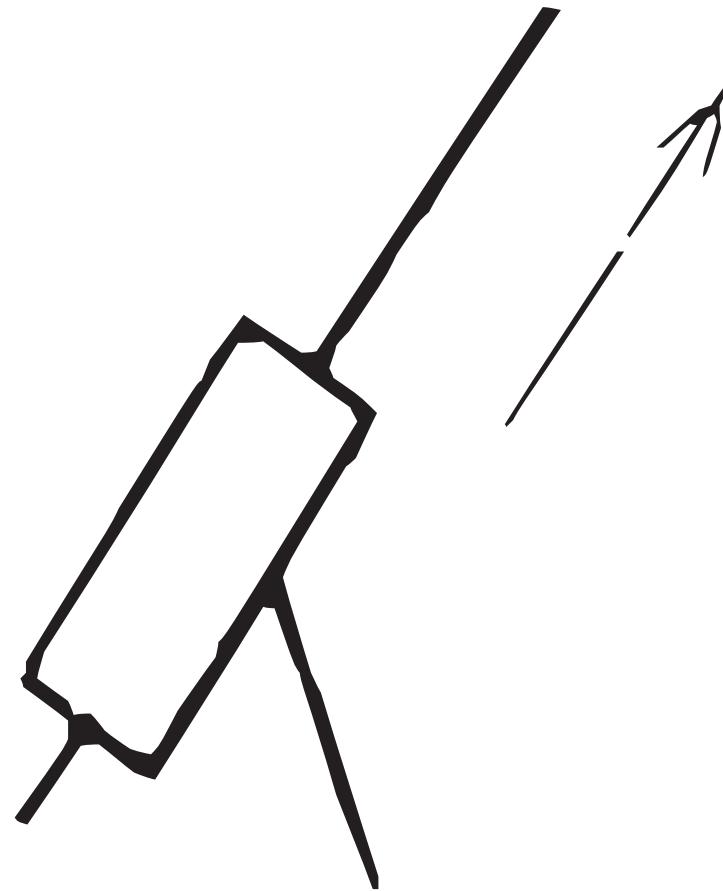


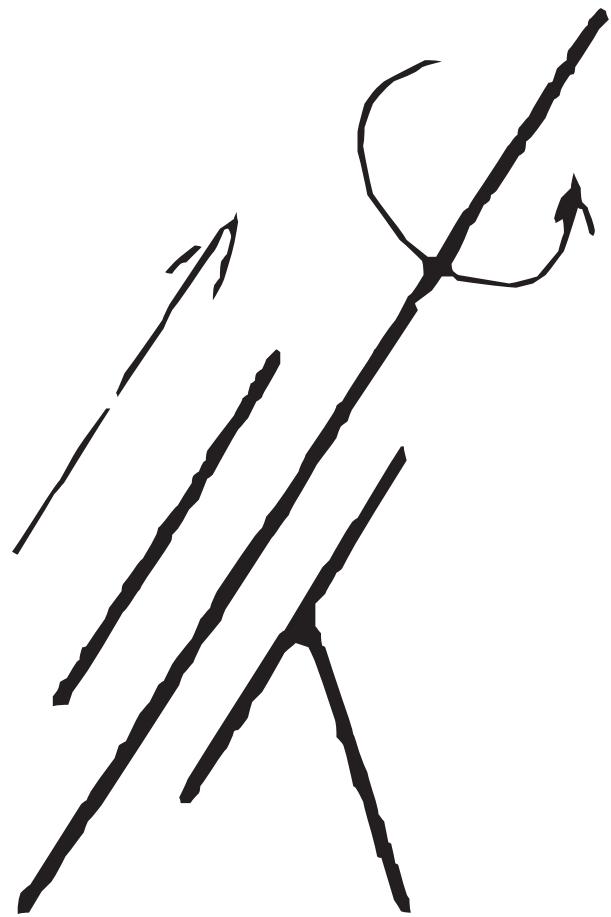


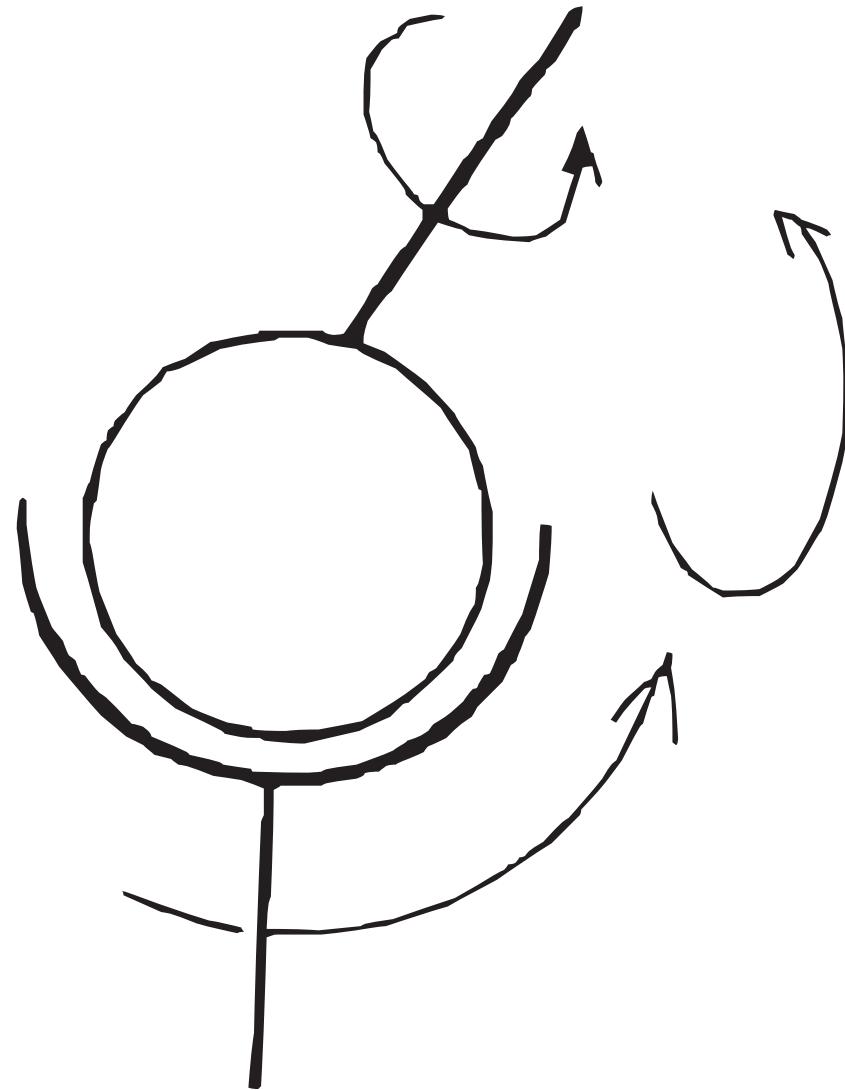
Working space of the 2DOF planar RR manipulator l1=0.5,l2=0.5

