Robotika

Přímá a inverzní kinematika otevřených kinematických řetězců

Vladimír Smutný

Centrum strojového vnímání

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky (CIIRC)

České vysoké učení technické v Praze

Přímá a inverzní kinematická úloha

m	p
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	

Řídicí jednotka robotu většinou měří vnitřní kinematické parametry robotu – kloubové souřadnice. Tyto souřadnice určují polohu jednotlivých kloubů, tedy vzájemnou polohu sousedních ramen. Kloubové souřadnice označujeme $\vec{q}$, kloubovou souřadnici otočného kloubu označujeme θ, kloubovou souřadnici posuvného kloubu označujeme d.

Uživatele zajímá poloha chapadla nebo manipulovaného (tuhého) tělesa. Tato poloha má 6 stupňů volnosti a může být popsána různými popisy, například tranformační maticí popisující polohu souřadnicového systému chapadla ve světovém souřadnicovém systému.

Naším úkolem je najít vztahy mezi těmito popisy polohy robotu.

Studenti si často pletou polohu chapadla (má 6 stupňů volnosti) s polohou středu chapadla (to je bod a má 3 stupně volnosti). Toto je hrubá chyba, protože orientace chapadla je téměř vždy důležitá, ať se jedná o manipulaci nebo např. sváření robotem.

Přímá kinematická úloha

Přímá kinematická úloha je zobrazení z prostoru kloubových souřadnice do prostoru poloh chapadla. To znamená, že známe polohy všech (nebo některých) kloubů a hledáme polohu chapadla ve světovém souřadnicovém systému. Matematicky:

$$\vec{q} \rightarrow \mathbf{T}(\vec{q})$$

Přímé použití tohoto vztahu je v souřadnicových měřicích přístrojích. Snímače na jednotlivých kloubech nás informují o vzájemné poloze ramen, kloubových souřadnicích, úkolem je vypočítat, kde se nachází hrot měřicího přístroje.

Zdůrazněme, že jde o zobrazení, nikoliv o matematickou funkci. Přímá kinematická úloha může mít pro konkrétní parametry $\vec{q}$ žádné, jedno, několik nebo nekonečně mnoho řešení.

Inverzní kinematická úloha

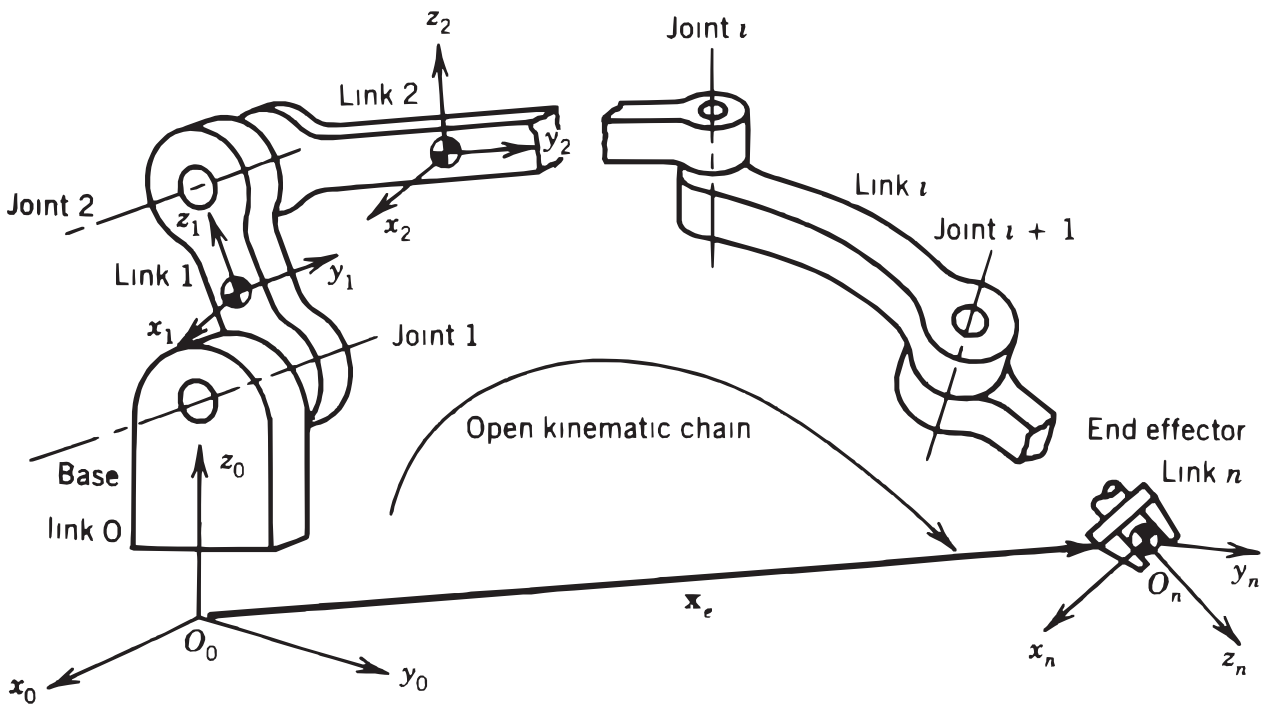
Inverzní kinematická úloha je zobrazení z prostoru poloh chapadla do prostoru kloubových souřadnic. To znamená, že známe polohu chapadla ve světovém souřadnicovém systému a hledáme polohy všech kloubů. Matematicky:

$$\mathbf{T} \rightarrow \vec{q}(\mathbf{T})$$

Inverzní kinematická úloha je potřeba například při řízení manipulátoru. Uživatel zadává požadovanou polohu chapadla, pro řízení jsou ale potřeba kloubové souřadnice.

Zdůrazněme, že jde o zobrazení, nikoliv o matematickou funkci. Inverzní kinematická úloha může mít pro konkrétní parametry $\vec{q}$ žádné, jedno, několik nebo nekonečně mnoho řešení.

Otevřený kinematický řetězec

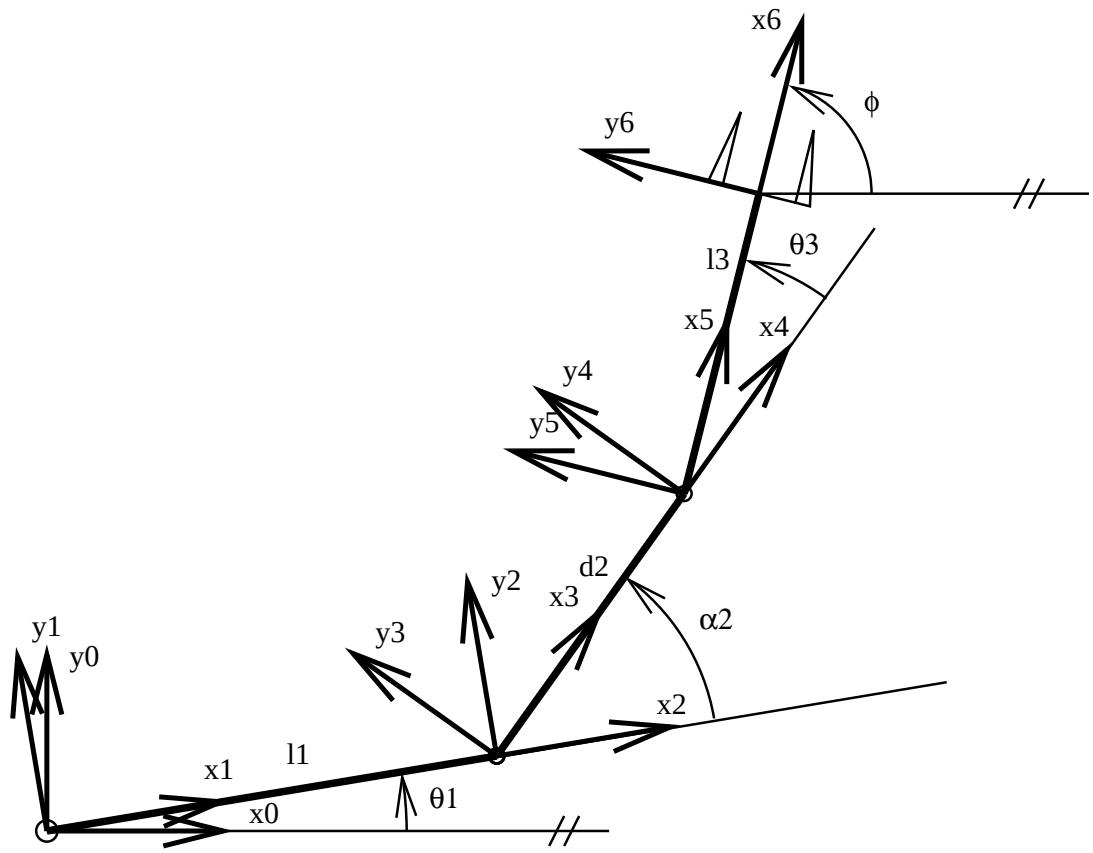


m	p
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	

Modelování otevřeného kinematického řetězce

Otevřený kinematický řetězec je tvořen posloupností těles spojených klouby. Známe-li popis klouby dovolených pohybů pomocí geometrických transformací, můžeme snadno nalézt transformace bodu ze souřadnic chapadla do souřadnic rámu a naopak. Jde o takzvanou **přímou kinematickou úlohu**.

