



Robotika

Přímá a inverzní kinematika otevřených kinematických řetězců

Vladimír Smutný

Centrum strojového vnímání

Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky (CIIRC)

České vysoké učení technické v Praze

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34



Řídicí jednotka robotu většinou měří vnitřní kinematické parametry robotu – **kloubové souřadnice**. Tyto souřadnice určují polohu jednotlivých kloubů, tedy vzájemnou polohu sousedních ramen. Kloubové souřadnice označujeme \vec{q} , kloubovou souřadnici otočného kloubu označujeme θ , kloubovou souřadnici posuvného kloubu označujeme d .

Uživateli zajímá poloha **chapadla** nebo manipulovaného (tuhého) tělesa. Tato poloha má 6 stupňů volnosti a může být popsána různými popisy, například transformační maticí popisující polohu souřadnicového systému chapadla ve světovém souřadnicovém systému.

Naším úkolem je najít vztahy mezi těmito popisy polohy robotu.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



Přímá kinematická úloha

Přímá kinematická úloha je zobrazení z prostoru kloubových souřadnice do prostoru poloh chapadla. To znamená, že známe polohy všech (nebo některých) kloubů a hledáme polohu chapadla ve světovém souřadnicovém systému. Matematicky:

$$\vec{q} \rightarrow \mathbf{T}(\vec{q})$$

Přímé použití tohoto vztahu je v souřadnicových měřicích přístrojích. Snímače na jednotlivých kloubech nás informují o vzájemné poloze ramen, kloubových souřadnicích, úkolem je vypočítat, kde se nachází hrot měřicího přístroje.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



Inverzní kinematická úloha

Inverzní kinematická úloha je zobrazení z prostoru poloh chápada do prostoru kloubových souřadnic. To znamená, že známe polohu chápada ve světovém souřadnicovém systému a hledáme polohy všech kloubů. Matematicky:

$$\mathbf{T} \rightarrow \vec{q}(\mathbf{T})$$

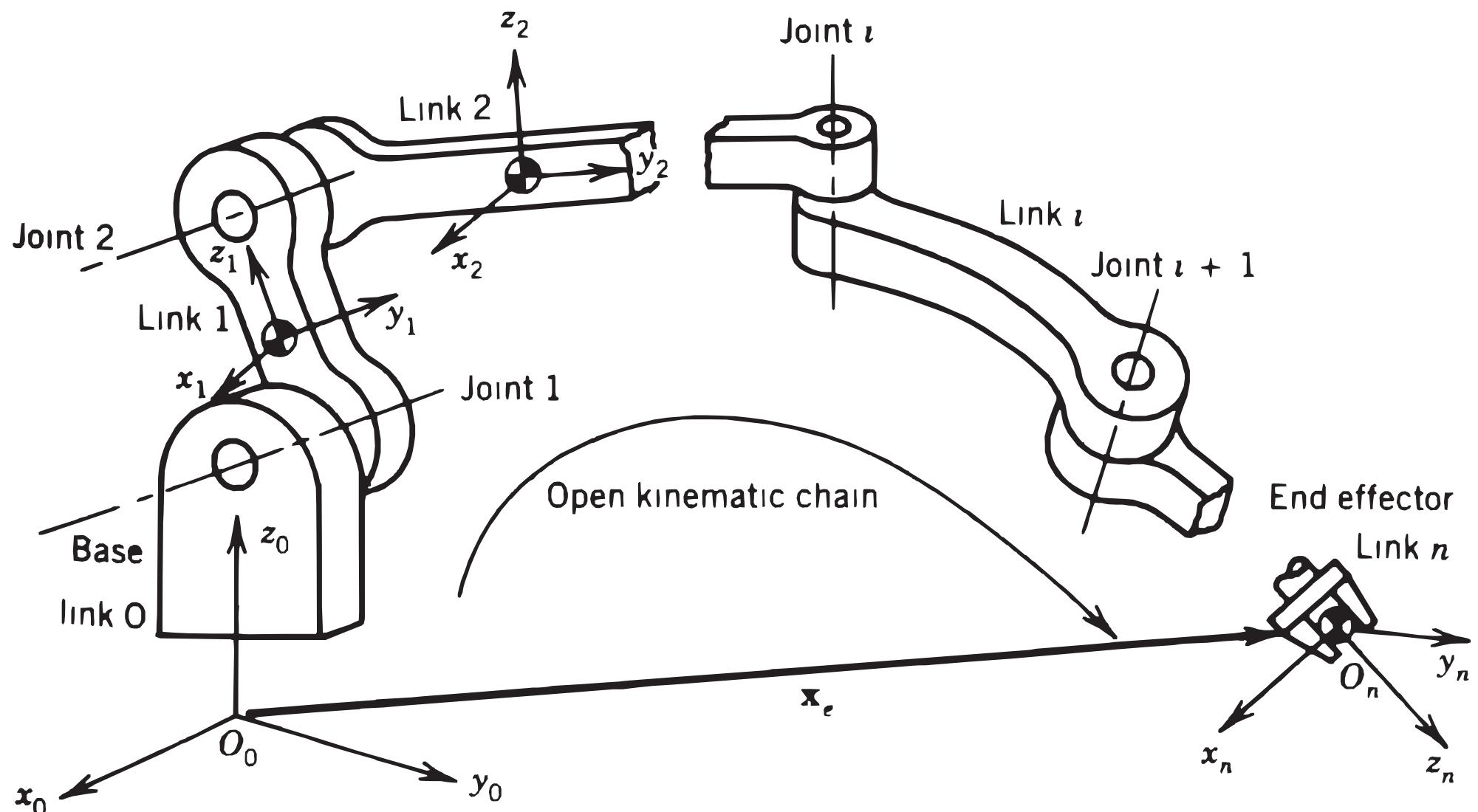
Inverzní kinematická úloha je potřeba například při řízení manipulátoru. Uživatel zadává požadovanou polohu chápada, pro řízení jsou ale potřeba kloubové souřadnice.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Otevřený kinematický řetězec