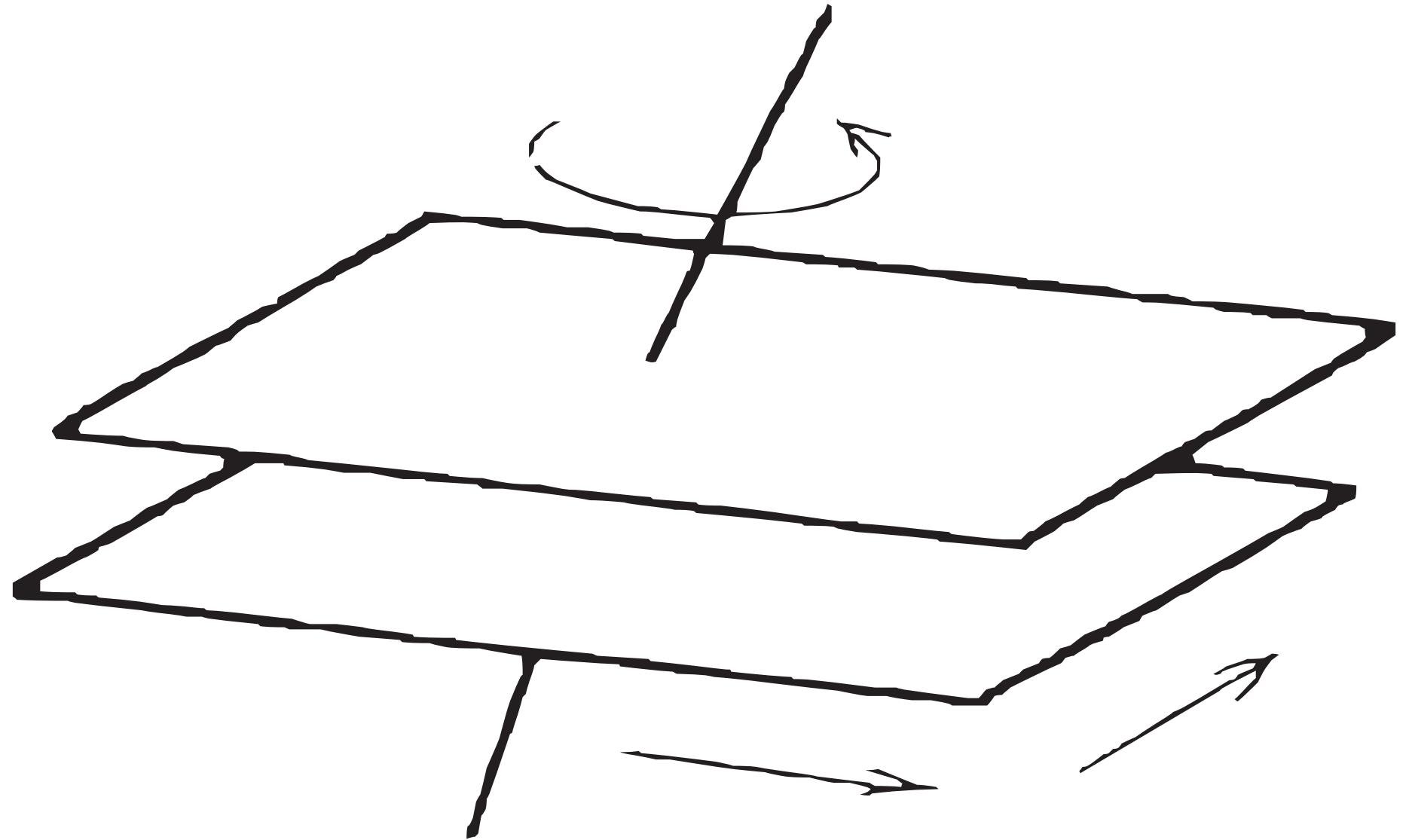


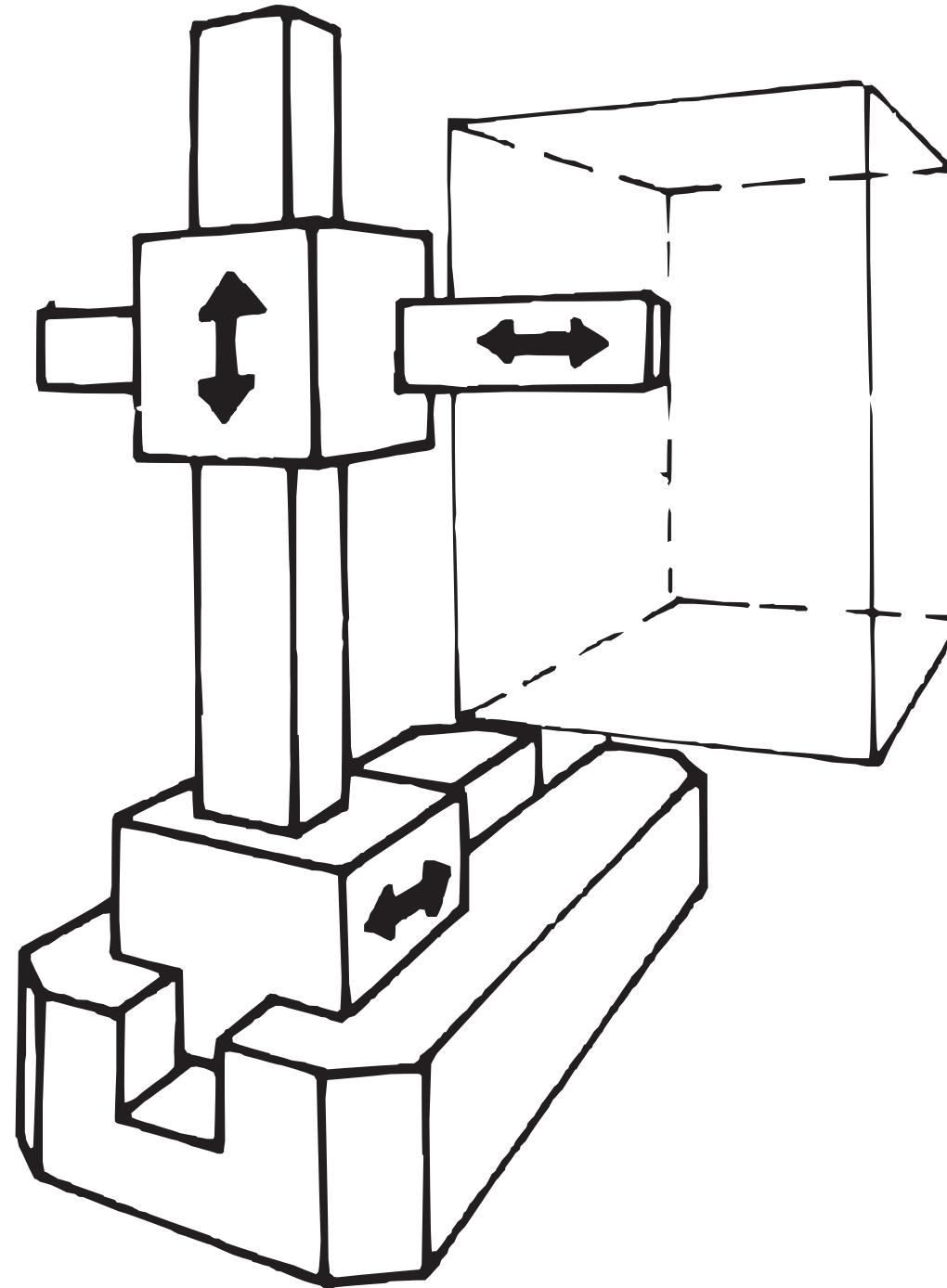


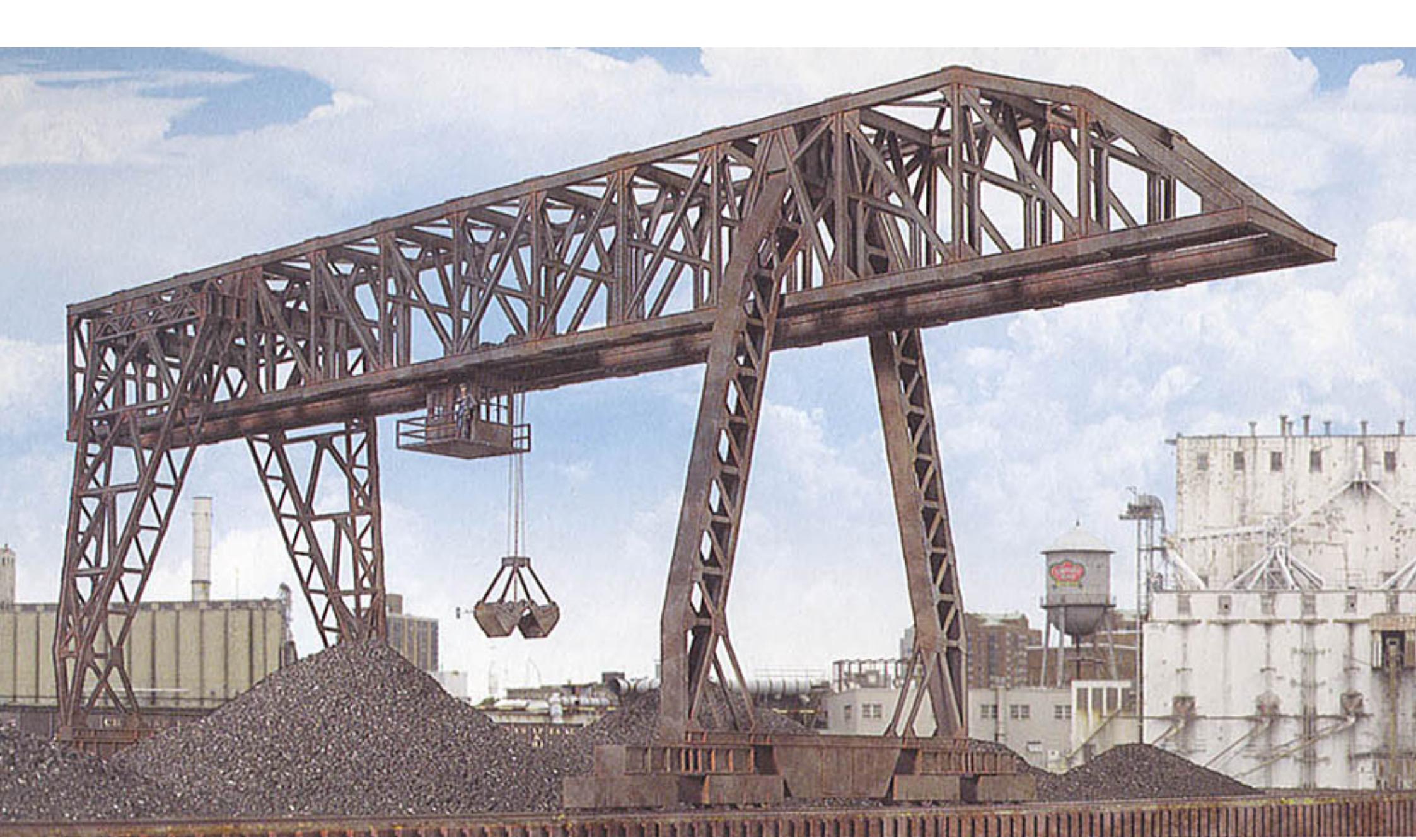