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



Transformace homogenních souřadnic v rovině lze popsat transformační maticí A

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}^b,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{x}_o \\ 0\,0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & x_o \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kde ϕ je vzájemný úhel otočení souřadnicových soustav. Inverzní matice je pak samozřejmě:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{x}_o \\ 0\,0 & 1 \end{bmatrix} = \tag{1}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & -\cos(\phi)x_o - \sin(\phi)y_o \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & \sin(\phi)x_o - \cos(\phi)y_o \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

Jednoduchý seriový manipulátor je ukázán na obrázku. Manipulátor se skládá z otočného kloubu (kloubová proměnná θ_1), ramene délky l_1, posuvného kloubu s kloubovou proměnnou d_2, osa posuvného kloubu je skloněna pod úhlem α_2 vzhledem k l_1. Další kloub je otočný s kloubovou souřadnicí θ_3. Na konci ramene délky l_3 je chapadlo. Osa chapadla s osou x souřadnicového systému rámu svírá úhel ϕ, počátek souřadnicového systému chapadla je v souřadnicovém systému rámu označen $G_0 = (x_0, y_0)^T$.

Musíme přiřadit každému ramenu souřadnicový systém, zde pro názornost přiřazujeme souřadnicový systém dokonce každému konci ramene. Transformace mezi souřadnicovými systémy pak mají velmi jednoduchý tvar, protože reprezentují buď jen otočení nebo posunutí. Transformace jsou pak v našem případě v tomto pořadí od rámu: rotace o θ_1, posunutí o pevné l_1, rotace o pevné α_2, posunutí o d_2, rotace o θ_3 a posunutí o l_3. Jednotlivé transformační matice pak vypadají:

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$\mathbf{A}_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_2) & -\sin(\alpha_2) & 0 \\ \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

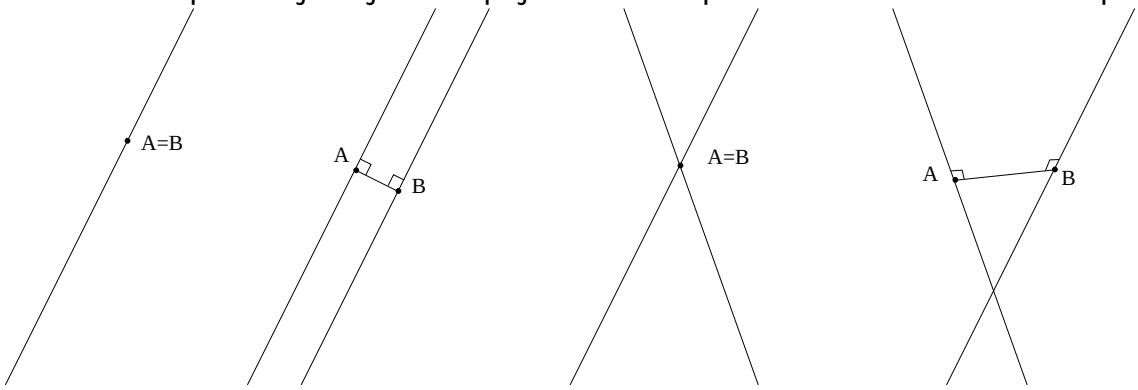
$$\mathbf{A}_5^4 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}_1^0\mathbf{A}_2^1\mathbf{A}_3^2\mathbf{A}_4^3\mathbf{A}_5^4\mathbf{A}_6^5 x_6. \tag{9}$$

Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru a jejich příčka

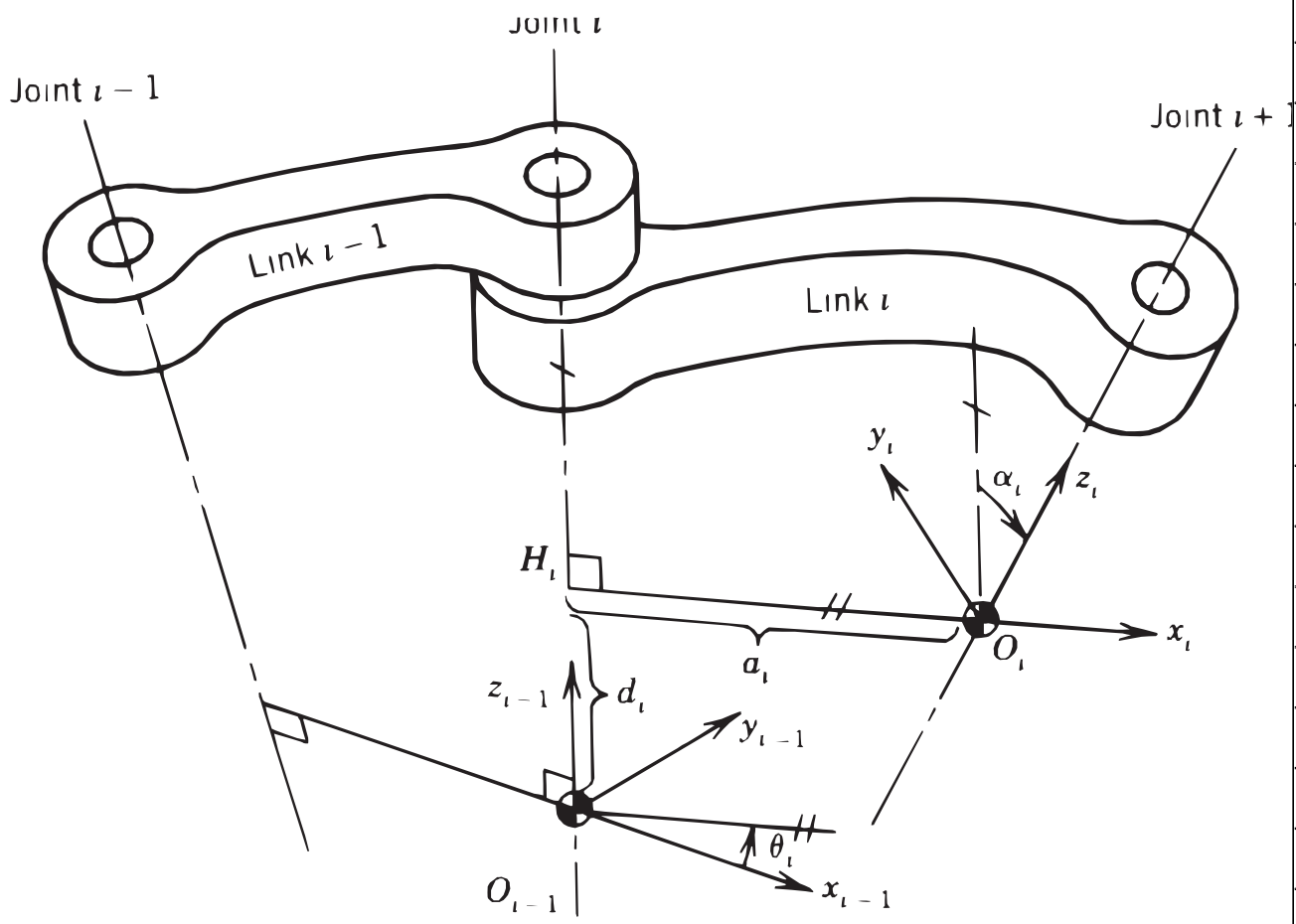
Příčka dvou přímek je nejkratší spojnice těchto přímek. Je kolmá k oběma přímkám.



Vzájemná poloha dvou přímek může být:

- totožné přímky, oba konce degenerované příčky můžeme umístit do kteréhokoliv bodu přímky,
- rovnoběžky, příčka je kolmá k oběma, můžeme ji umístit kdekoliv podél přímek,
- různoběžky, příčka zdegenerovaná do bodu je v místě křížení,
- mimoběžky, poloha příčky je jednoznačně dána, je kolmá k oběma přímkám.