m p

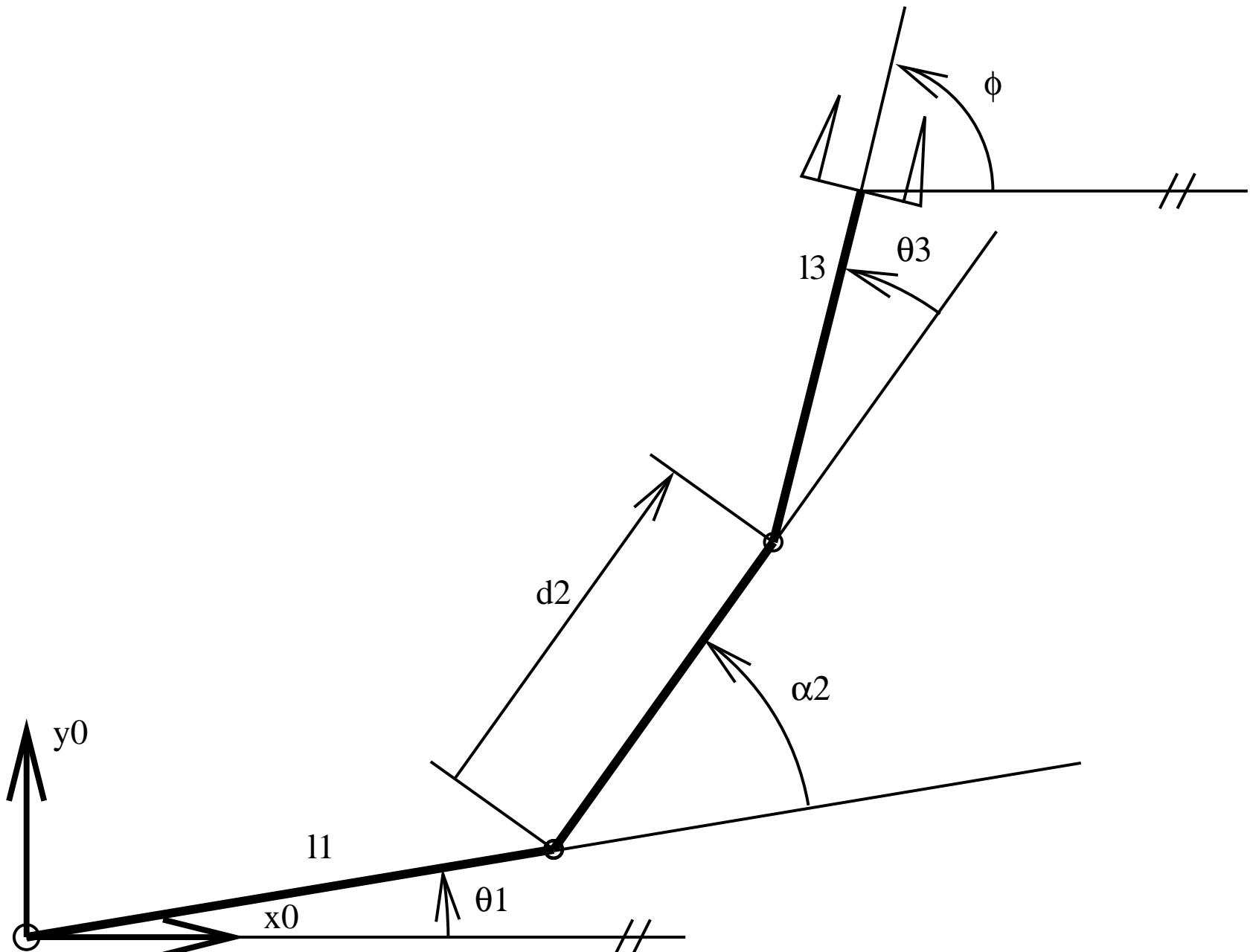


1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

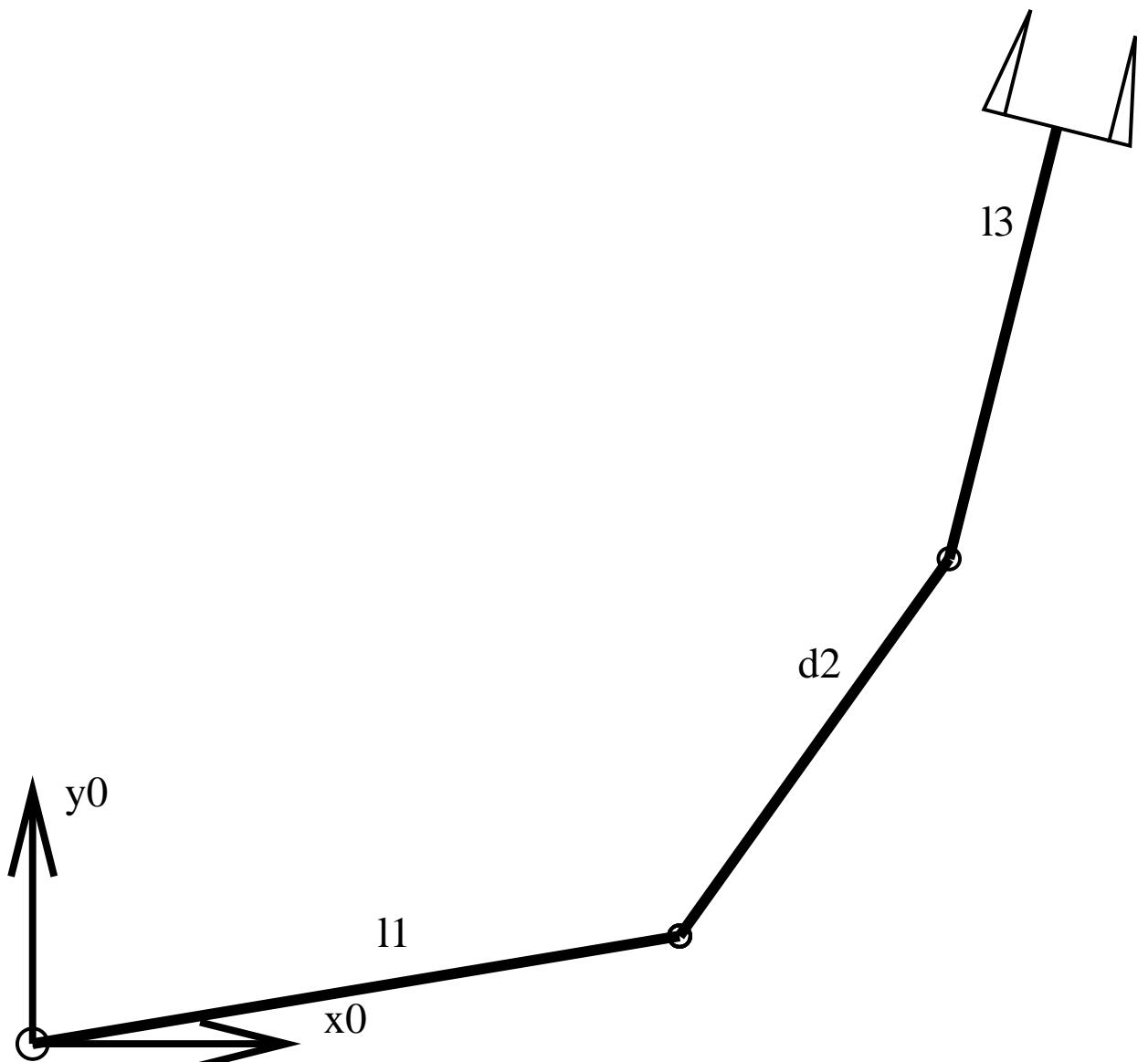
33 34

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p

○



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

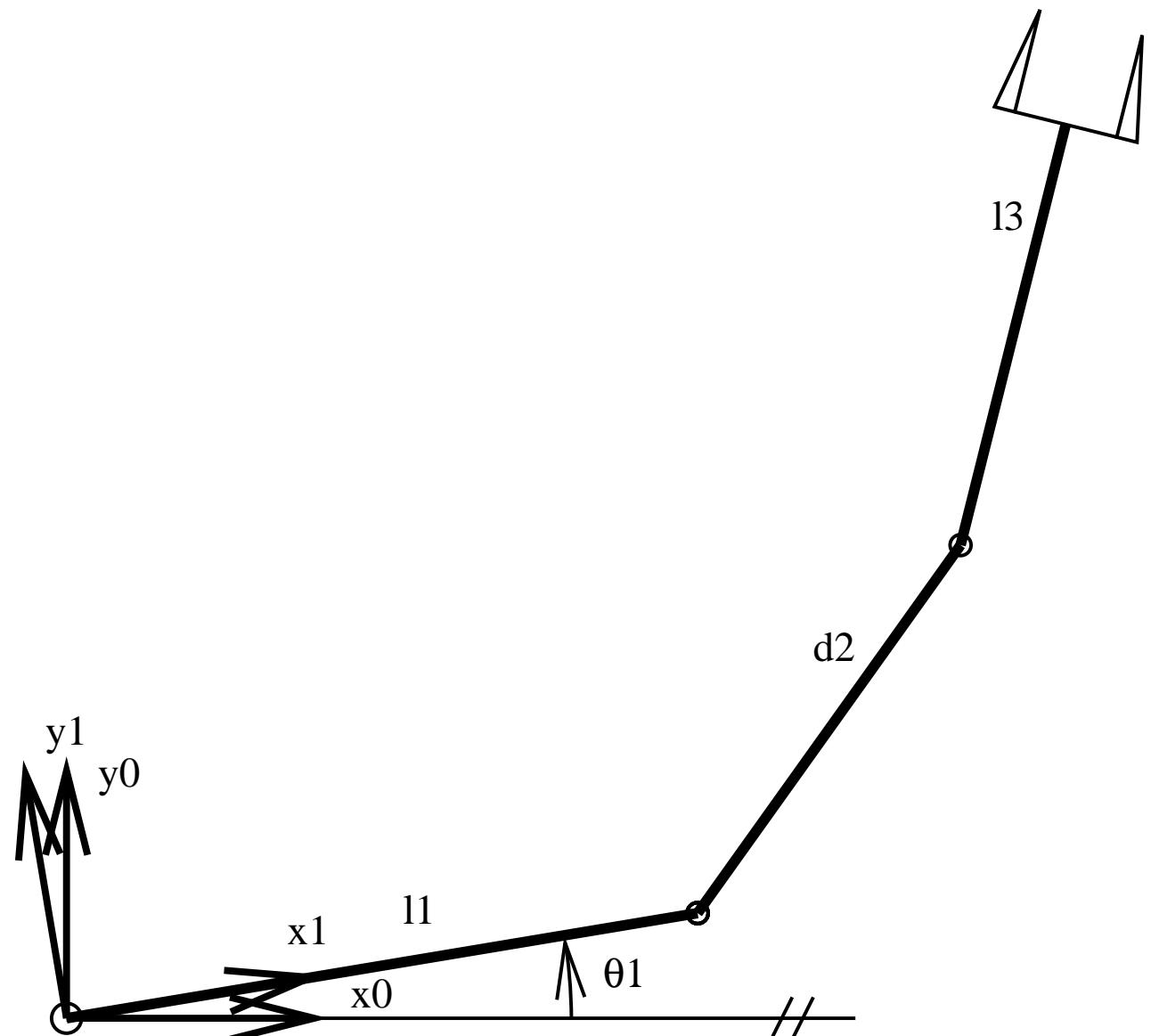
33 34

○