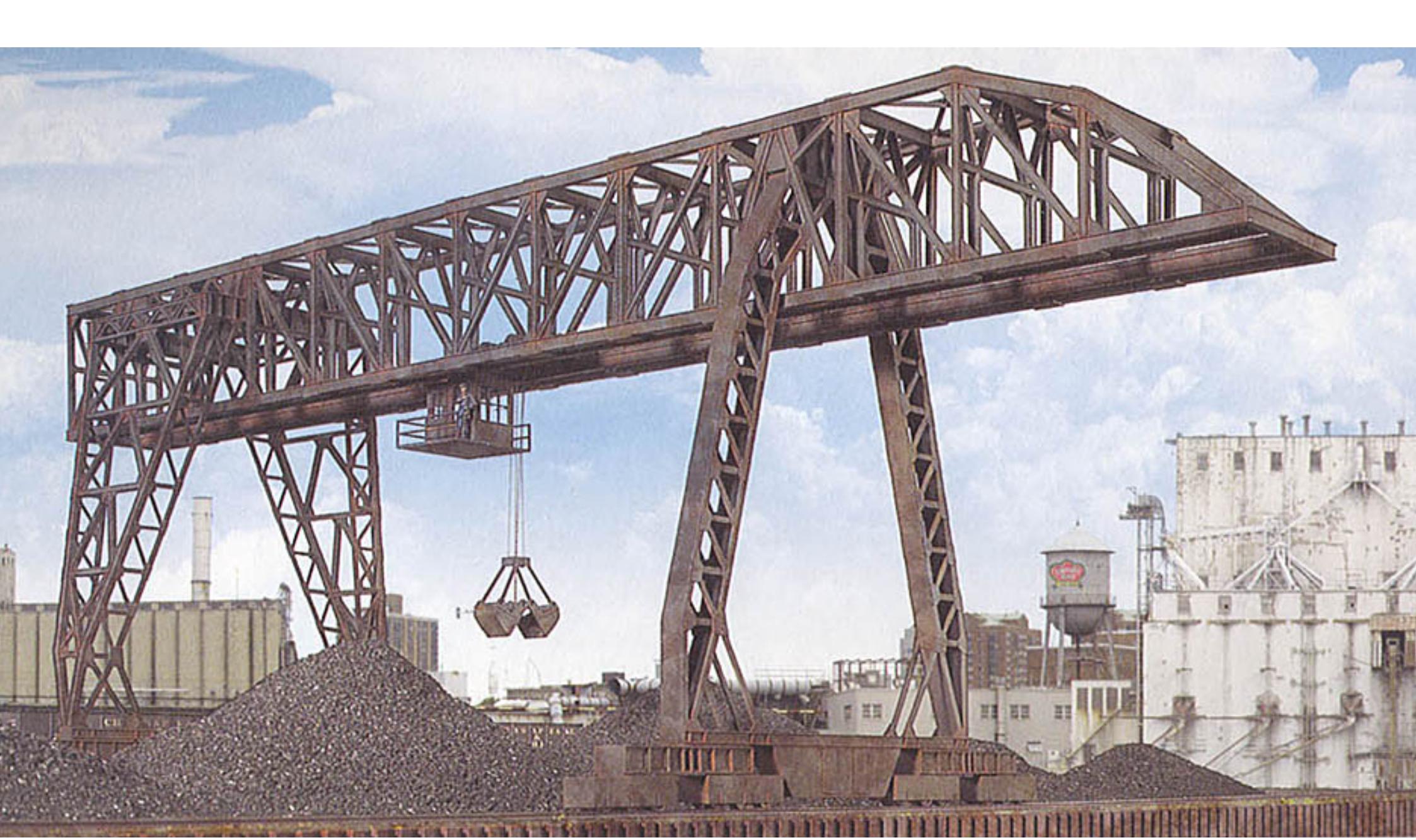


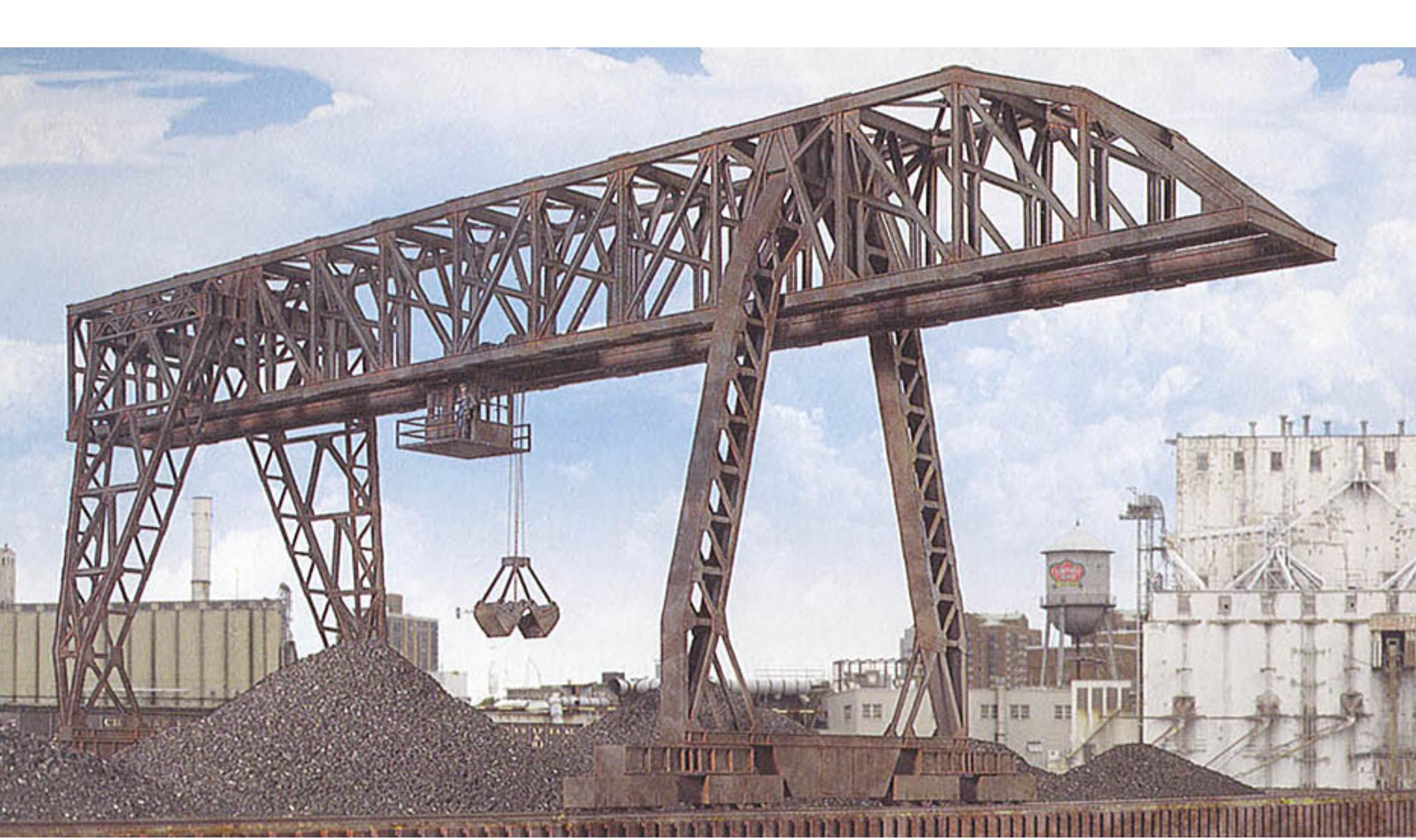


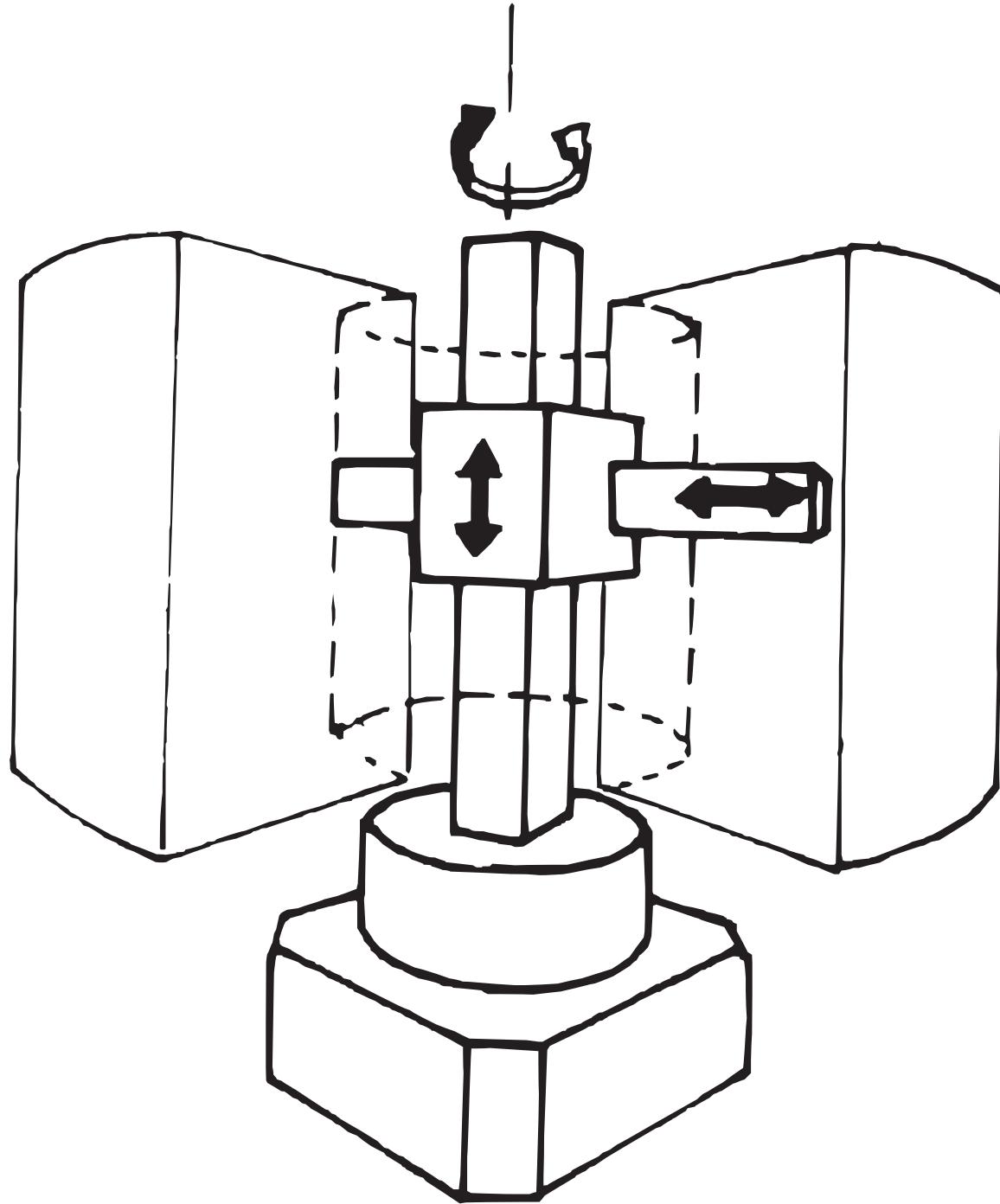


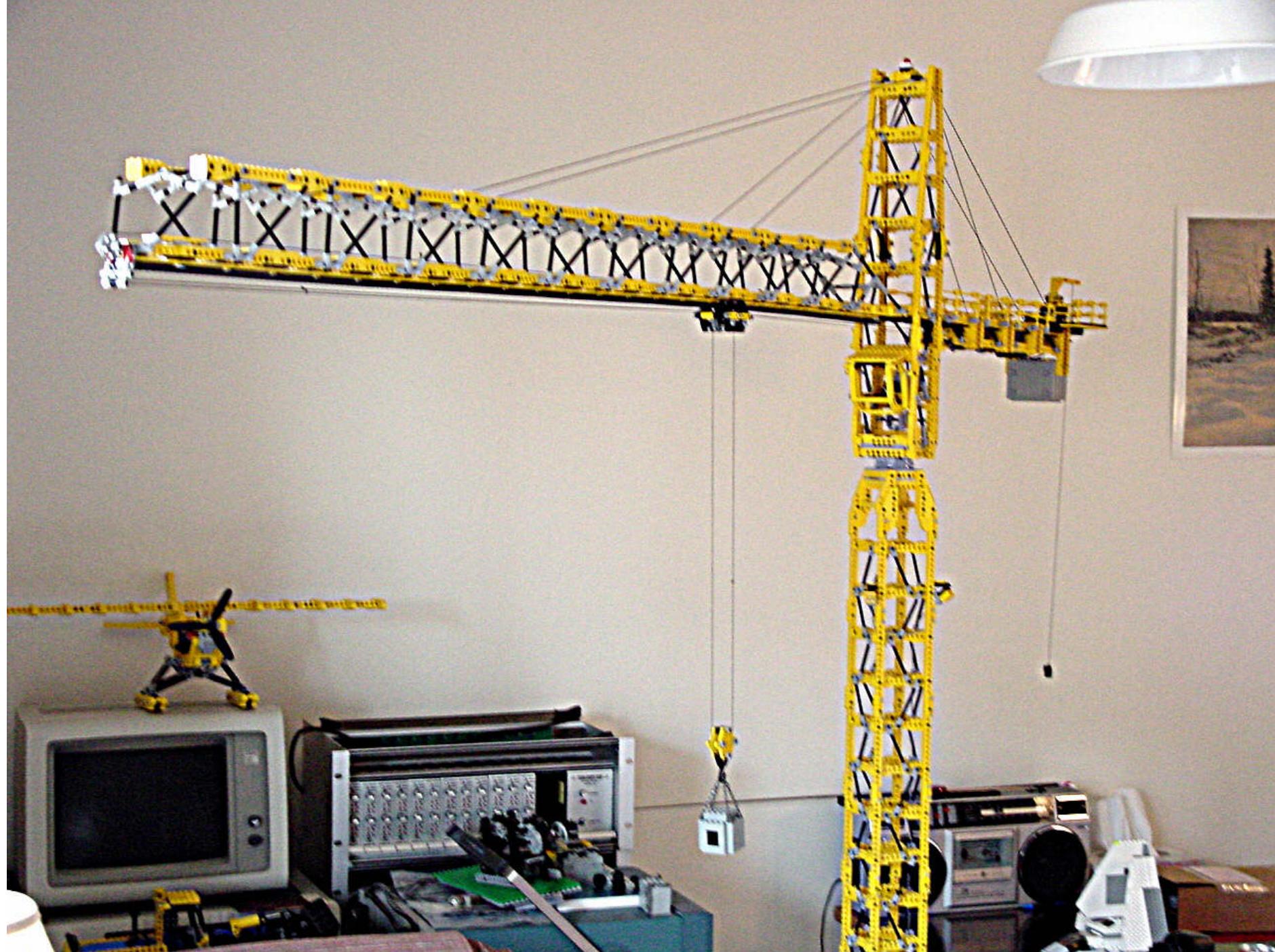