Modelování otevřeného kinematického řetězce v prostoru – Denavitova-Hartenbergova notace



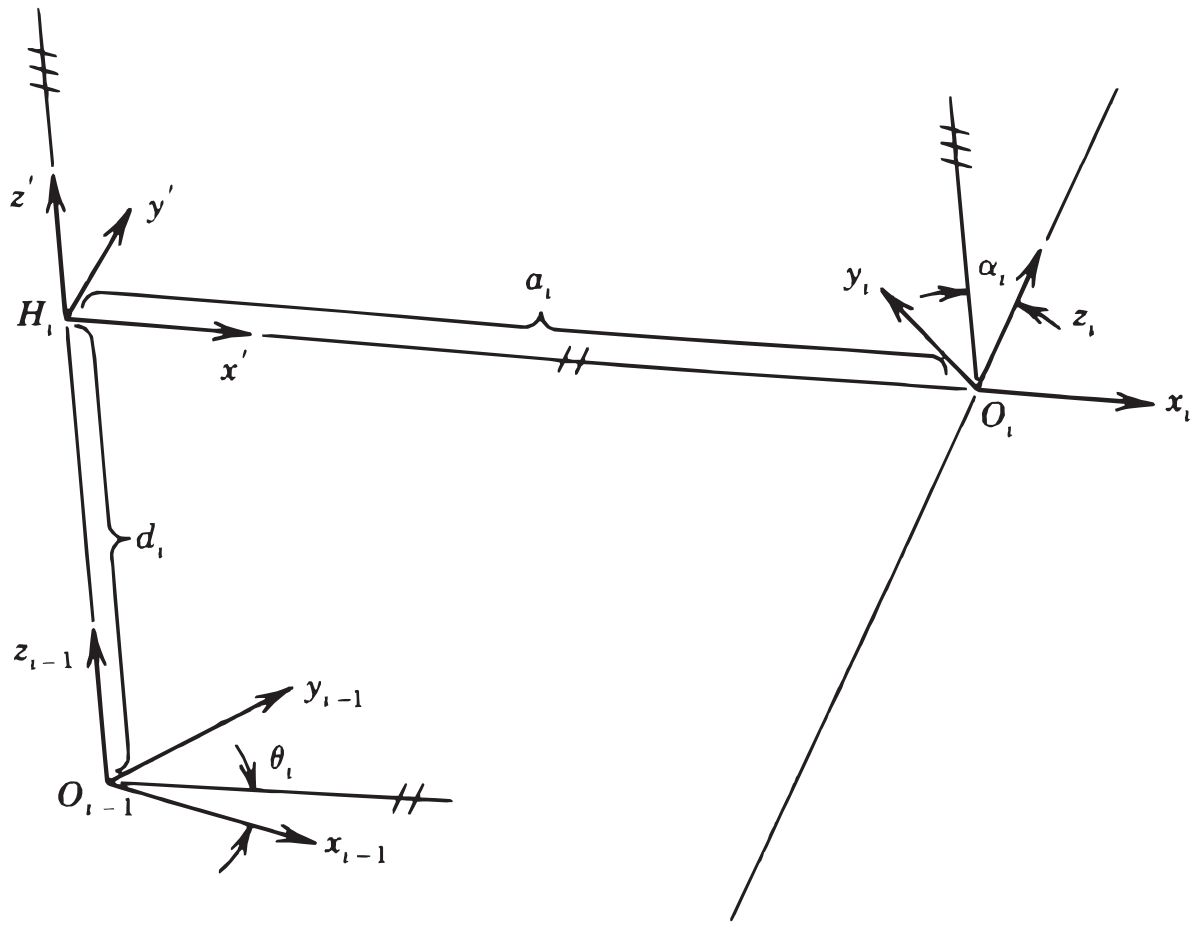
Jednoznačný a efektivní popis jednotlivých transformací můžeme nalézt metodou Denavitovou–Hartenbergovou (Denavitova–Hartenbergova notace).

Eulerova věta o existenci osy pohybu říká, že každý pohyb tuhého tělesa v prostoru lze reprezentovat jako složení rotace okolo určité osy a posunu ve směru této osy. Tato věta umožňuje formalizovat postup řešení přímé kinematické úlohy otevřeného kinematického řetězce, jednou formalizací je právě D–H notace. D–H notace je dále založena na principu matematické indukce, proto **je možné D–H notaci použít pouze pro otevřené kinematické řetězce** (zamyslete se proč).

Popisujeme kloub i.

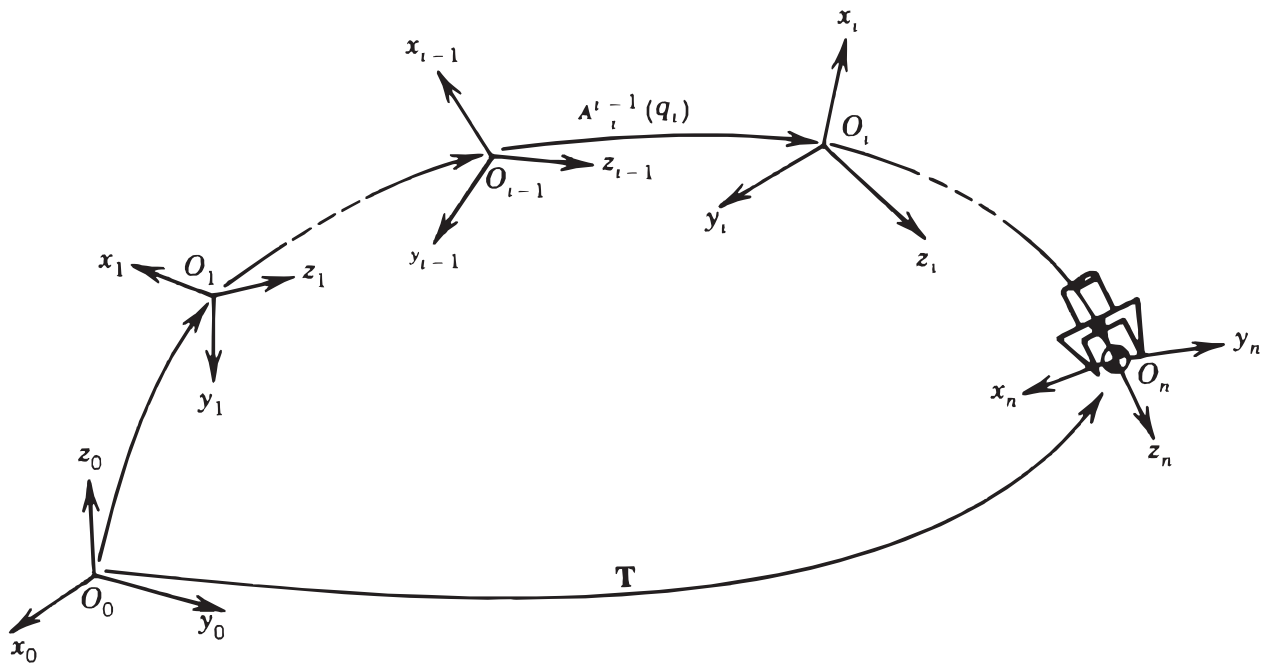
1. Nalezneme osy otáčení kloubů $i-1$, i, $i+1$.
2. Nalezneme příčku (společnou normálu) os kloubů $i-1$ a i a os kloubů i a $i+1$.
3. Nalezneme body O_{i-1}, H_i, O_i.
4. Osu z_i položme do osy kloubu $i+1$.
5. Osu x_i položme do prodloužení příčky H_iO_i.
6. Osa y_i tvoří s ostatními pravotočivou soustavu.
7. Označme vzdálenost bodů $|O_{i-1}, H_i| = d_i$.
8. Označme vzdálenost bodů $|H_i, O_i| = a_i$.
9. Označme úhel mezi příčkami θ_i.
10. Označme úhel mezi osami kloubů i, $i+1$ α_i.
11. Pro rám je možné zvolit polohu bodu O_o kdekoliv na ose kloubu a osu x_0 orientovat libovolně. Například tak, aby $d_1 = 0$.
12. Pro chapadlo je možné opět zvolit bod O_n a orientaci osy z_n při dodržení ostatních pravidel.
13. Jsou-li osy dvou po sobě jdoucích kloubů rovnoběžné, je možné polohu příčky zvolit, například tak, že $d_i = 0$.
14. Pro posuvné klouby lze polohu osy kloubu zvolit.

Sousední souřadnicové systémy v DH



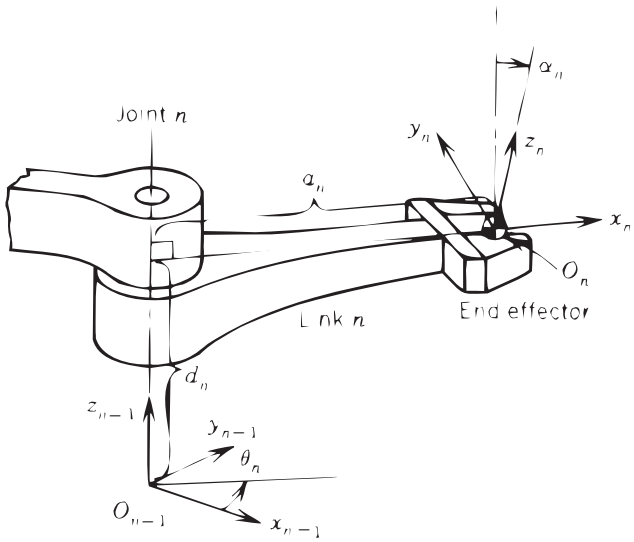
m	p
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	

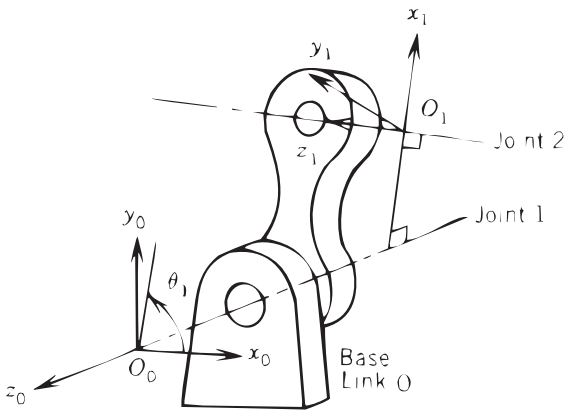
Poloha chapadla v souřadnicovém systému rámu