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

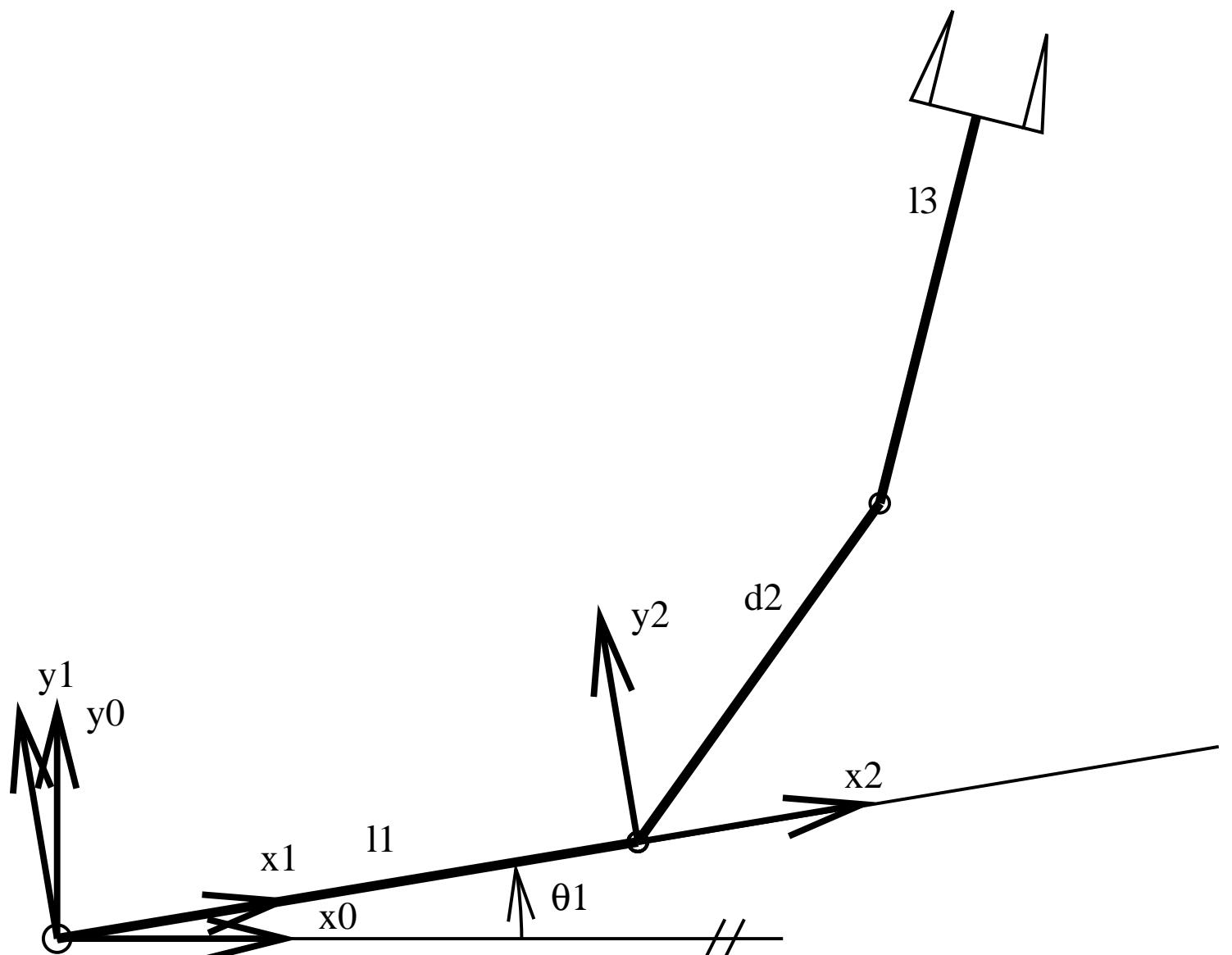
31 32

33 34

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

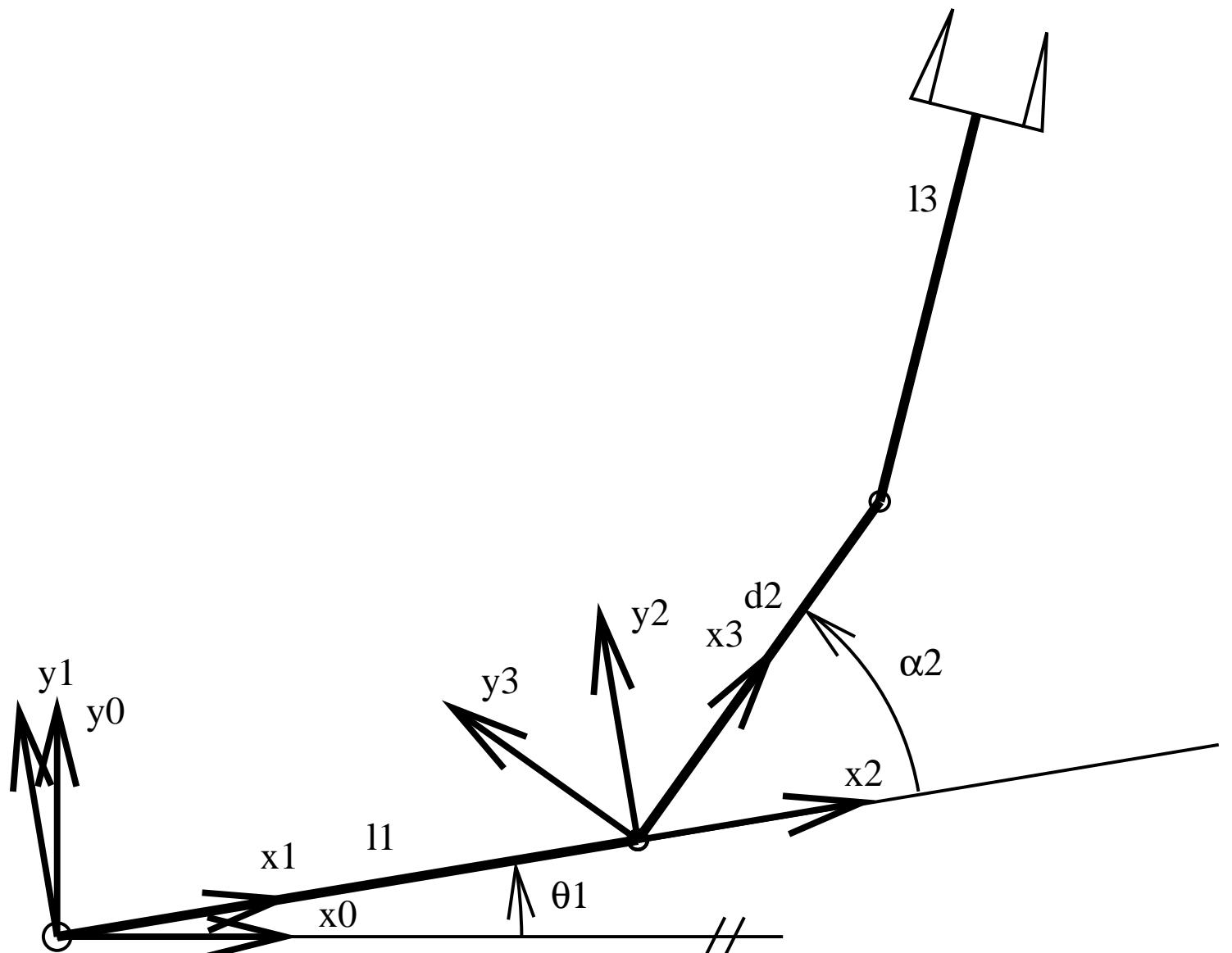
31 32

33 34

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

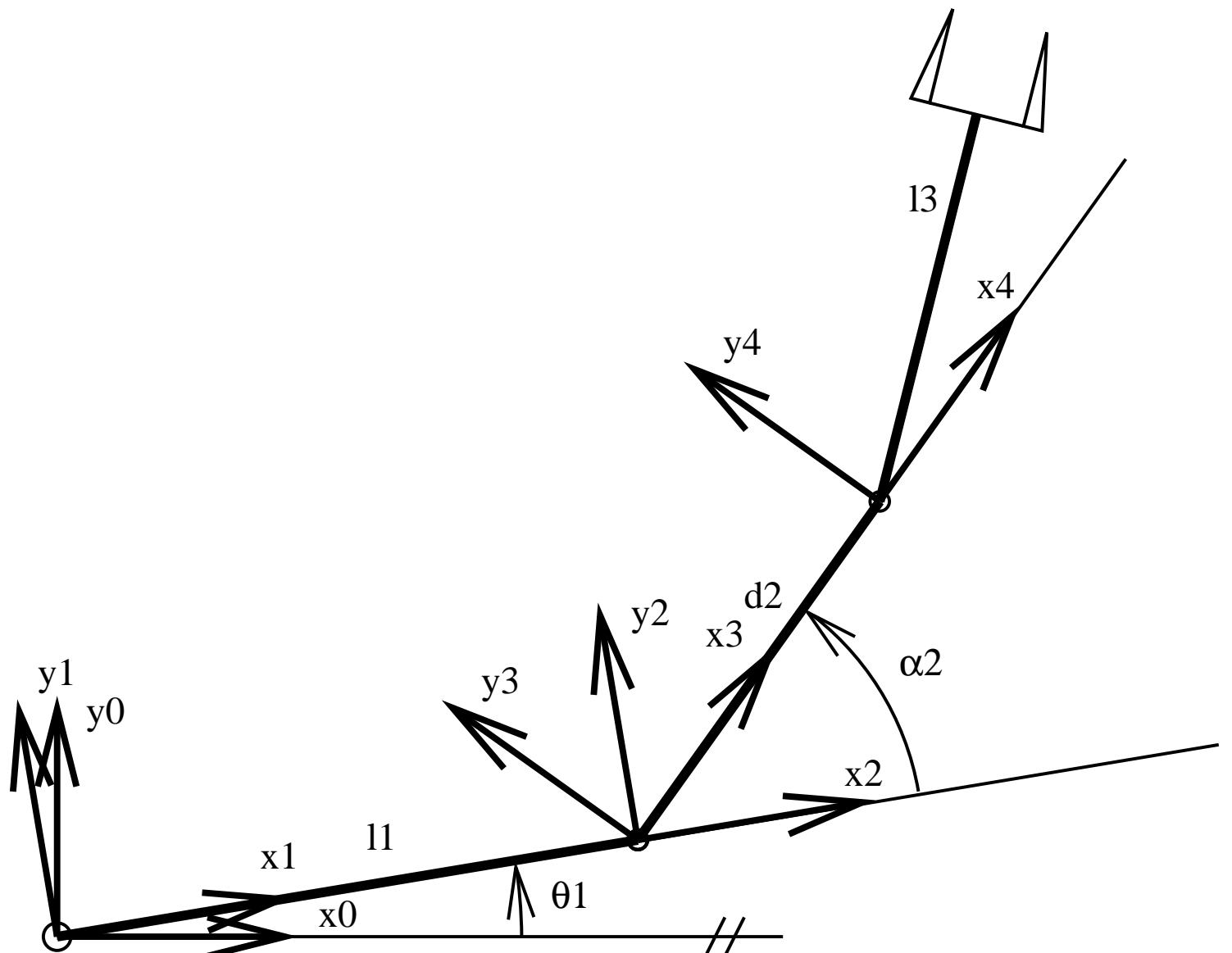
31 32