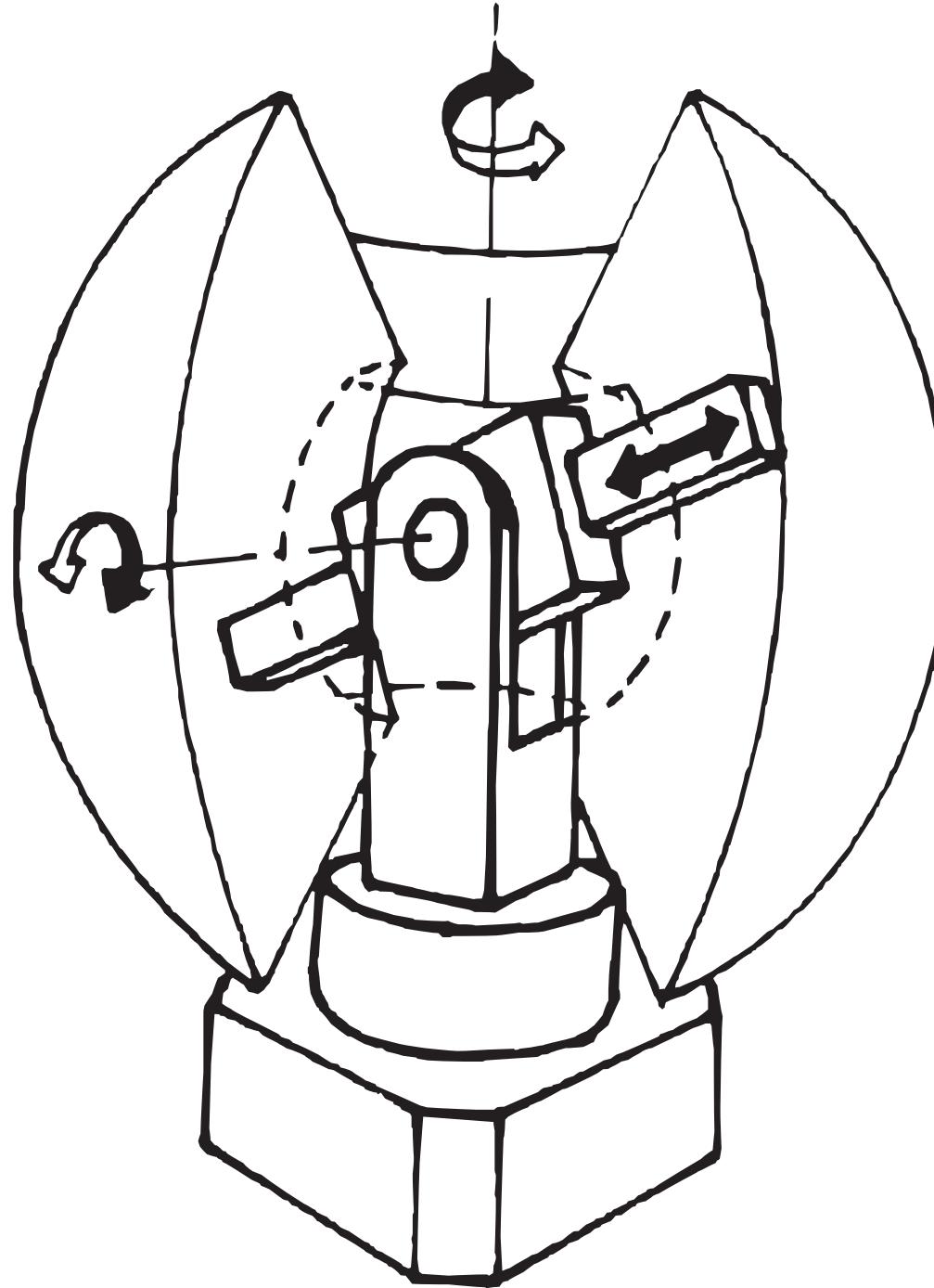






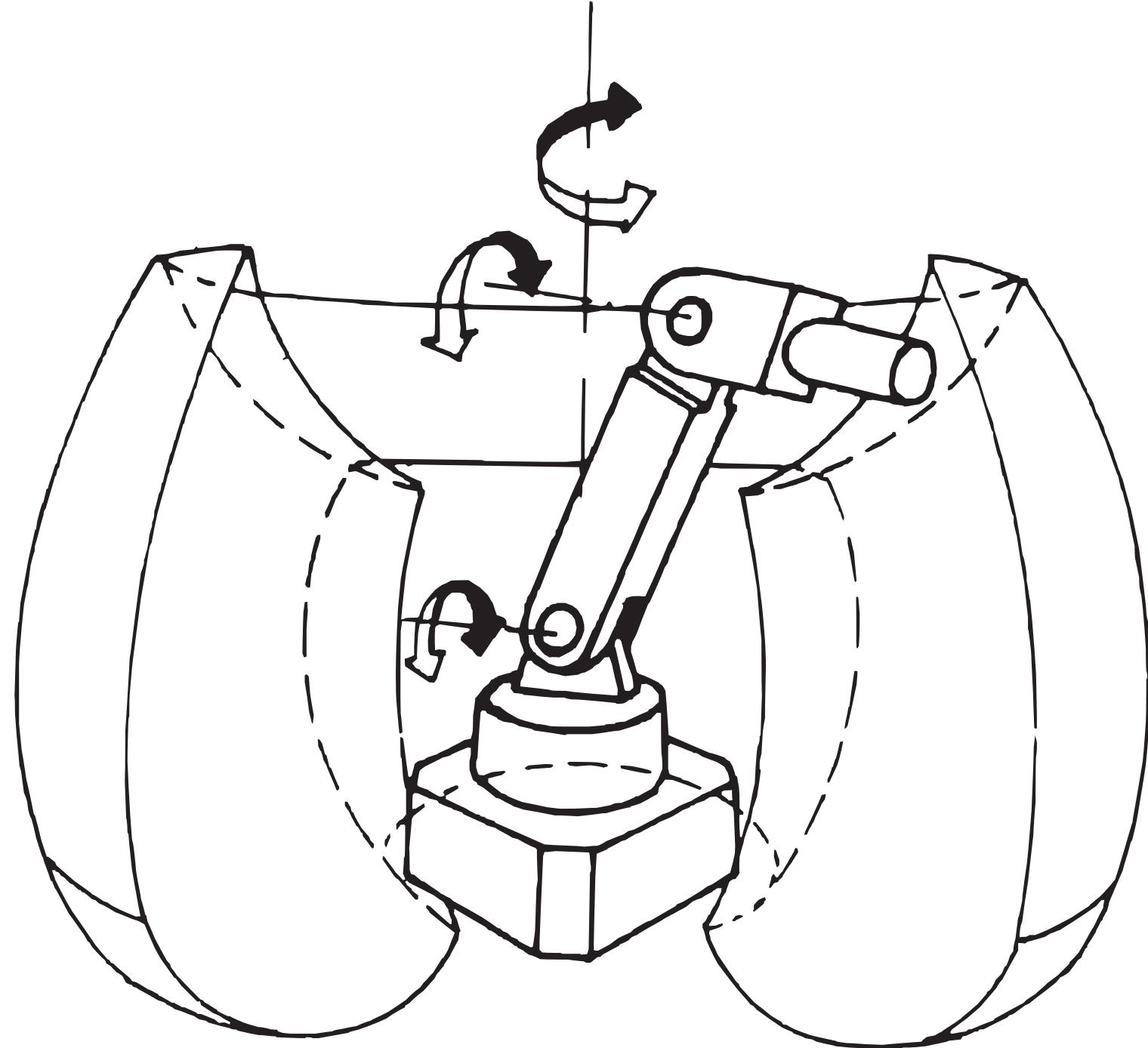




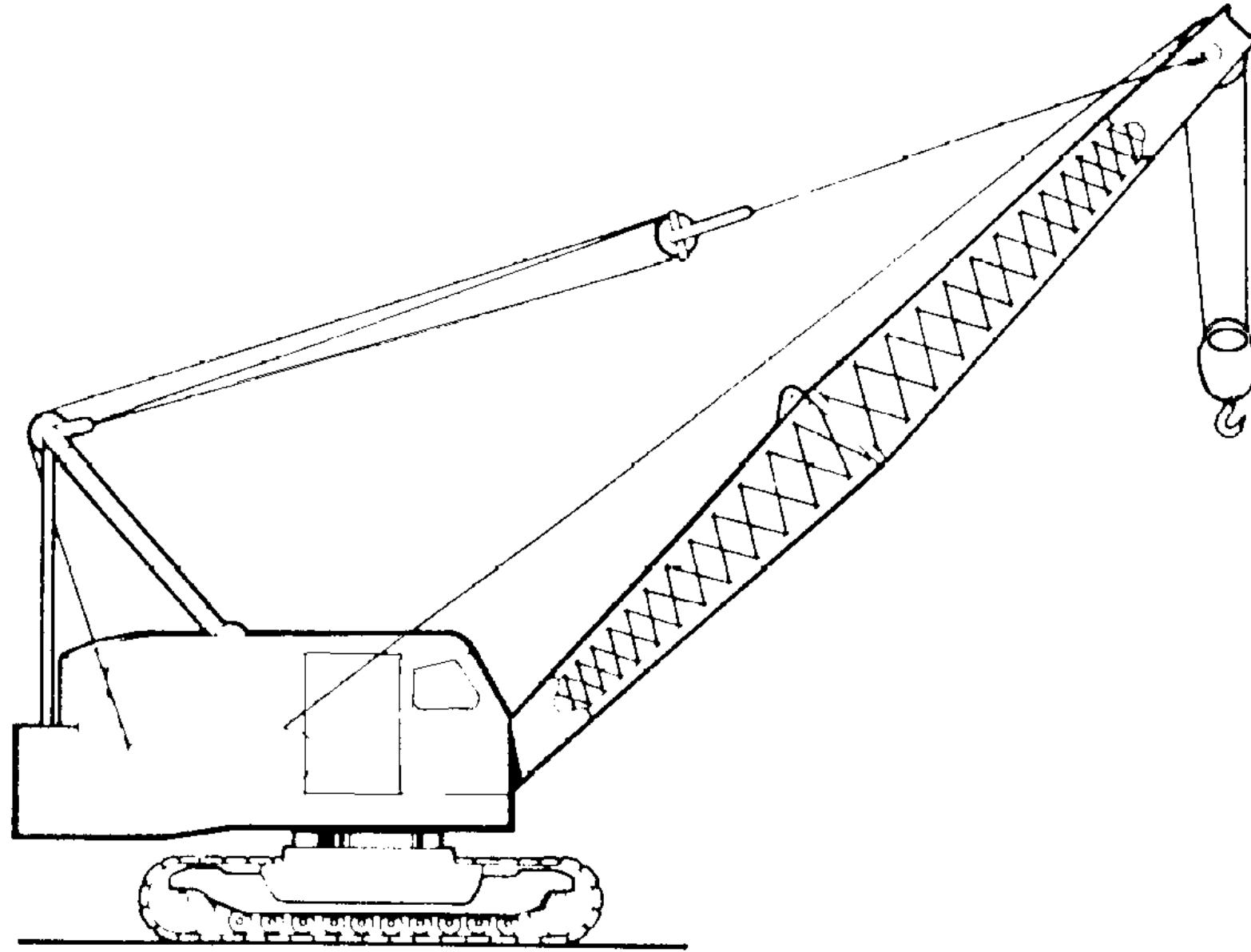