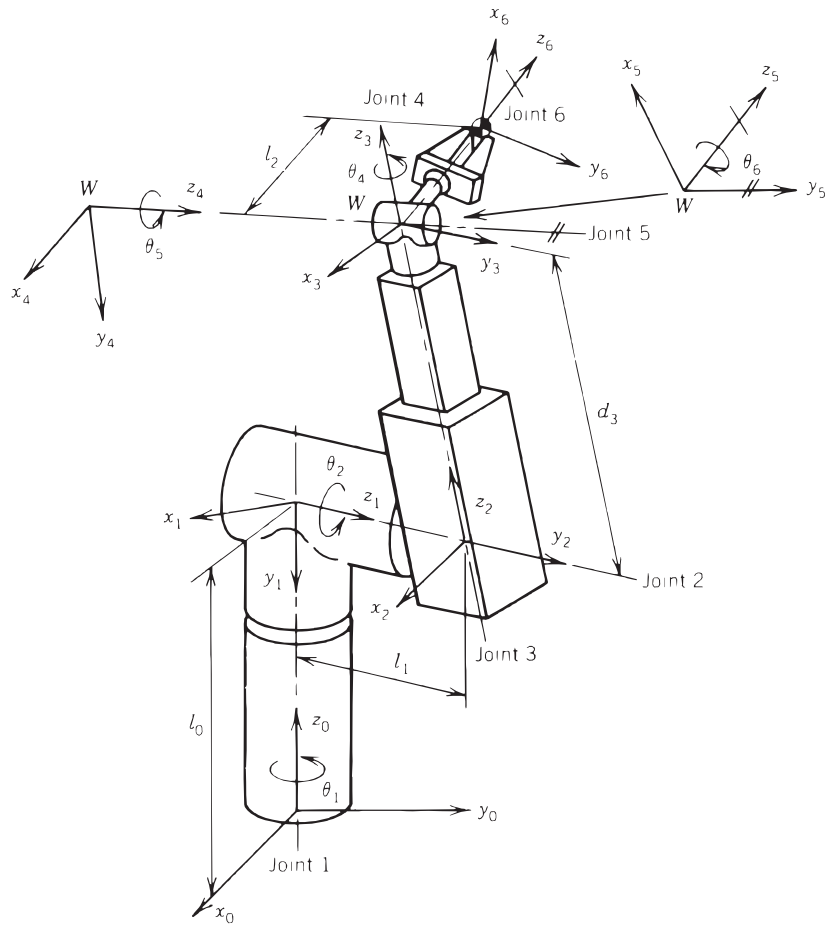
m	p
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	

Souřadnicové systémy rámu a chapadla





5-R-1-P manipulátor



Transformace v kloubu je zcela popsána čtyřmi parametry θ_i, d_i, a_i, α_i. Parametry a_i, α_i jsou konstanty, jeden z parametrů d_i, θ_i se mění s pohybem kloubu.

Klouby jsou většinou:

- **Otočné**, pak je d_i konstanta a θ_i se mění,
- **Posuvné**, pak je θ_i konstanta a d_i se mění.

Transformační matici $\mathbf{A}$ pak vypočteme jako

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \mathbf{A}_{int}^{i-1}\mathbf{A}_i^{int},$$

kde

$$\mathbf{A}_{int}^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_i^{int} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Snadno zjistíme, že:

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Označme q_i ten z parametrů θ_i, d_i, který se mění. Výraz 9 pak můžeme přepsat na

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}_1^0(q_1)\mathbf{A}_2^1(q_2)\mathbf{A}_3^2(q_3)\mathbf{A}_4^3(q_4)\ldots\mathbf{A}_n^{n-1}(q_n)\mathbf{x}^n.$$

Pro každou hodnotu vektoru $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots q_n) \in \mathcal{Q} = \mathcal{R}^n$ pak můžeme vypočítat souřadnice bodu P v souřadnicích rámu ze zadaných souřadnic v souřadnicové soustavě chapadla a naopak..

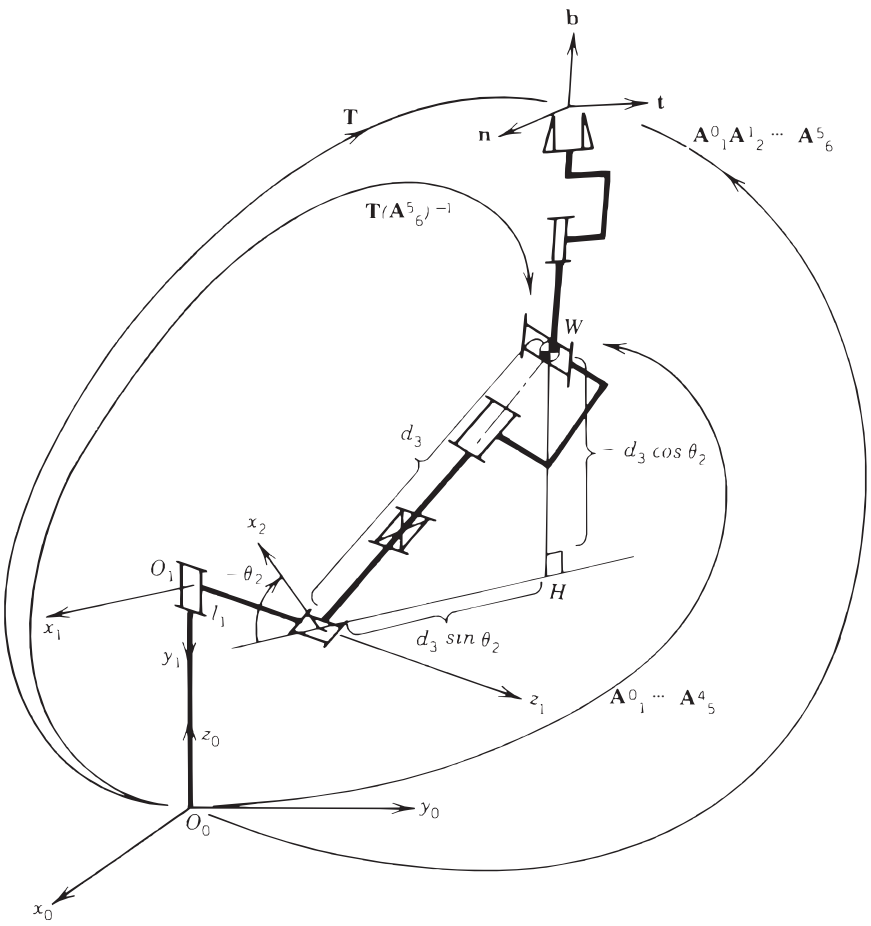
Přímá kinematická úloha pro otevřený kinematický řetězec je tedy vždy řešitelná analyticky.

Denavit–Hartenberg

Matice reprezentující transformaci mezi sousedními rameny

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Inverzní kinematika 5-R-1-P manipulátoru



Inverzní kinematická úloha

Inverzní kinematickou úlohou nazýváme problém, kdy je dána matice

$$\mathbf{T}(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1)\mathbf{A}_2^1(q_2)\mathbf{A}_3^2(q_3)\mathbf{A}_4^3(q_4)\ldots\mathbf{A}_n^{n-1}(q_n). \qquad (10)$$

a hledáme hodnoty koeficientů $\mathbf{q}$. Obecně se jedná o soustavu nelineárních (většinou trigonometrických) rovnic, která není analyticky řešitelná.

Řešení inverzní kinematické úlohy:

- Analyticky, pokud to lze, neexistuje obecný návod, jak úlohu řešit. Existuji dílčí navody, jak řešit některé speciální roboty.
- Numericky.
- Tabulkou, předpočítanou pro pracovní prostor $\mathcal{W} \subset \mathcal{Q}$.

Existují struktury robotu, které lze řešit analyticky, takové struktury nazýváme řešitelné.

Postačující podmínka pro řešitelnost struktury je např. to, že pro robota se šesti stupni volnosti tři po sobě jdoucí rotační klouby mají osy protínající se v jednom bodě nezávisle na pohybu nebo tři po sobě jdoucí osy musí být rovnoběžné.