33 34

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

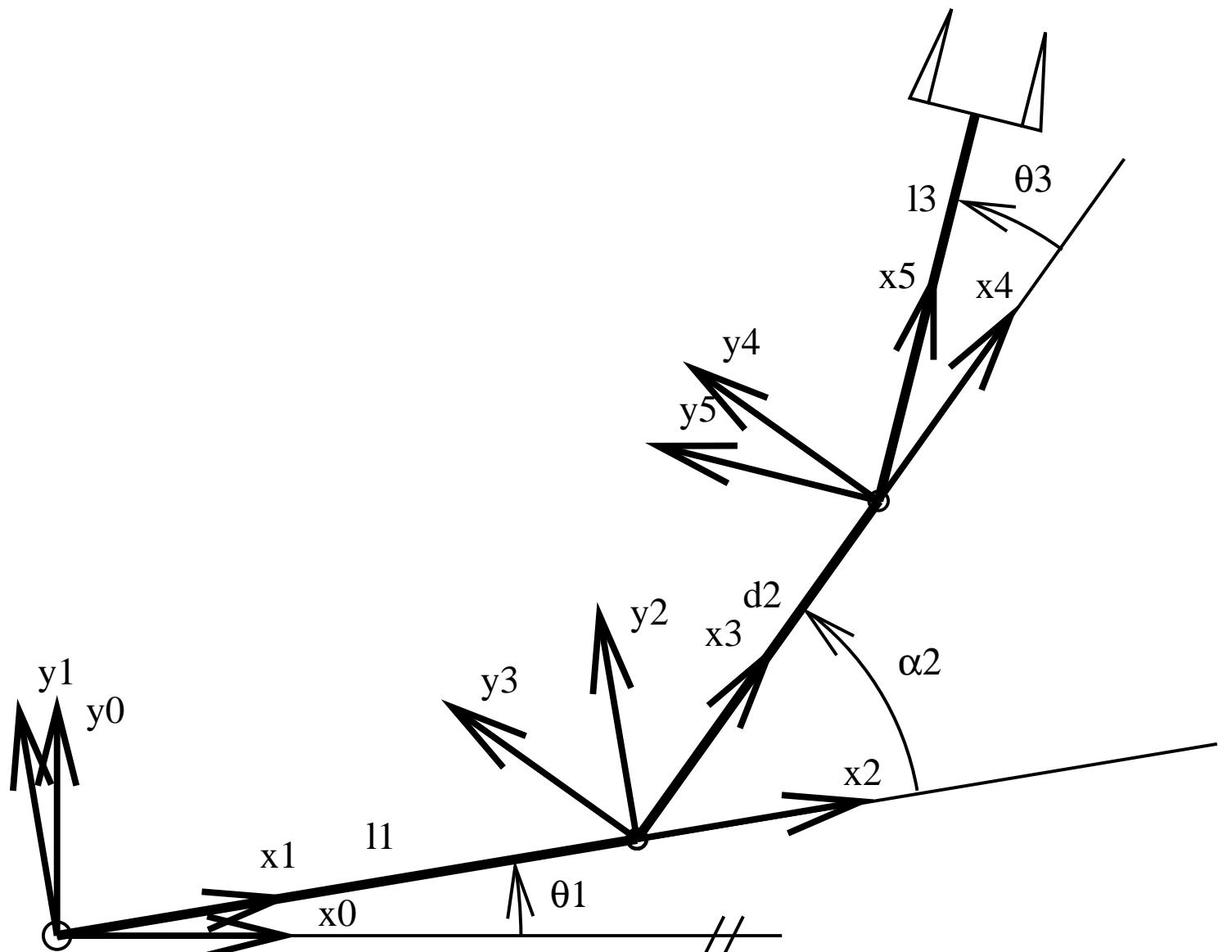
31 32

33 34

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

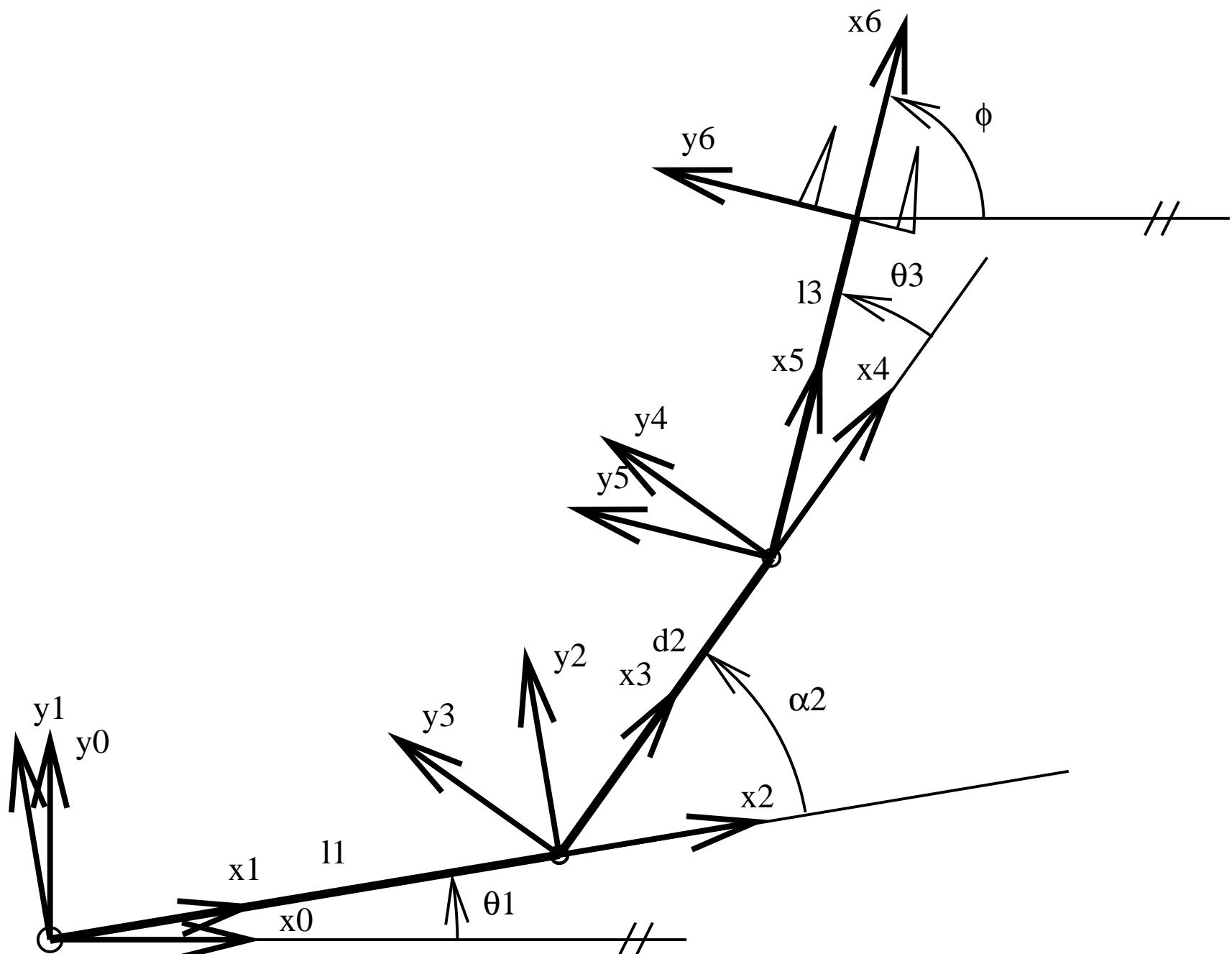
31 32

33 34

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

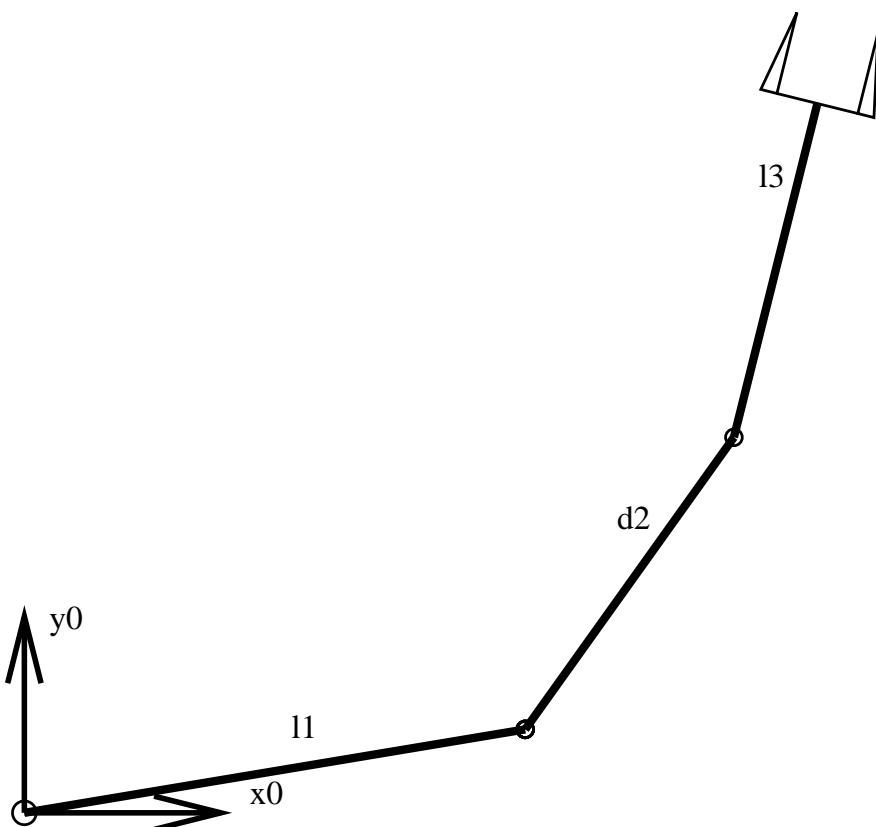