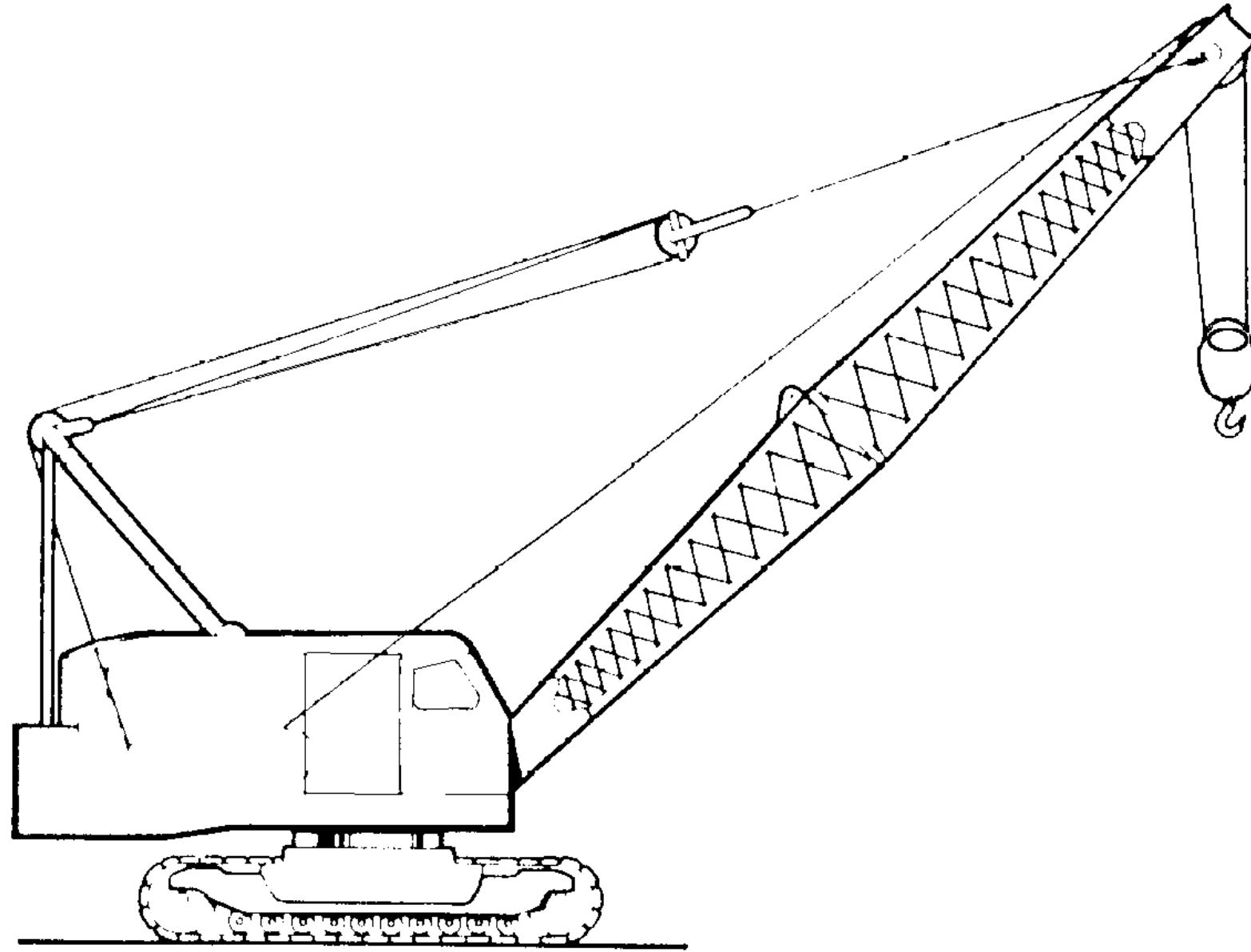




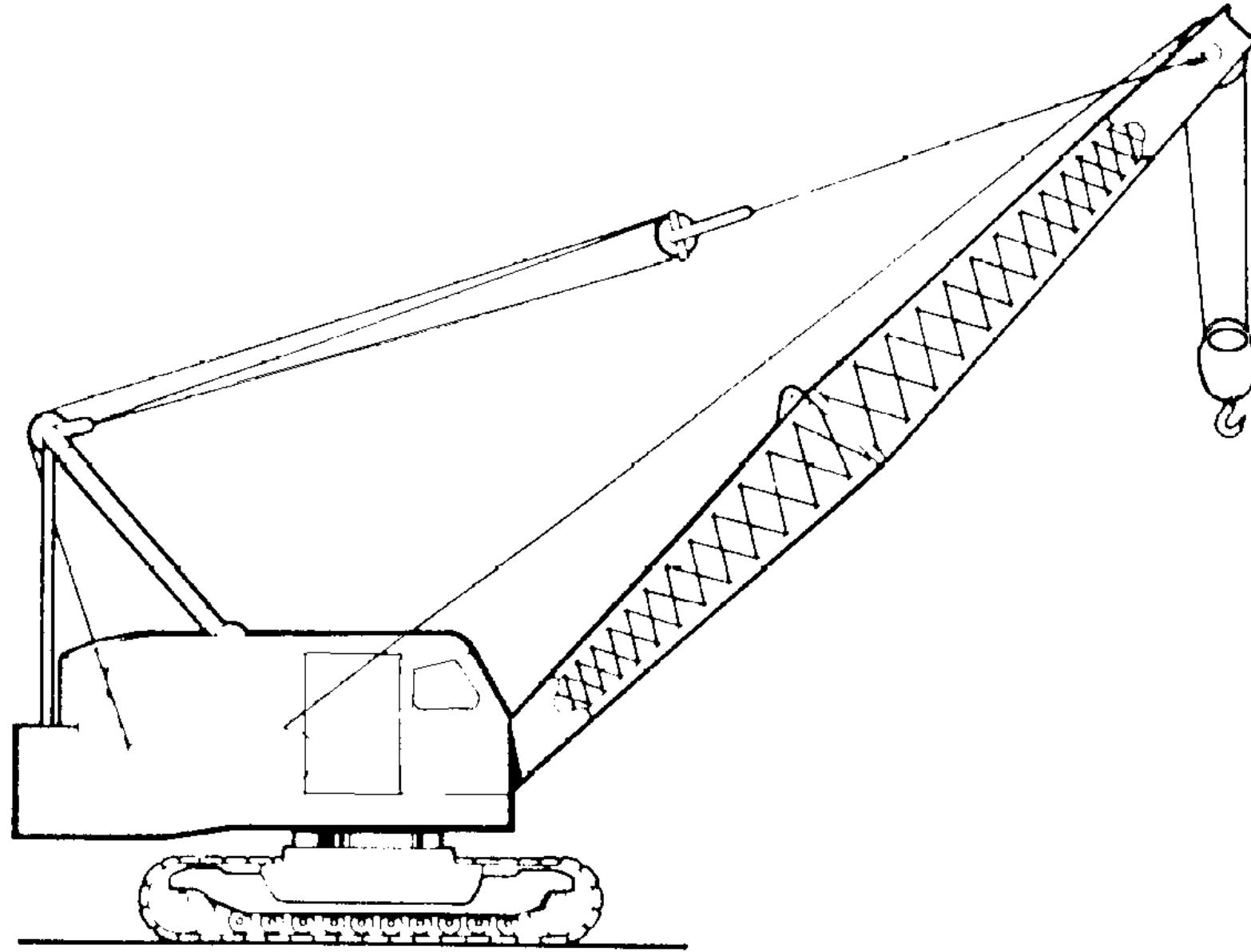




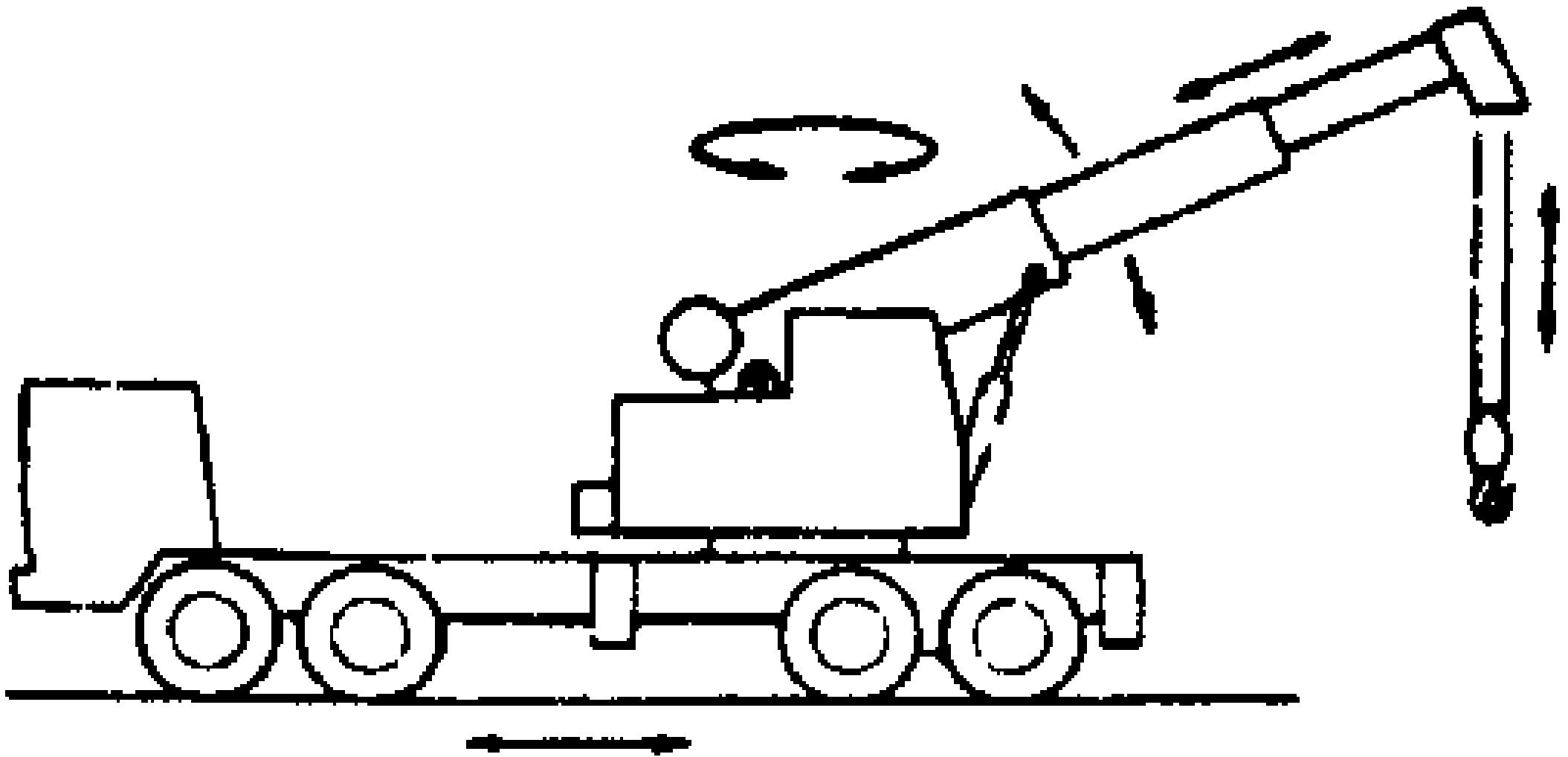