Jinou vlastností IKT je její nejednoznačnost v singulárních bodech. Často existuje podprostor $\mathcal{Q}_s$ prostoru $\mathcal{Q}$, který dává stejné $\mathbf{T}$.

$$\forall \mathbf{q} \in \mathcal{Q}_s : \mathbf{T}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}$$

Pro rozhodnutí, kterou z n-tic $\mathbf{q}$ řešících rovnici 10 zvolíme, se bere v úvahu zejména:

1. Jsou uvažované hodnoty vektoru $\mathbf{q}$ **přípustné**, robot typicky nemůže zdaleka dosáhnout všech hodnot z prostoru kloubových souřadnic?
2. Jak se **do** singulárního bodu dostaneme (z kterého směru jsme přišli). Z požadavku spojitého pohybu po trajektorii plyne, že i n-tice $\mathbf{q}$ musí být spojitou funkcí času.
3. Jakým směrem se **ze** singulárního bodu dostaneme (kam pokračuje trajektorie).
4. Nedostaneme se volbou $\mathbf{q}$ během **dalšího pohybu** do situace, kdy nepůjde splnit předchozí body?
5. Samotný **operační prostor** nás omezuje při volbě $\mathbf{q}$. Příkladem je montáž sedadla do automobilu robotem.

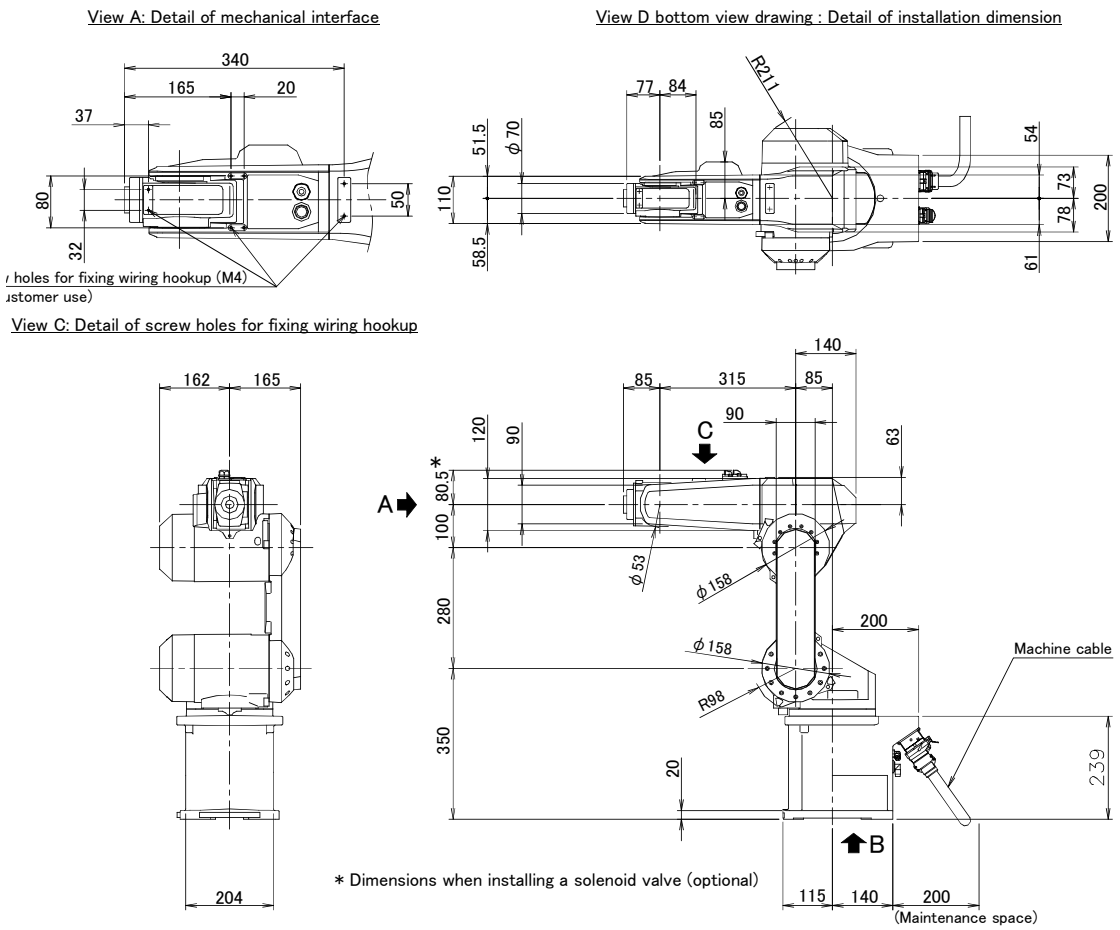
Někdy navrhujeme takzvaně redundantního robota (například s osmi stupni volnosti), abychom zvětšili prostor $\mathcal{Q}_s$, z kterého vybíráme $\mathbf{q}$ a tak mohli lépe vyhovět výše uvedeným požadavkům.

Úlohy k zamyšlení:

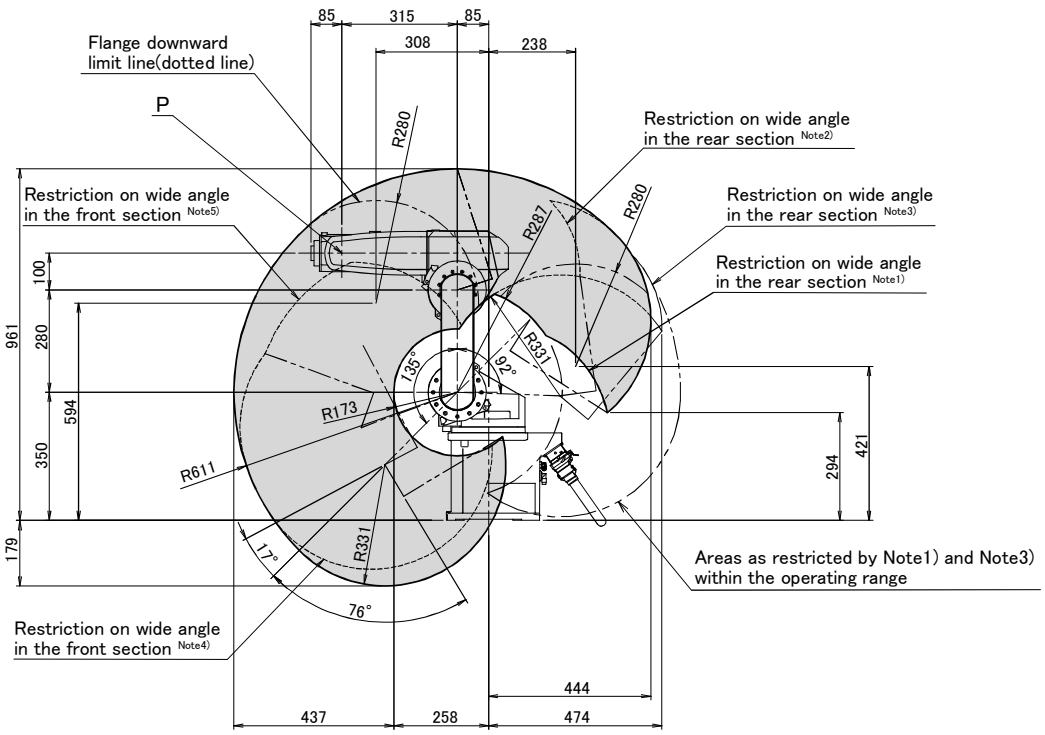
- Lze sestrojit robota pouze s posuvnými klouby, který by mohl obecně manipulovat s tělesem v prostoru? Proč?
- Vyberte si nějakou montážní úlohu a navrhněte pro ni vhodnou strukturu redundantního robota.