31 32

33 34

Modelování planárního otevřeného kinematického řetězce



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

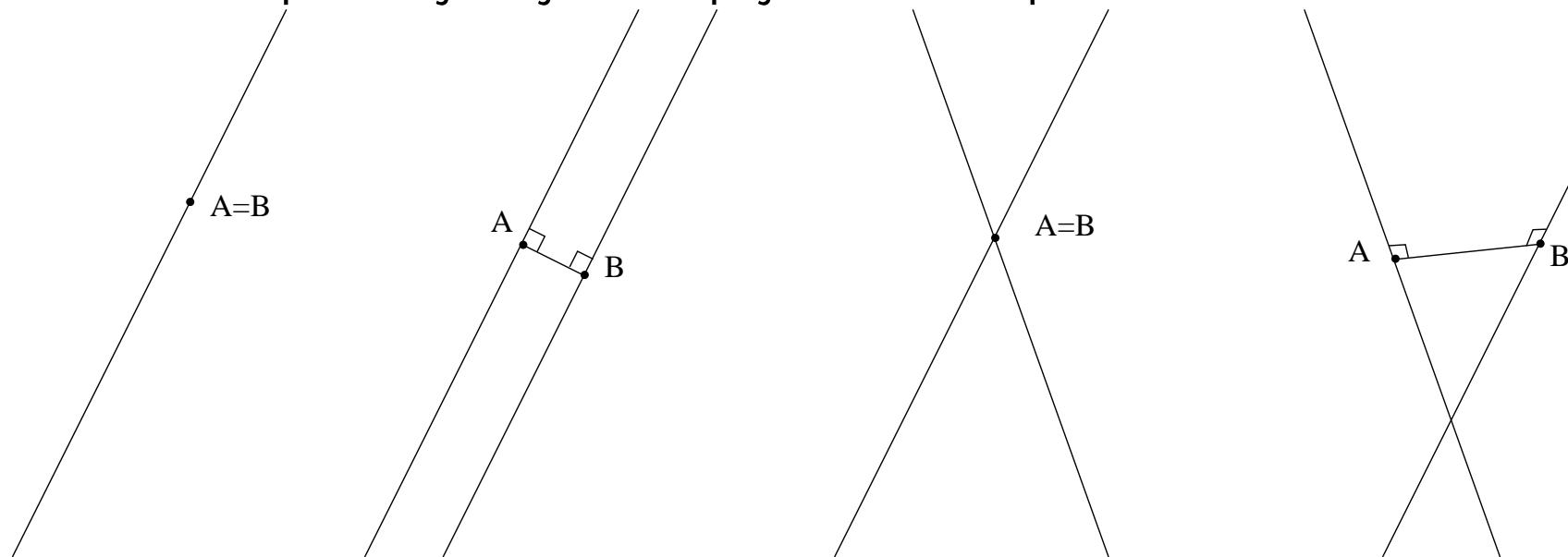
29 30

31 32

33 34



Příčka dvou přímek je nejkratší spojnica těchto přímek. Je kolmá k oběma přímkám.



Vzájemná poloha dvou přímek může být:

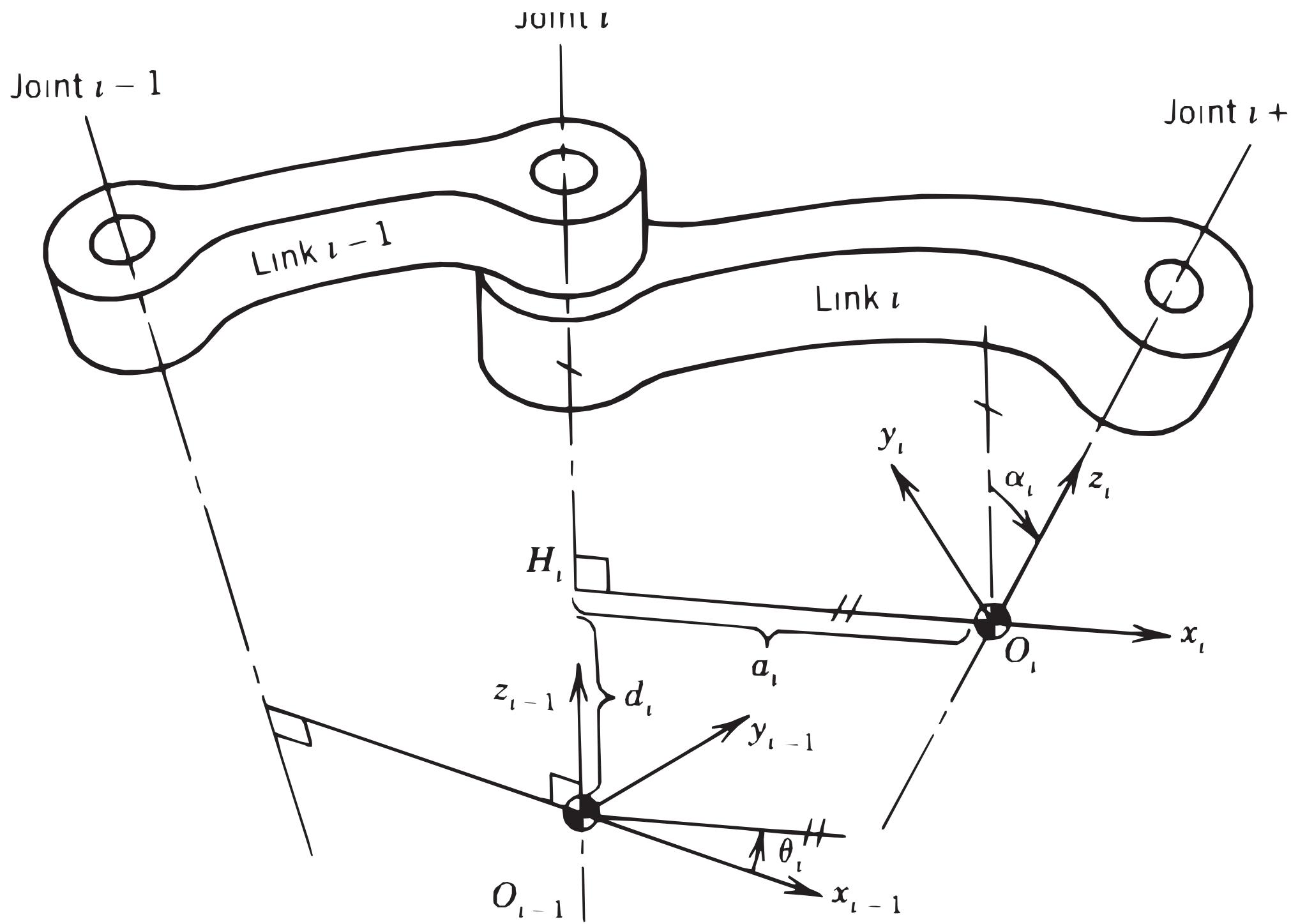
- ◆ totožné přímky, oba konce degenerované příčky můžeme umístit do kteréhokoliv bodu přímky,
- ◆ rovnoběžky, příčka je kolmá k oběma, můžeme ji umístit kdekoliv podél přímek,
- ◆ různoběžky, příčka zdegenerovaná do bodu je v místě křížení,
- ◆ mimoběžky, poloha příčky je jednoznačně dána, je kolmá k oběma přímkám.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Modelování otevřeného kinematického řetězce v prostoru – Denavit-Hartenbergova notace



m p



1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Modelování otevřeného kinematického řetězce v prostoru – Denavitova-Hartenbergova notace