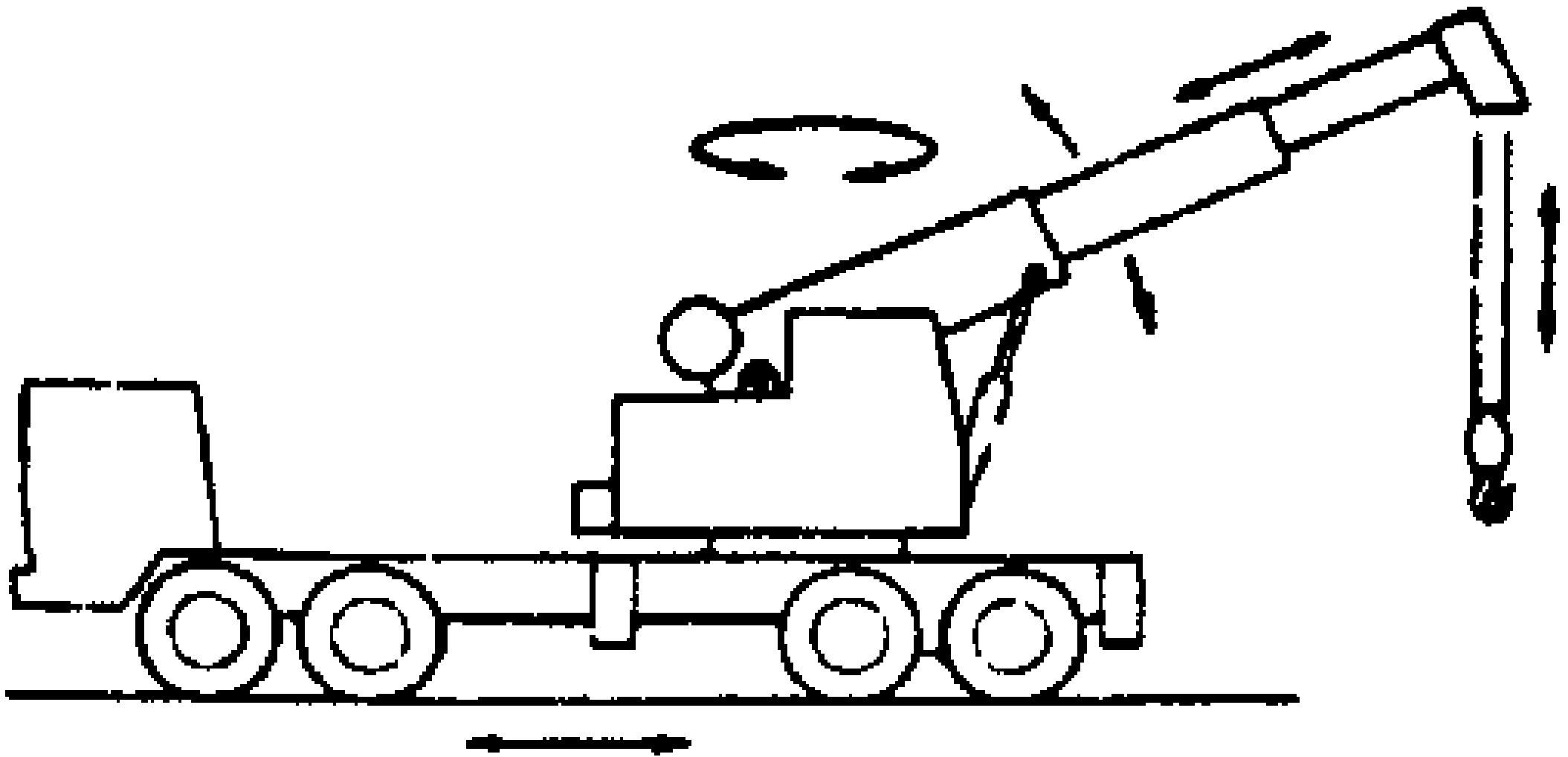




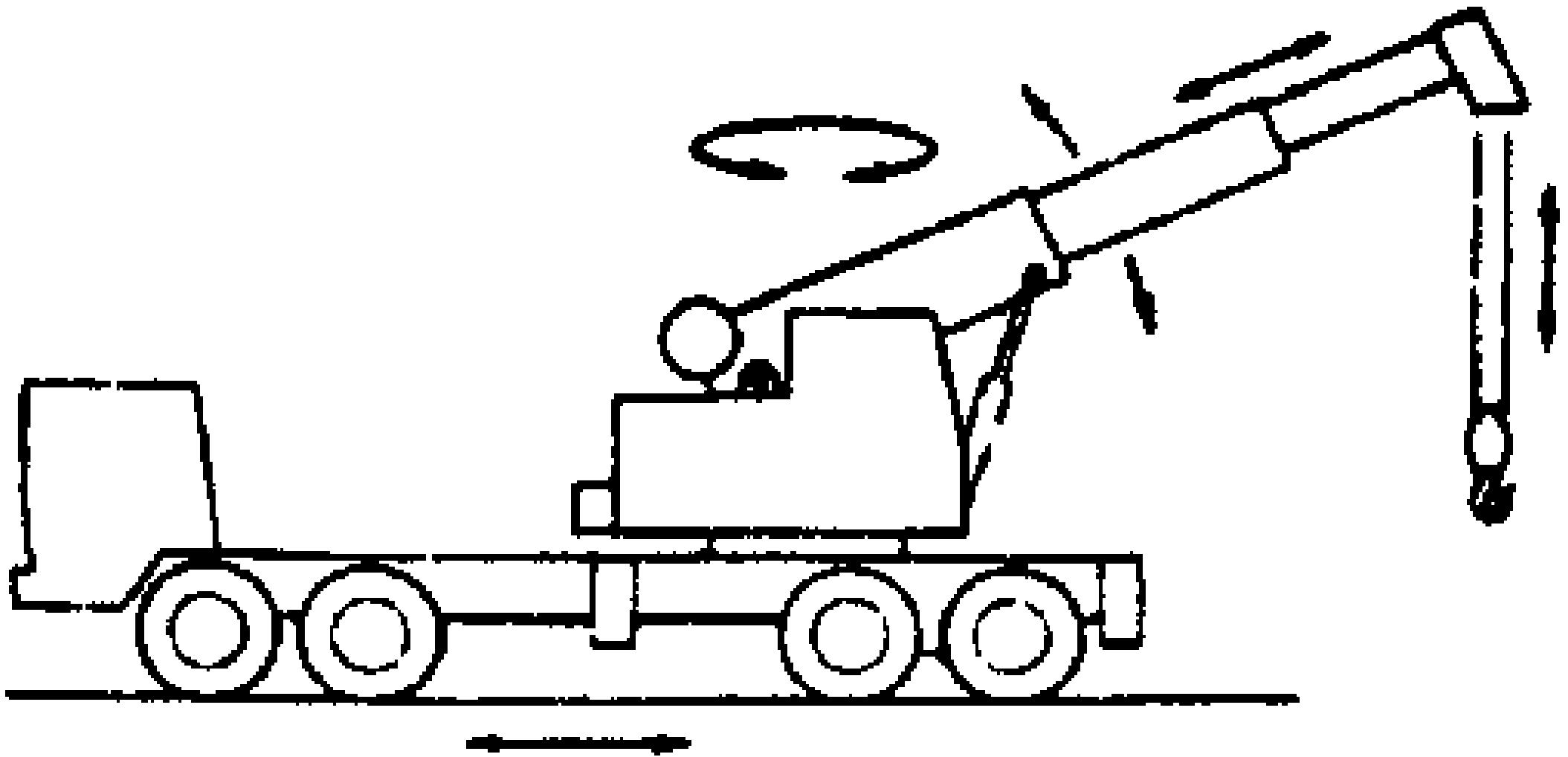




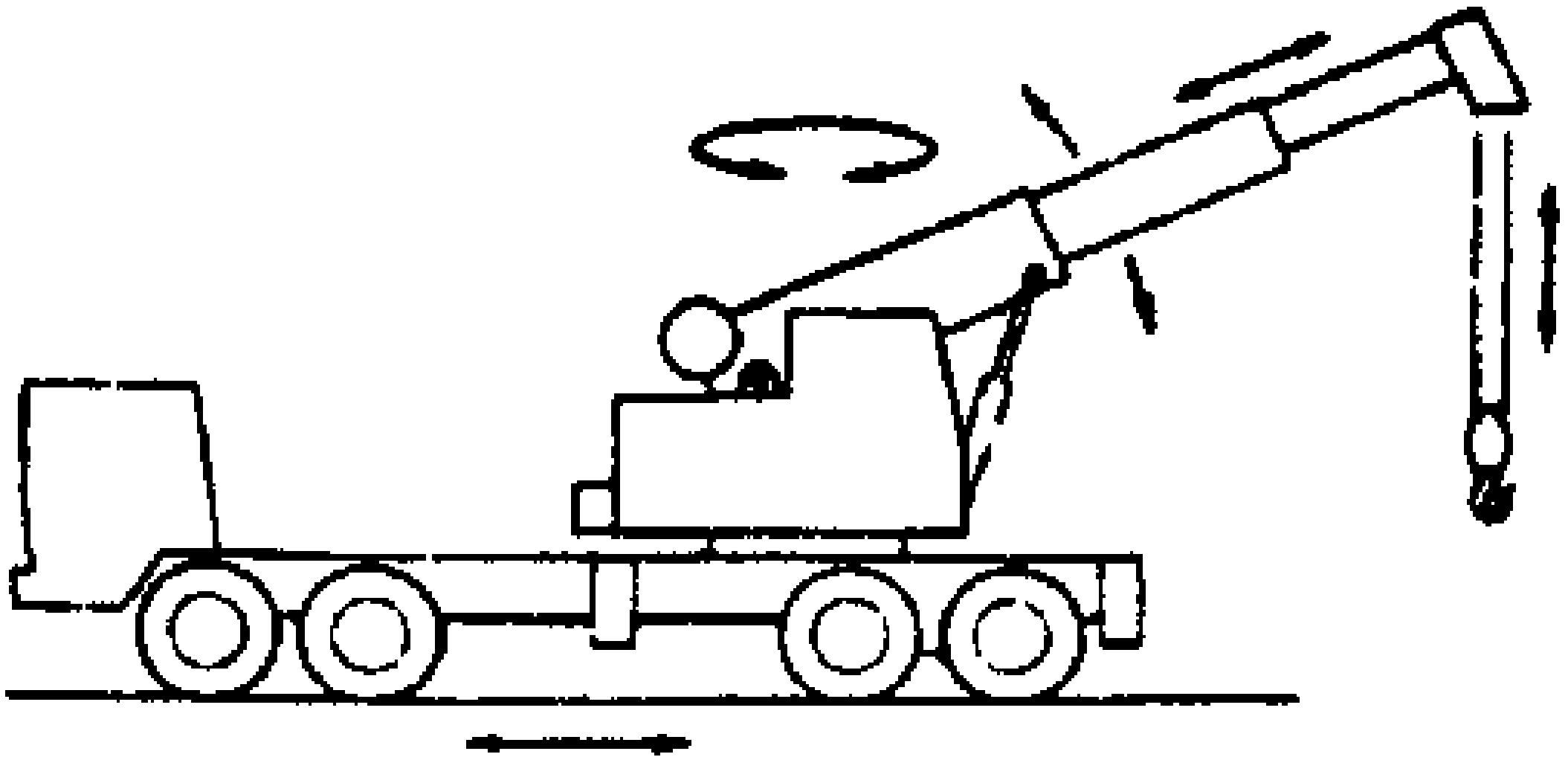




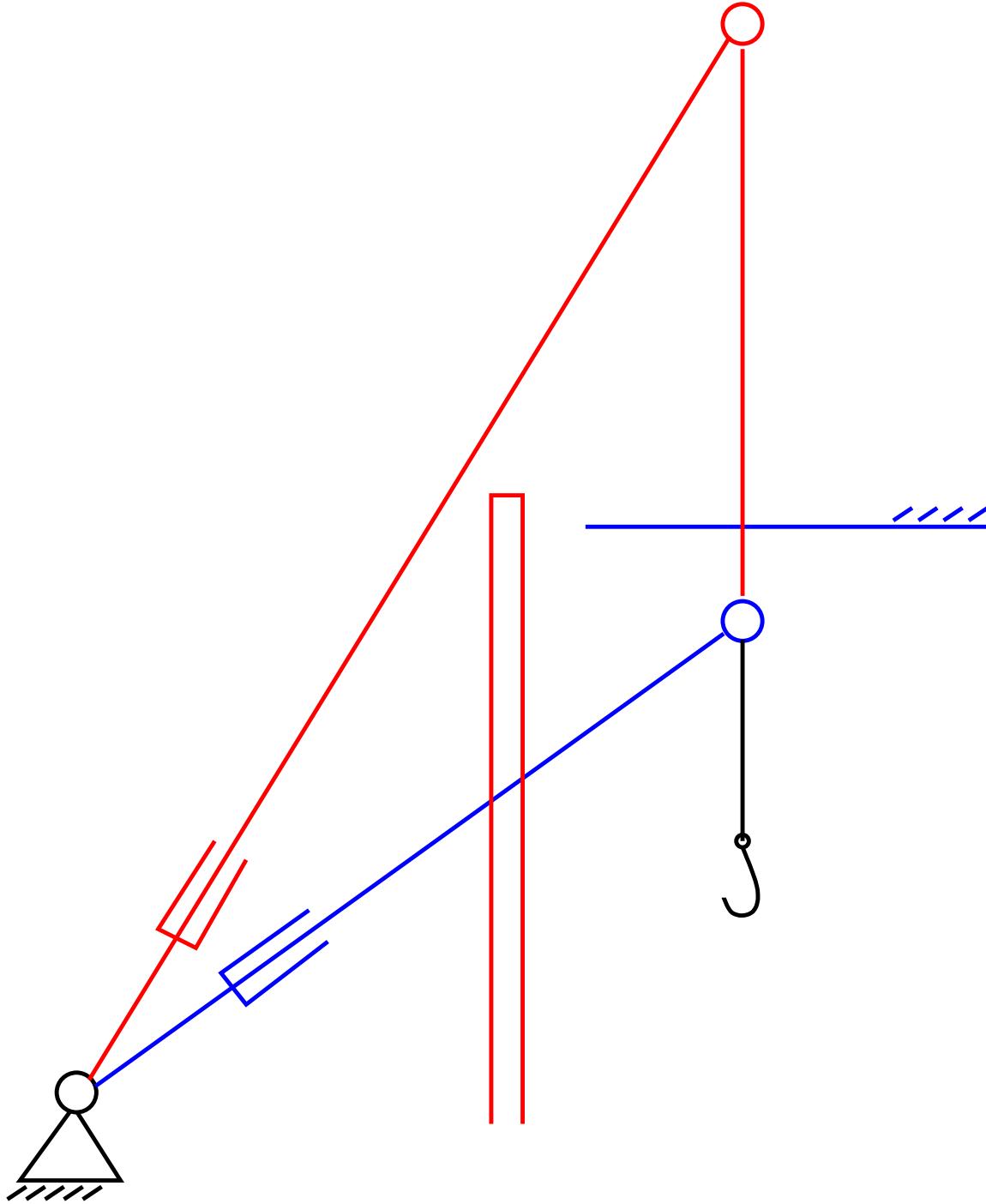