Inverzní kinematika - příklad

Inverzní kinematika - příklad

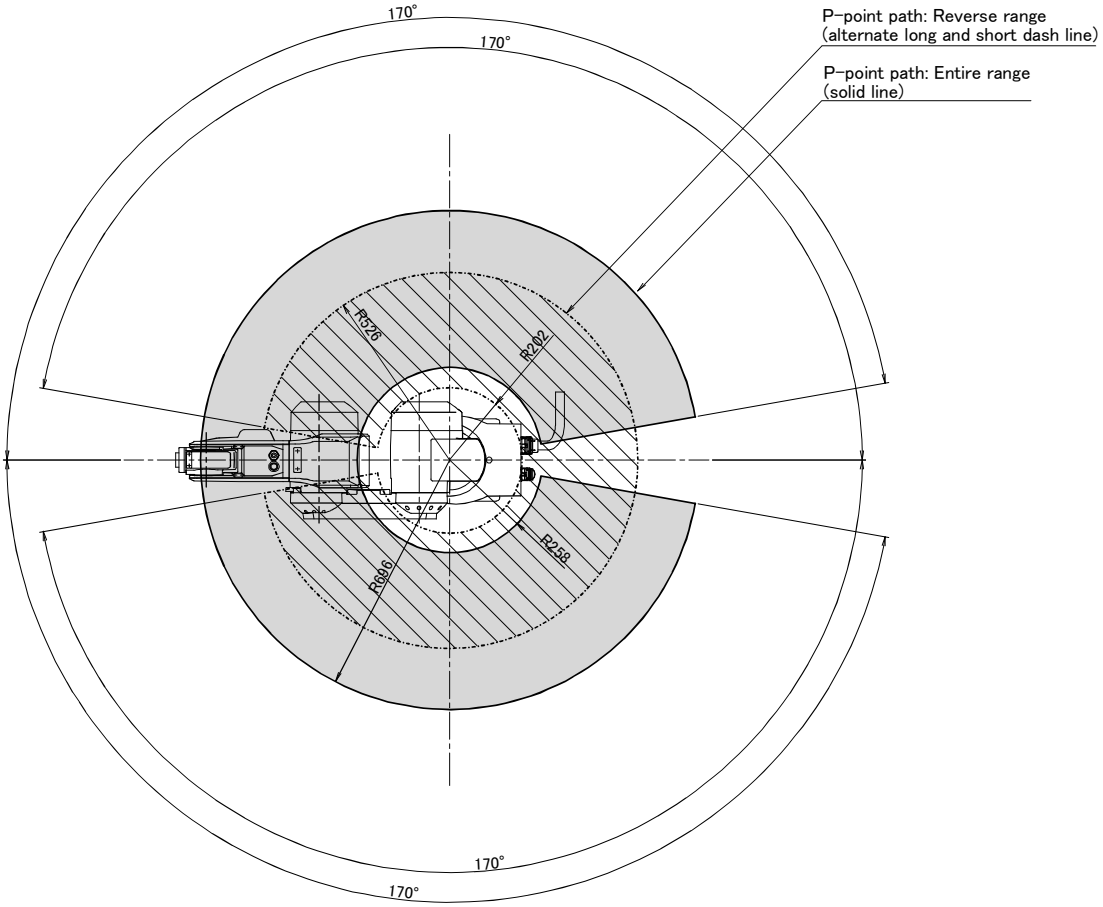


Inverzní kinematika - příklad

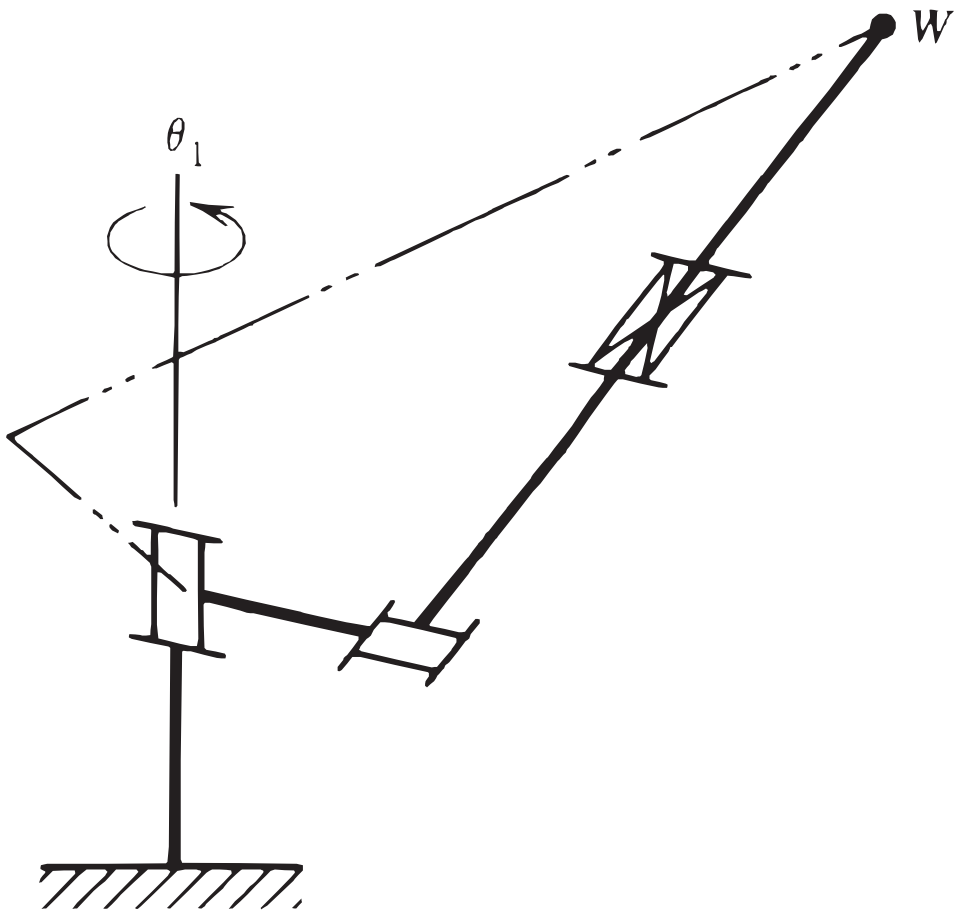


Restriction on wide angle in the rear section
Note1) J2＋J3×2 ≧ −200 degree when −45 degree≦ J2 ＜ 15 degree.
Note2) J2＋J3 ≧ 8 degree when ｜J1｜≦ 75 degree, J2 ＜ −45 degree.
Note3) J2＋J3 ≧ −40 degree when ｜J1｜＞ 75 degree, J2 ＜ −45 degree.
Restriction on wide angle in the front section
Note4) J3 ≧ −40 degree when −105 degree≦ J1 ≦ 95 degree, J2 ≧ 123 degree.
Note5) J2 ≧ 110 degree when J1 ＜ −105 degree, J1 ＜ −95 degree.
However, J2 − J3 ≦ 150 degree when 85 degree J2 ≦ 110 degree.

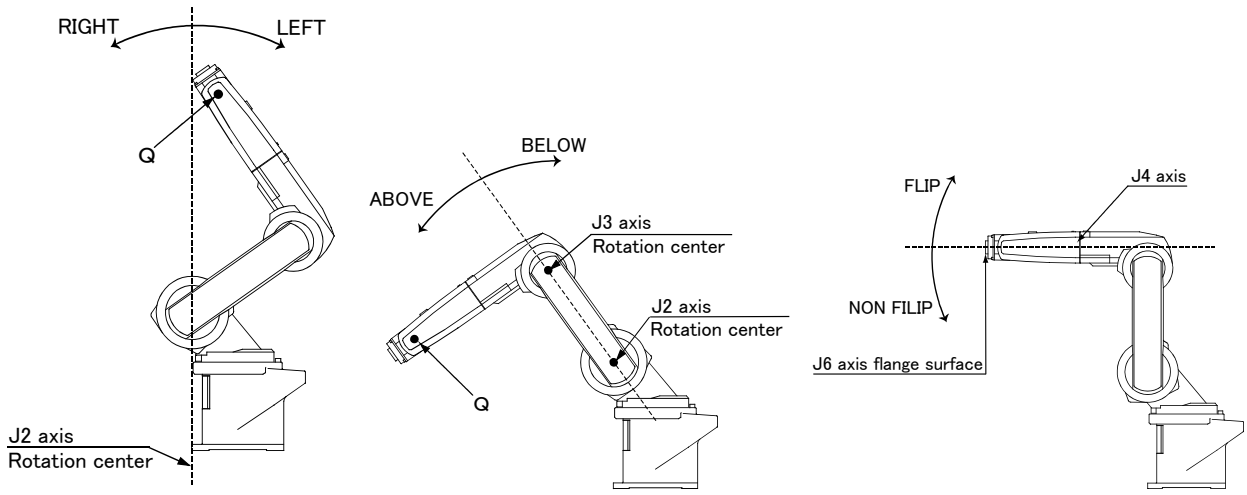
Inverzní kinematika - příklad



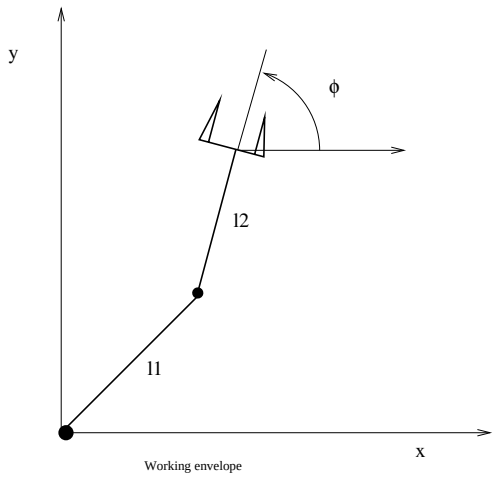
Nejednoznačnost inverzní kinematické úlohy