m p

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

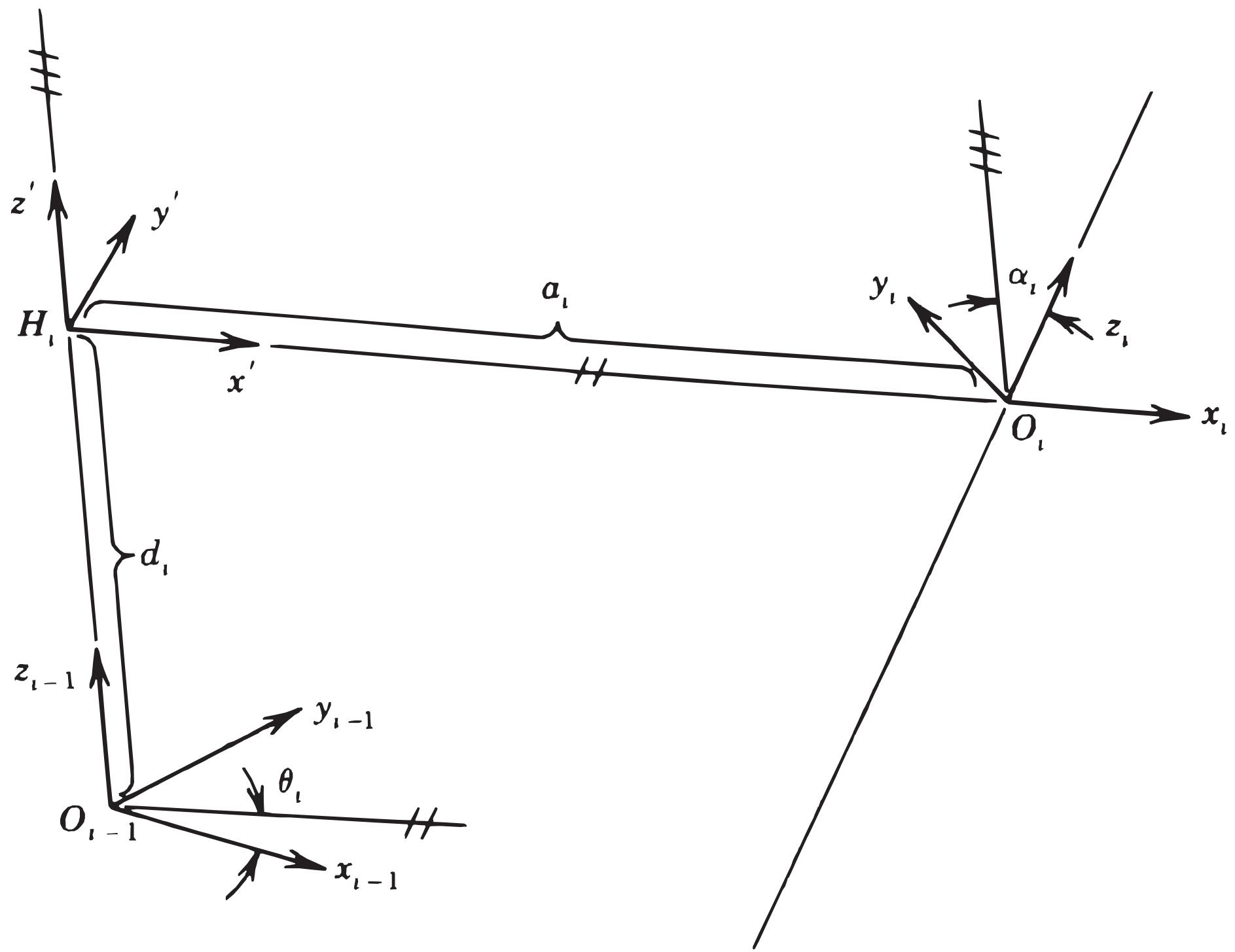
31 32

33 34

Sousední souřadnicové systémy v DH



m p

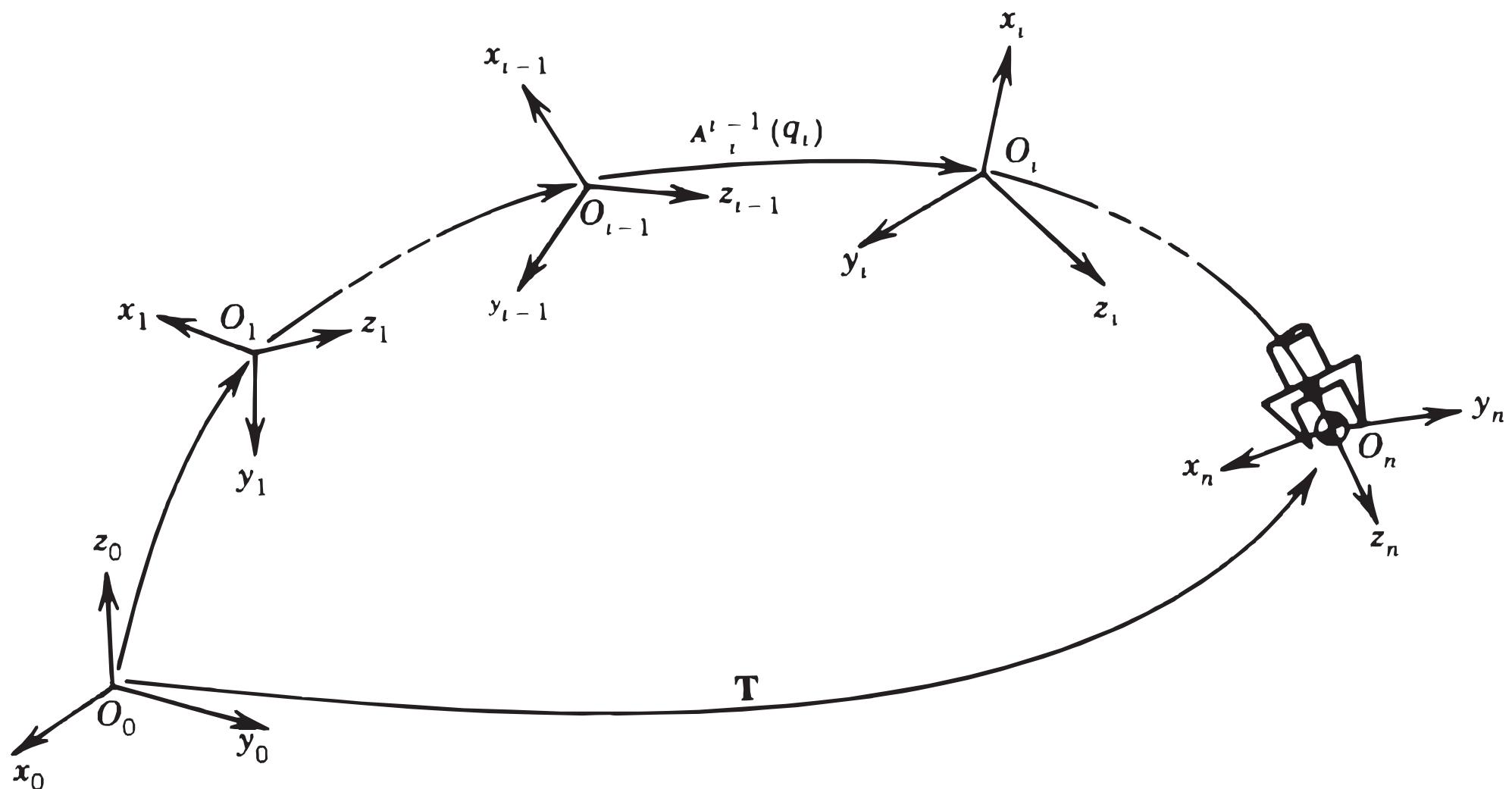


1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Poloha chapadla v souřadnicovém systému rámu



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

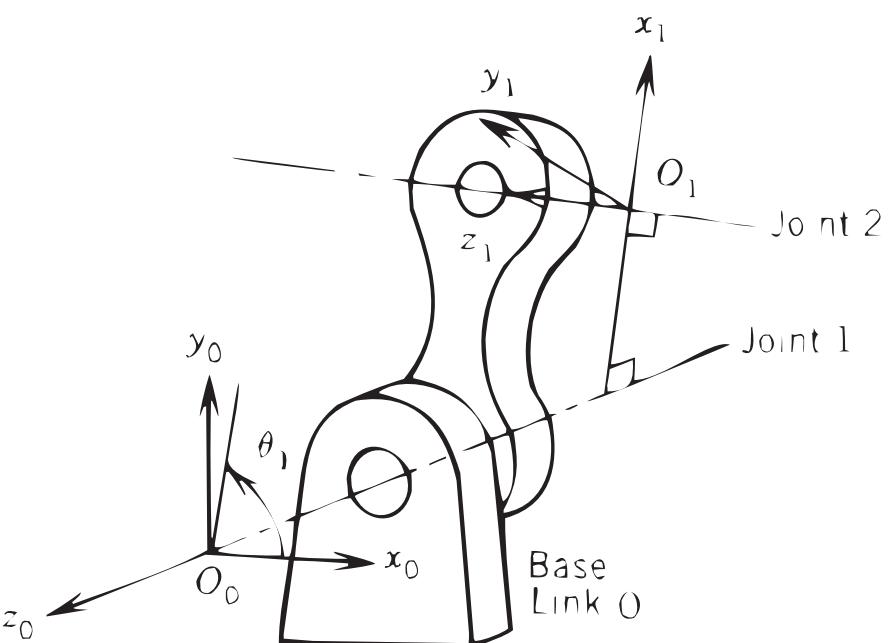
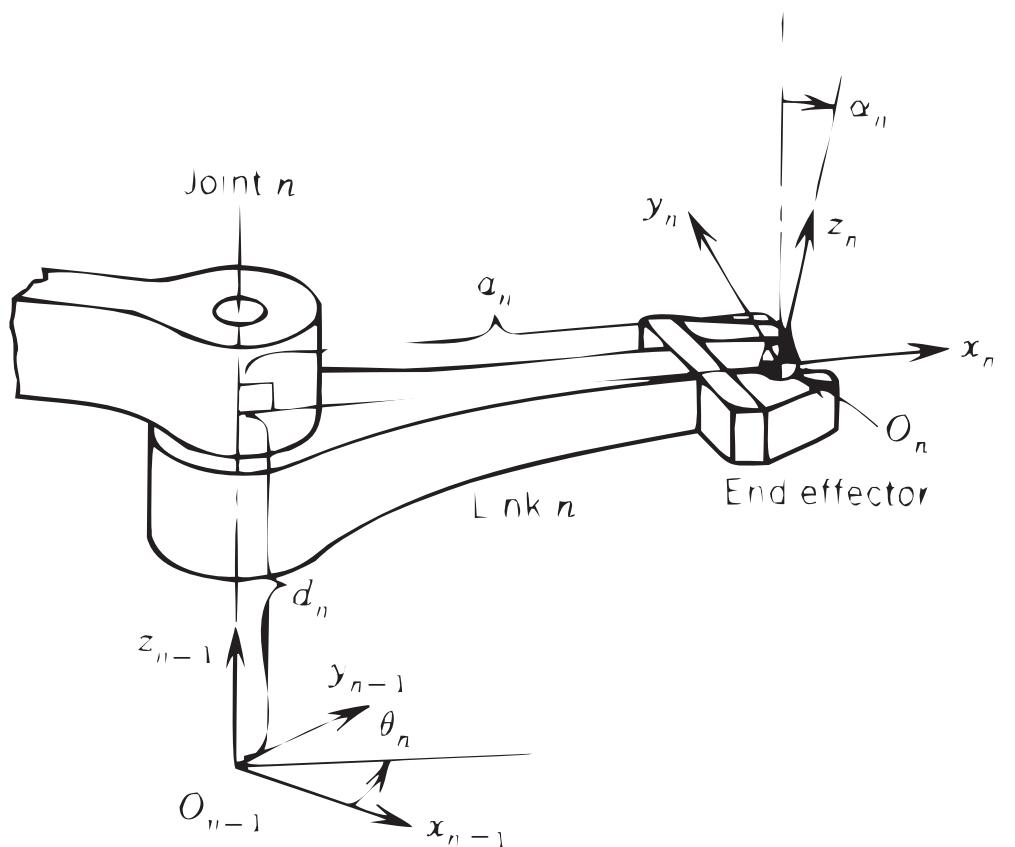
31 32