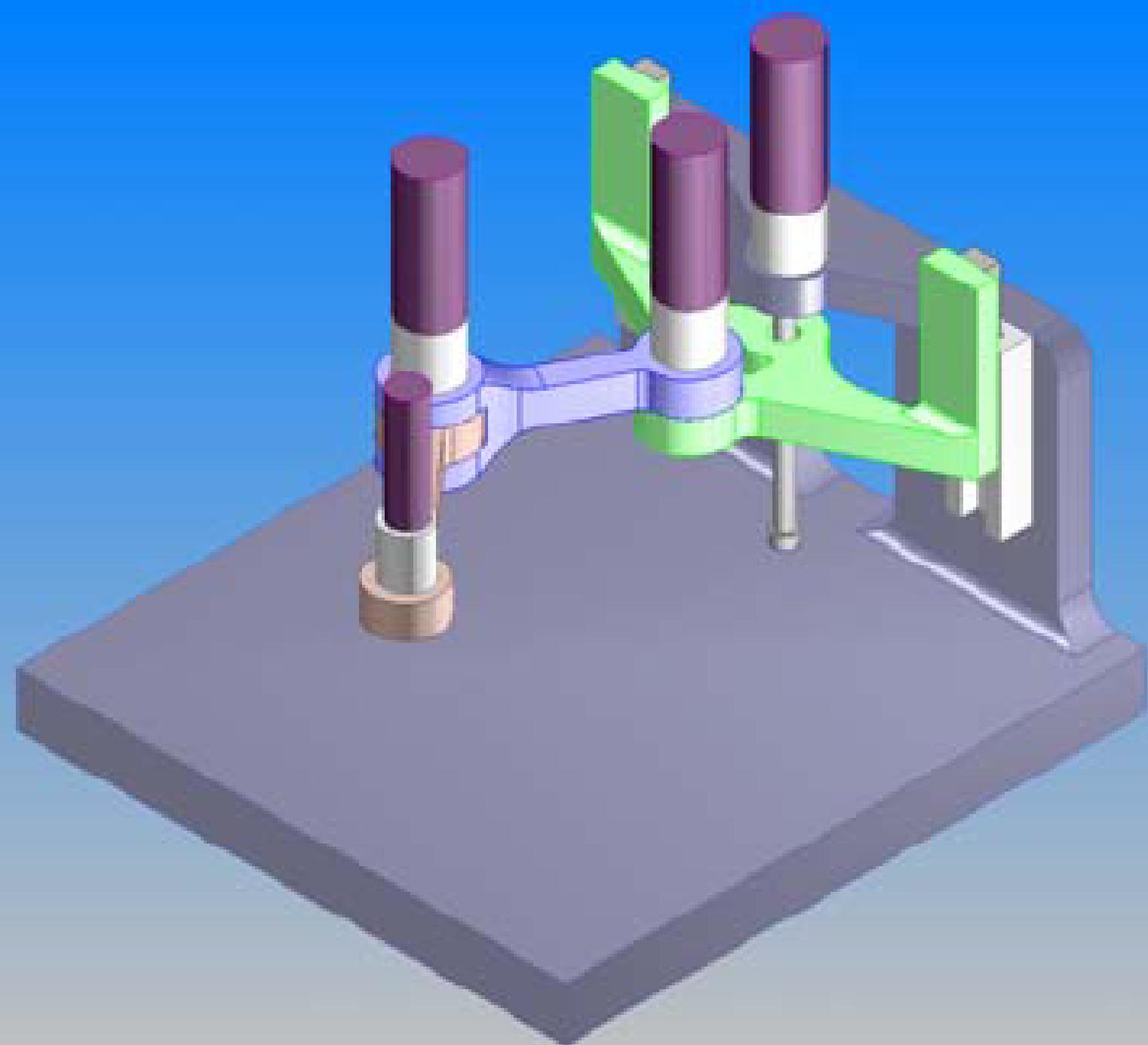


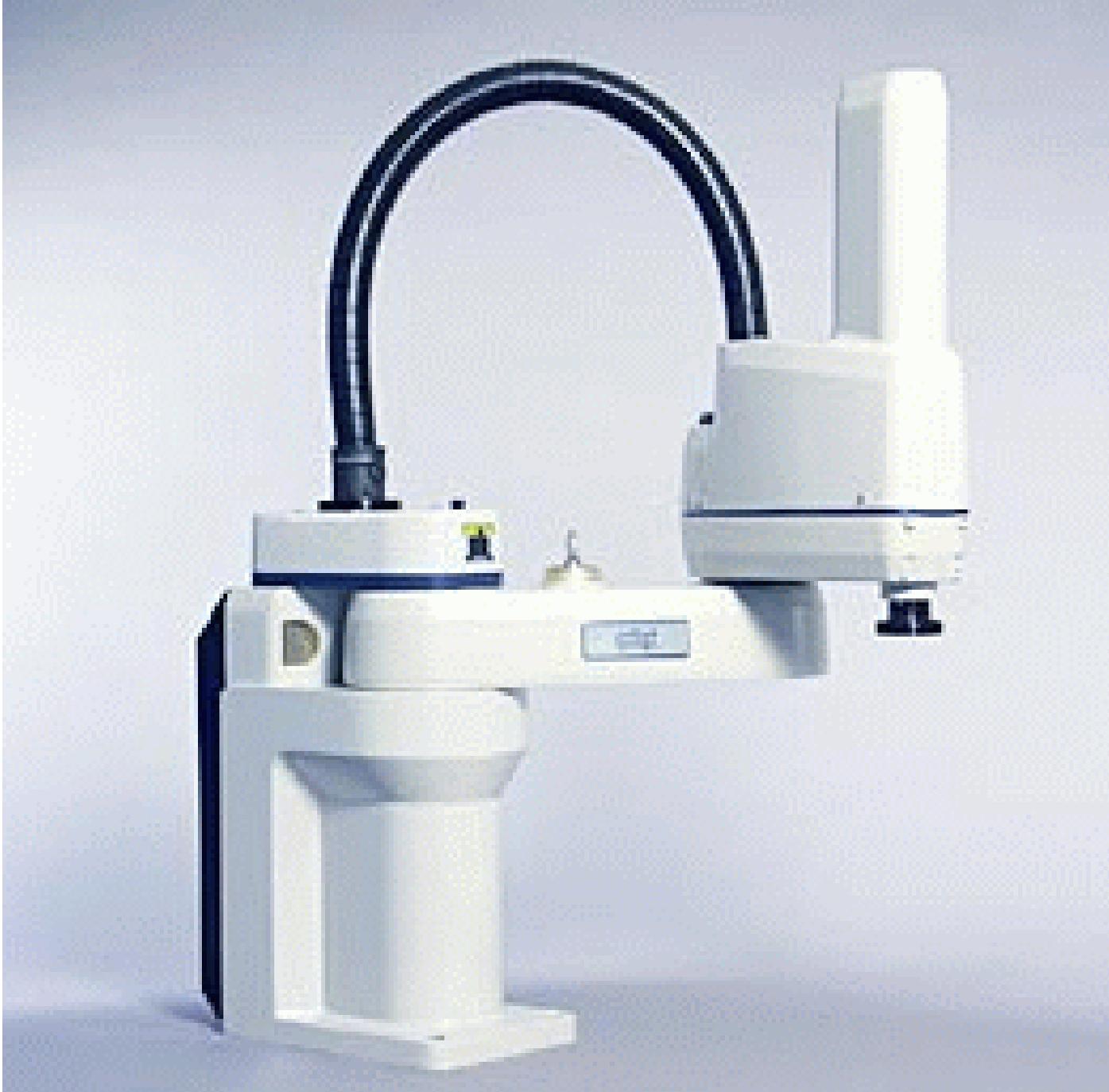


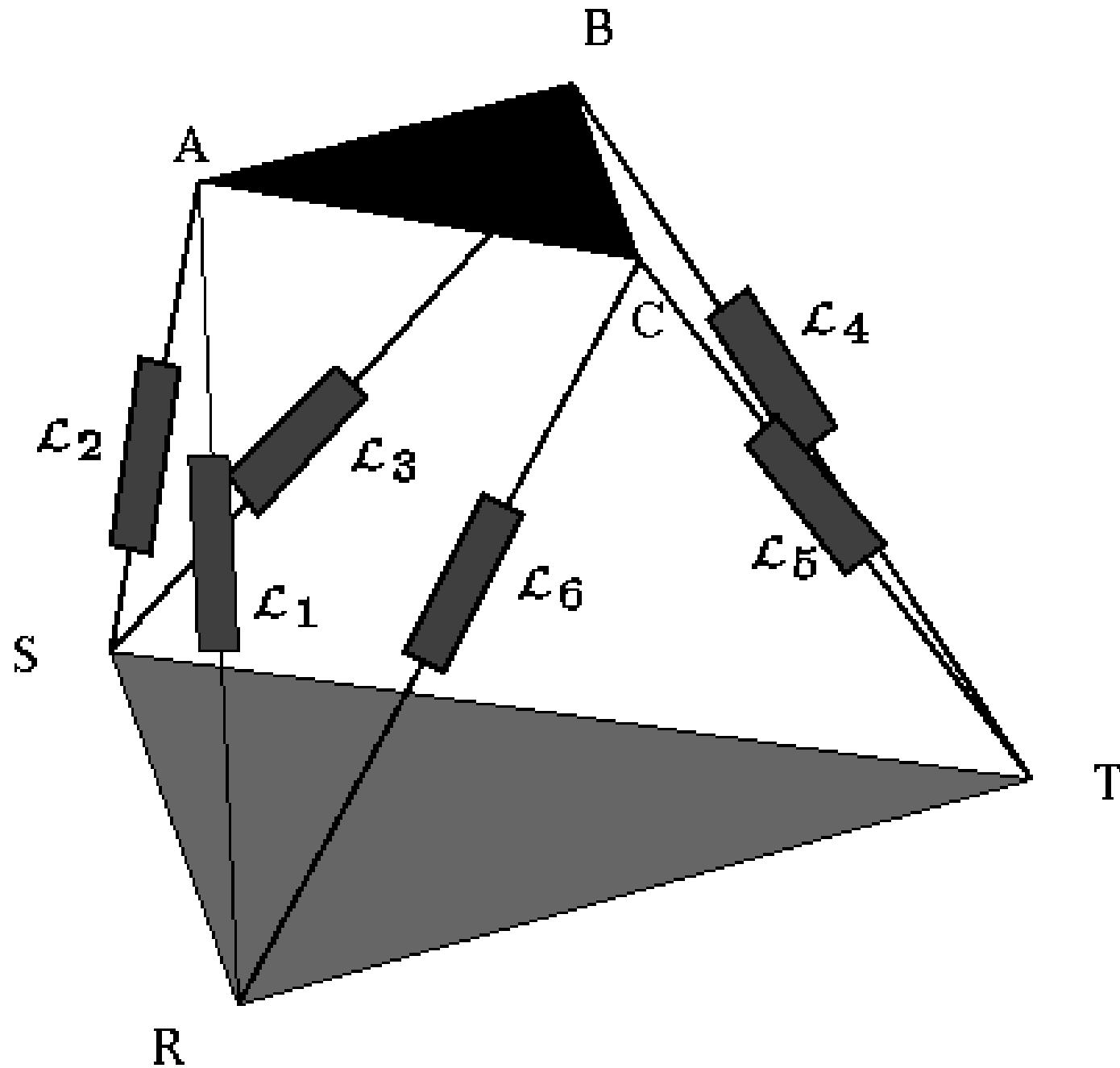