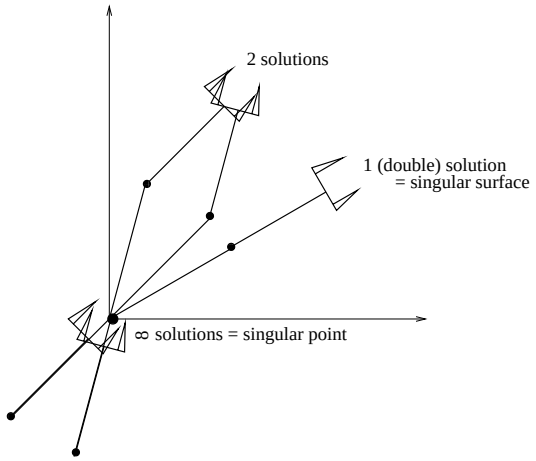


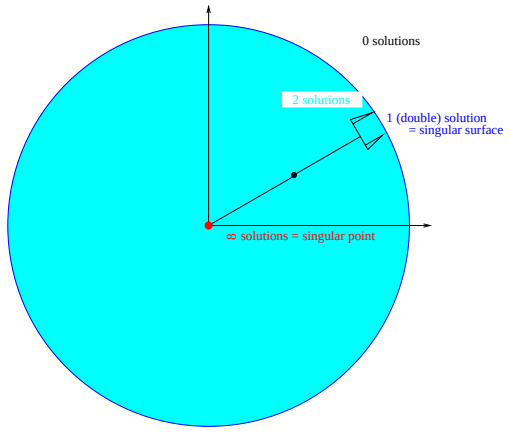
Inverzní kinematika - konfigurace

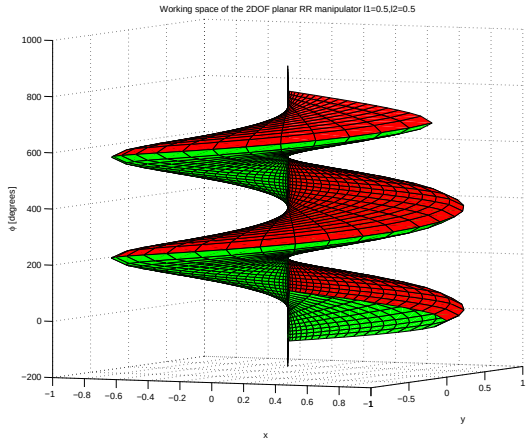


Příklad: Počet řešení IKT pro jednoduchý rovinný manipulátor







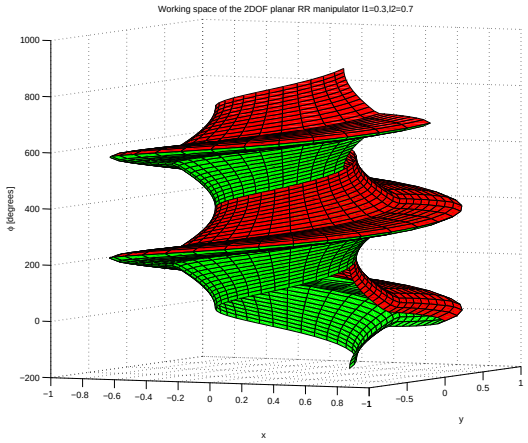


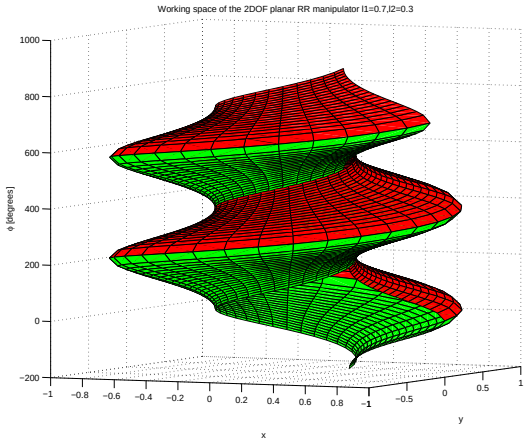
Rovinný manipulátor se dvěma stupni volnosti s rotačními klouby má pracovní obálku ve tvaru kruhu. Uvnitř kruhu má dvě řešení, která přecházejí na hraniční kružnici v jedno, dvojnásobné řešení (srovnej jedno řešení kvadratické rovnice), kružnice je tedy singulární plochou tohot robotu. Vně kruhu nemá žádné řešení. Ve středu kruhu má nekonečně mnoho řešení, tedy singulární bod.

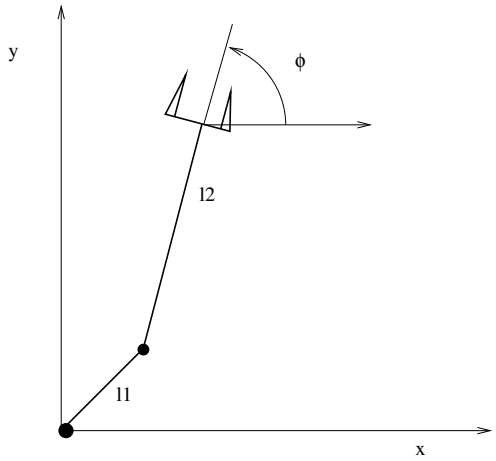
Uvedený planární manipulátor má dva stupně volnosti a pohybuje se v pracovním prostoru se třemi dimenzemi, tedy (x, y, ϕ), kde ϕ je orientace chapadla. Graf pracovního prostoru ukazuje dosažitelné body pracovního prostoru, zelená plocha je dosažitelná jednou konfigurací, červená plocha druhou konfigurací. Body pracovního prostoru na ose ϕ jsou dosažitelné všechny, tedy bod $(0, 0, \phi)$ je dosažitelný pro jakoukoliv hodnotu ϕ. Pracovní prostor robotu je zde znázorněn jen v intervalu $< 0, 720^o >$, spirála je ve skutečnosti od $-\infty$ do ∞.

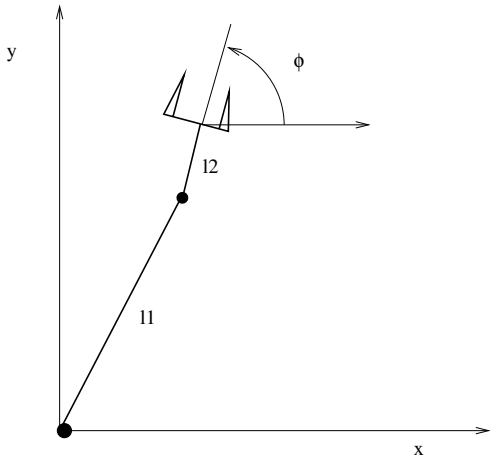
Připomínám, že ideálem je, aby v priměřeně kompaktní oblasti byly dosaženy všechny body. Znázornit šestirozměrný pracovní prostor pro prostorového robota je samozřejmě obtížné.

Příklad: Počet řešení IKT pro jednoduchý rovinný manipulátor



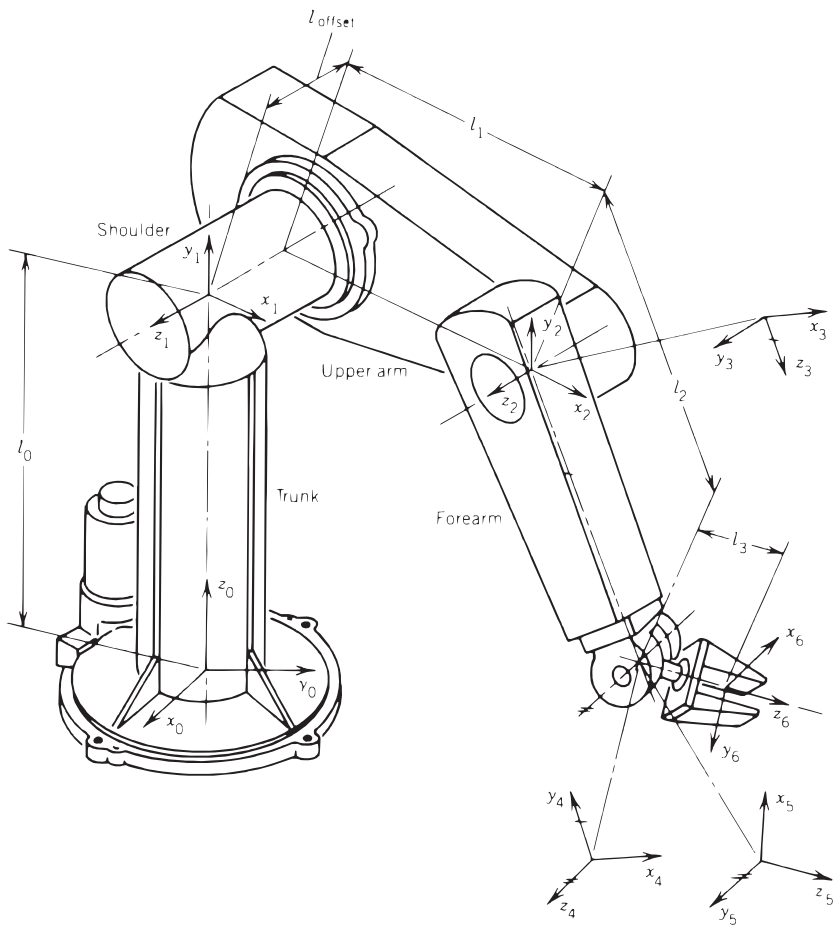






Manipulátor s nestejně dlouhými rameny nemůže dosahnout do okolí svého prvního kloubu.