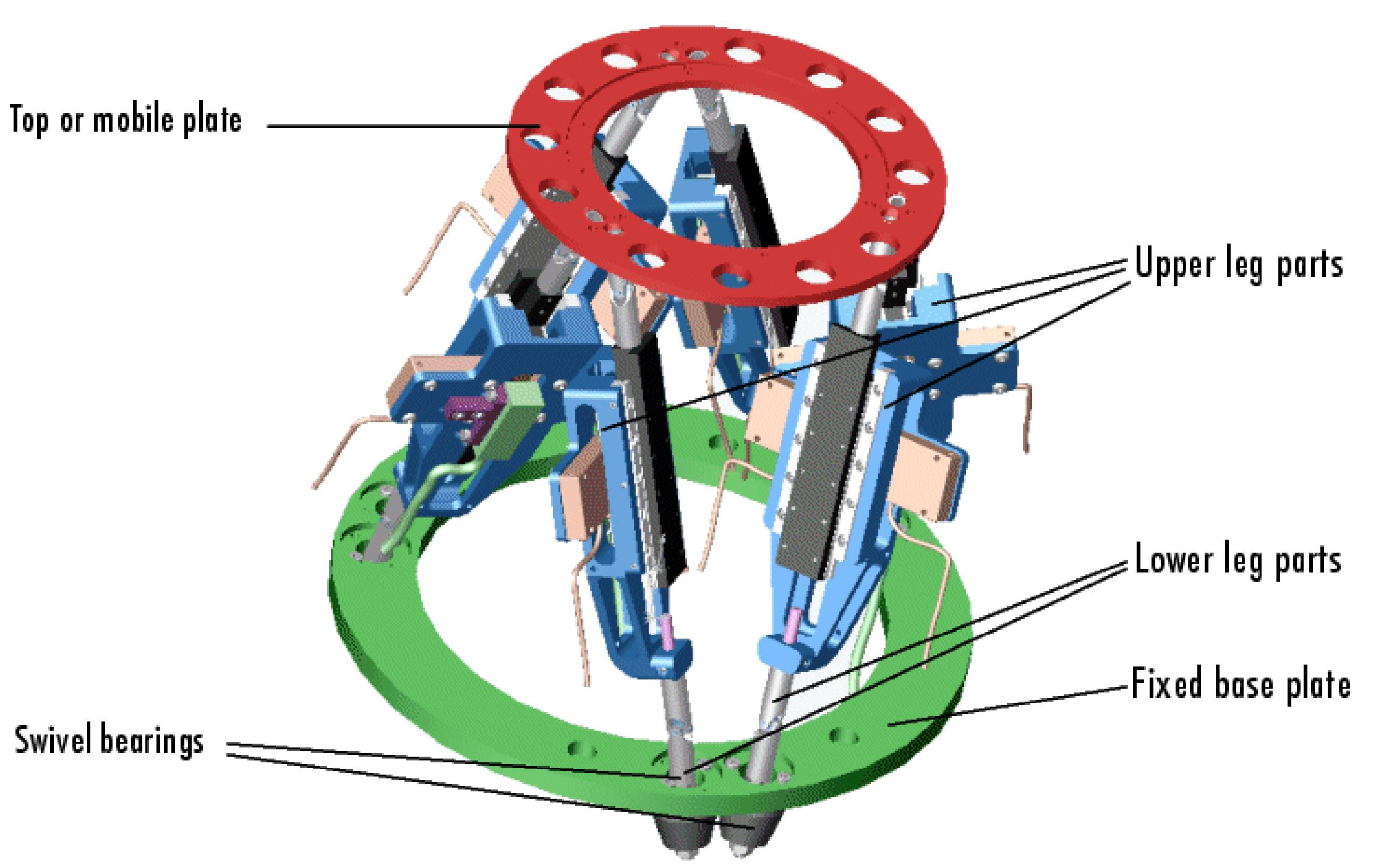












Top or mobile plate

Upper leg parts

Lower leg parts

Fixed base plate

Swivel bearings