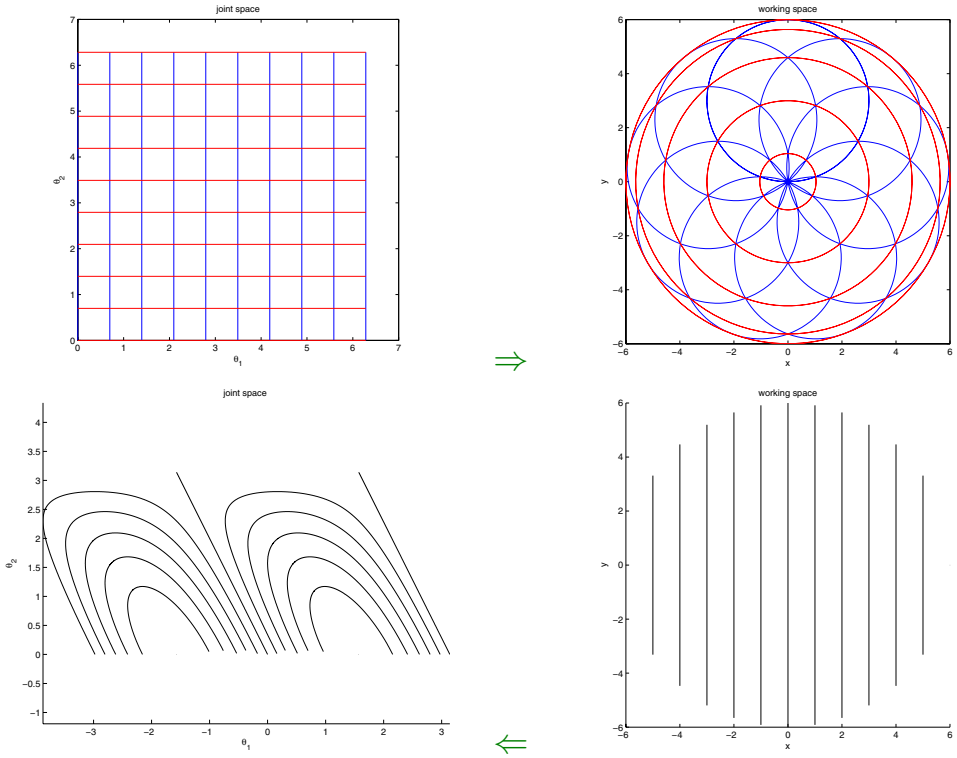
PUMA



m	p
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	

Zobrazení mezi kloubovým a kartézským prostorem

Kloubový prostor $\Leftrightarrow$ Pracovní (kartézský) prostor



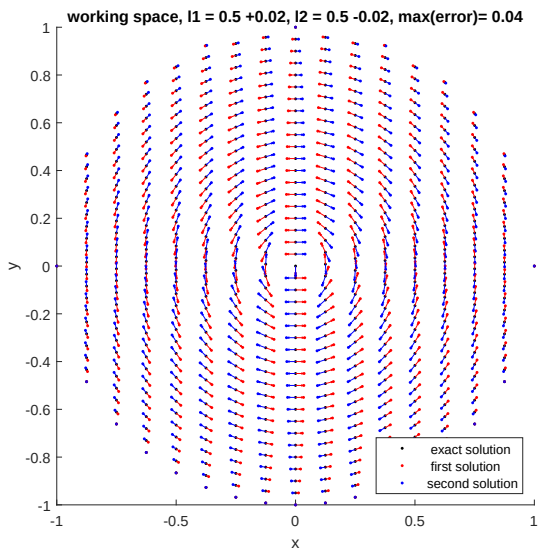
$\Rightarrow$

$\Leftarrow$

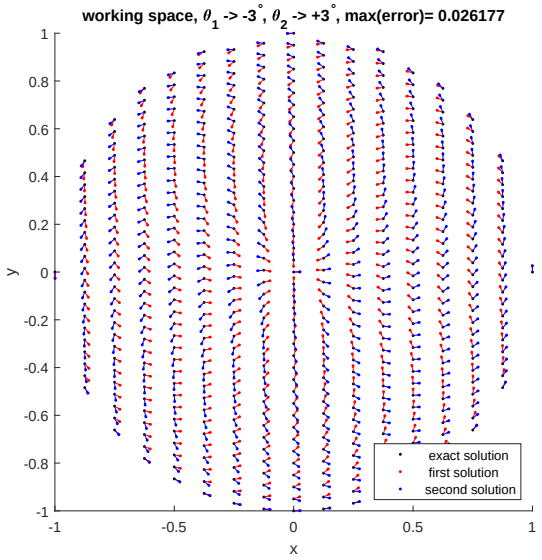
Zobrazení mezi kloubovým a kartézským prostorem je pro roboty s otočnými klouby velmi nelineární. Zde je ukázáno pro jednoduchý planární manipulátor se dvěma otočnými klouby.

Přesnost robotu s nepřesně známým modelem

Nepřesně známé délky ramen



Nepřesně známé offsety úhlů



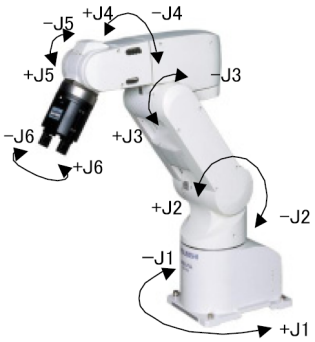
Zobrazení mezi kloubovým a kartézským prostorem je pro roboty s otočnými klouby velmi nelineární. To samé platí pro vliv nepřesností modelu robota na výslednou polohu chapadla. Navíc v různých konfiguracích pro tutéž polohu chapadla se výsledná chyba projevuje různě, často opačným směrem. Poloha robotu zkompenzovaná v jedné konfiguraci může mít ještě větší chybu při dosažení jinou konfigurací. Zde je ukázáno pro jednoduchý planární manipulátor se dvěma otočnými klouby. Jsou zobrazeny zvlášť chyby ve znalosti délek ramen a zvlášť chyby v relativní orientaci kloubů. Zvolený 2–D manipulátor nemůže demonstrovat chyby např. nekolmosti os sousedních kloubů v prostorovém manipulátoru nebo nepřímost lineárního vedení posuvného kloubu.

Přímá a inverzní kinematická úloha - shrnutí

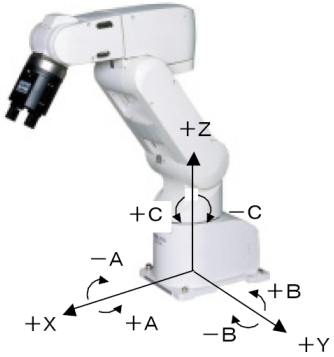
kinematika	struktura	počet řešení	obtížnost
přímá	otevřený kin. řet.	1	snadná
	smíšený kin. řet.	$0, 1, N, \infty$	obtížná
	paralelní robot	$0, 1, N, \infty$	obtížná
inverzní	otevřený kin. řet.	$0, 1, N, \infty$	obtížná
	smíšený kin. řet.	$0, 1, N, \infty$	obtížná
	paralelní robot	$0, 1, N, \infty$	snadná

Počet řešení kinematických úloh a obtížnost jejich řešení spolu souvisí. Příčinou je matematická podstata úloh. Úloha je z matematického pohledu řešení soustavy nelineárních rovnic. Rovnice jsou polynomiální v řešených proměnných nebo jejich sinech a kosinech, přičemž právě goniometrické funkce zde způsobují nelinearitu rovnic. V některých případech dostáváme jen jedno řešení, úloha je v hledaných parametrech lineární a snadno řešitelná. Příkladem je přímá kinematická úloha otevřeného kinematického řetězce. V jiných případech je úloha analyticky neřešitelná nebo není analytické řešení známo. V takových případech je použito numerické řešení nebo se podobným strukturám vyhýbáme.

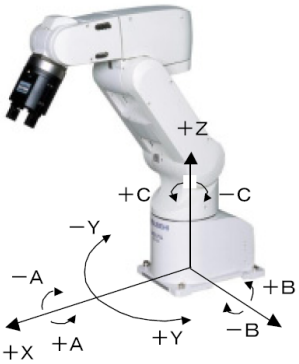
Pohyb v jiných souřadnicových systémech



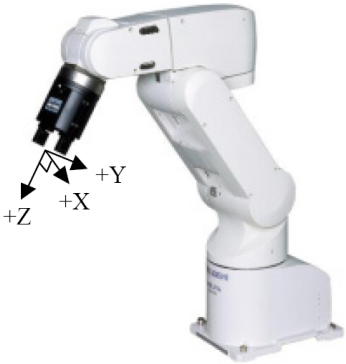
kloubové souřadnice

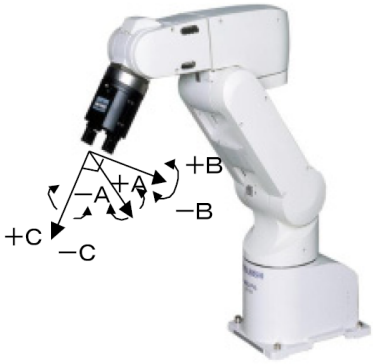


kartézské světové souřadnice



válcové světové souřadnice





kartézské souřadnice chapadla

Řídicí jednotka robotu většinou umožňuje řídit polohu chapadla pomocí přenosného ovládacího panelu v různých souřadnicových systémech:

- kloubové souřadnice,
- kartézské souřadnice světového souřadnicového systému,
- válcové souřadnice světového souřadnicového systému,
- kartézské souřadnice souřadnicového systému chapadla,...