33 34

Souřadnicové systémy rámu a chlapadla



m p

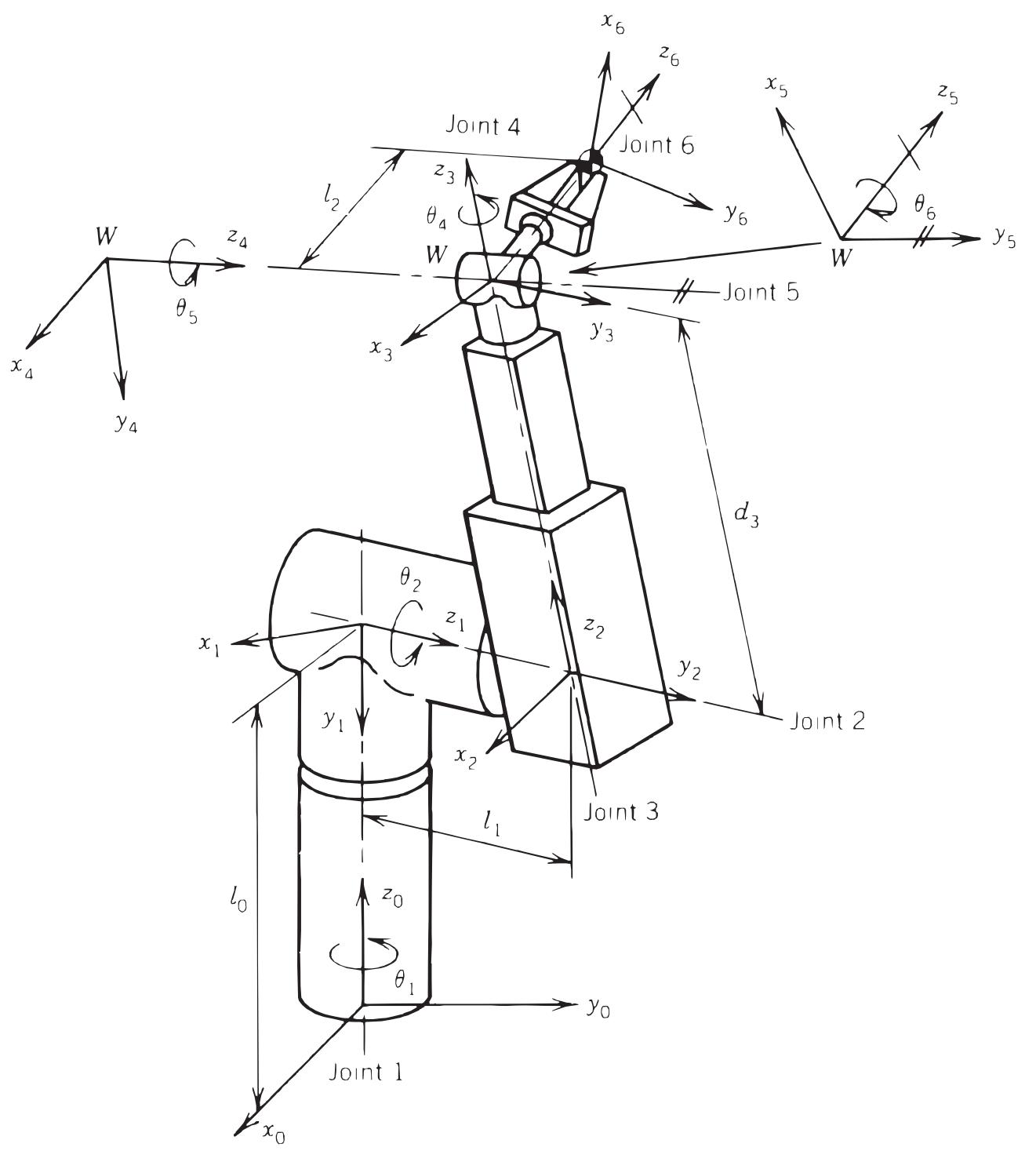


1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

5-R-1-P manipulátor



m p

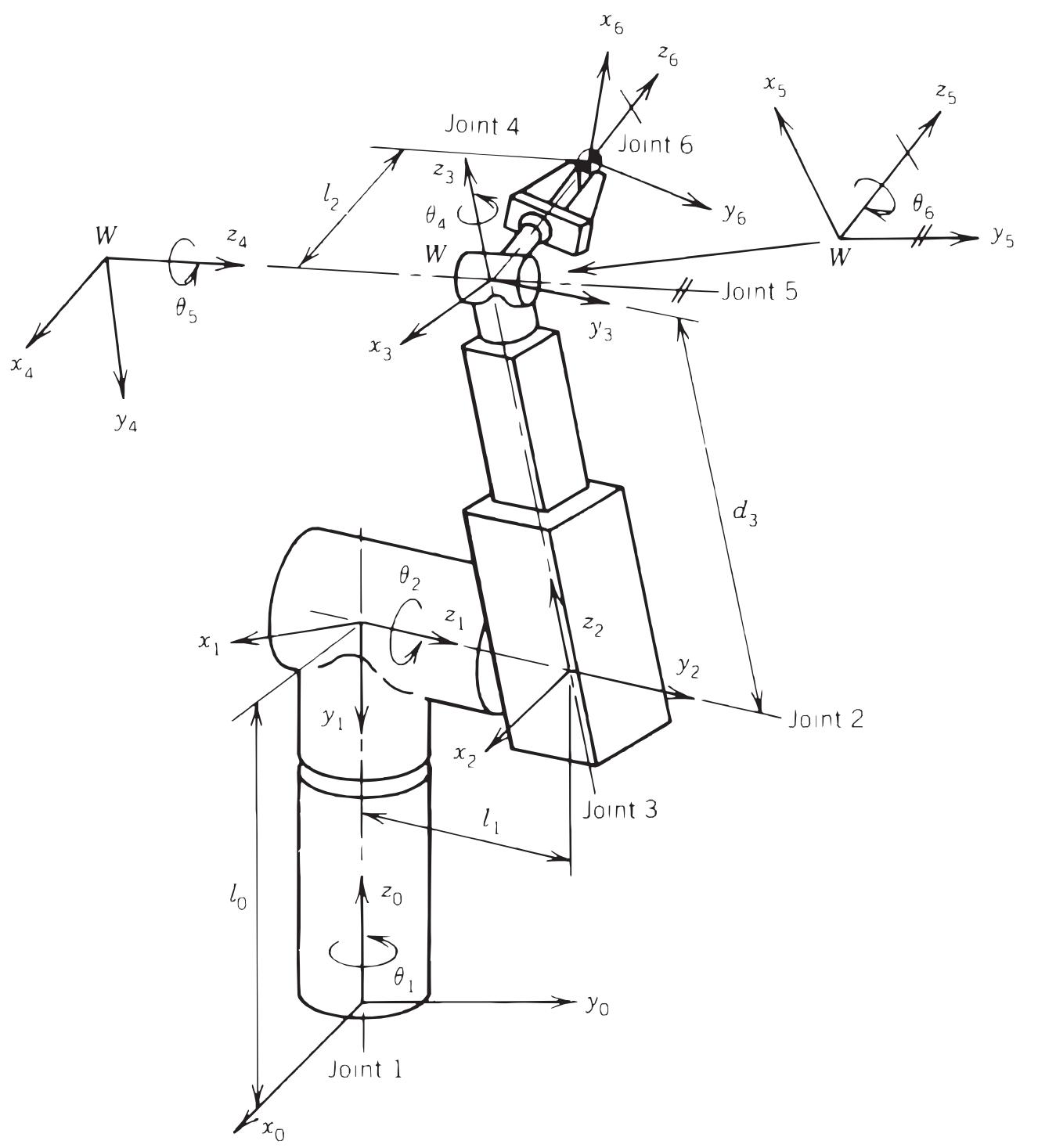


1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

5-R-1-P manipulátor



m p



1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



Matice reprezentující transformaci mezi sousedními rameny

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



Matice reprezentující transformaci mezi sousedními rameny

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

DH-notace:

- ◆ popisuje otevřené kinematické řetězce,
 - ◆
 - ◆
 - ◆
 - ◆
 - ◆
 - ◆
 - ◆
 - ◆



DH-notace:

- ◆ popisuje otevřené kinematické řetězce,
- ◆ je navržena pro otočné a posuvné klouby,
- ◆
- ◆
- ◆
- ◆
- ◆
- ◆

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



DH-notace:

- ◆ popisuje otevřené kinematické řetězce,
- ◆ je navržena pro otočné a posuvné klouby,
- ◆ přiřazuje jednotlivým ramenům souřadnicové systémy,
- ◆
- ◆
- ◆
- ◆
- ◆

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



DH-notace:

- ◆ popisuje otevřené kinematické řetězce,
- ◆ je navržena pro otočné a posuvné klouby,
- ◆ přiřazuje jednotlivým ramenům souřadnicové systémy,
- ◆ popisuje jednotlivé klouby pomocí čtyř parametrů (θ, d, a, α) , (a, α) jsou vždy konstantní, jeden z dvojice (θ, d) je kloubová proměnná,
- ◆
- ◆
- ◆

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



DH-notace:

- ◆ popisuje otevřené kinematické řetězce,
- ◆ je navržena pro otočné a posuvné klouby,
- ◆ přiřazuje jednotlivým ramenům souřadnicové systémy,
- ◆ popisuje jednotlivé klouby pomocí čtyř parametrů (θ, d, a, α) , (a, α) jsou vždy konstantní, jeden z dvojice (θ, d) je kloubová proměnná,
- ◆ přímo použitelná pro řešení přímé kinematické úlohy (PKÚ),
- ◆
- ◆

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



DH-notace:

- ◆ popisuje otevřené kinematické řetězce,
- ◆ je navržena pro otočné a posuvné klouby,
- ◆ přiřazuje jednotlivým ramenům souřadnicové systémy,
- ◆ popisuje jednotlivé klouby pomocí čtyř parametrů (θ, d, a, α) , (a, α) jsou vždy konstantní, jeden z dvojice (θ, d) je kloubová proměnná,
- ◆ přímo použitelná pro řešení přímé kinematické úlohy (PKÚ),
- ◆ je algoritmizovatelný postup,
- ◆

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



DH-notace:

- ◆ popisuje otevřené kinematické řetězce,
- ◆ je navržena pro otočné a posuvné klouby,
- ◆ přiřazuje jednotlivým ramenům souřadnicové systémy,
- ◆ popisuje jednotlivé klouby pomocí čtyř parametrů (θ, d, a, α) , (a, α) jsou vždy konstantní, jeden z dvojice (θ, d) je kloubová proměnná,
- ◆ přímo použitelná pro řešení přímé kinematické úlohy (PKÚ),
- ◆ je algoritmizovatelný postup,
- ◆ není jednoznačná, ale všechny DH-notace dávají stejnou PKÚ.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34



DH-notace:

- ◆ popisuje otevřené kinematické řetězce,
- ◆ je navržena pro otočné a posuvné klouby,
- ◆ přiřazuje jednotlivým ramenům souřadnicové systémy,
- ◆ popisuje jednotlivé klouby pomocí čtyř parametrů (θ, d, a, α) , (a, α) jsou vždy konstantní, jeden z dvojice (θ, d) je kloubová proměnná,
- ◆ přímo použitelná pro řešení přímé kinematické úlohy (PKÚ),
- ◆ je algoritmizovatelný postup,
- ◆ není jednoznačná, ale všechny DH-notace dávají stejnou PKÚ.

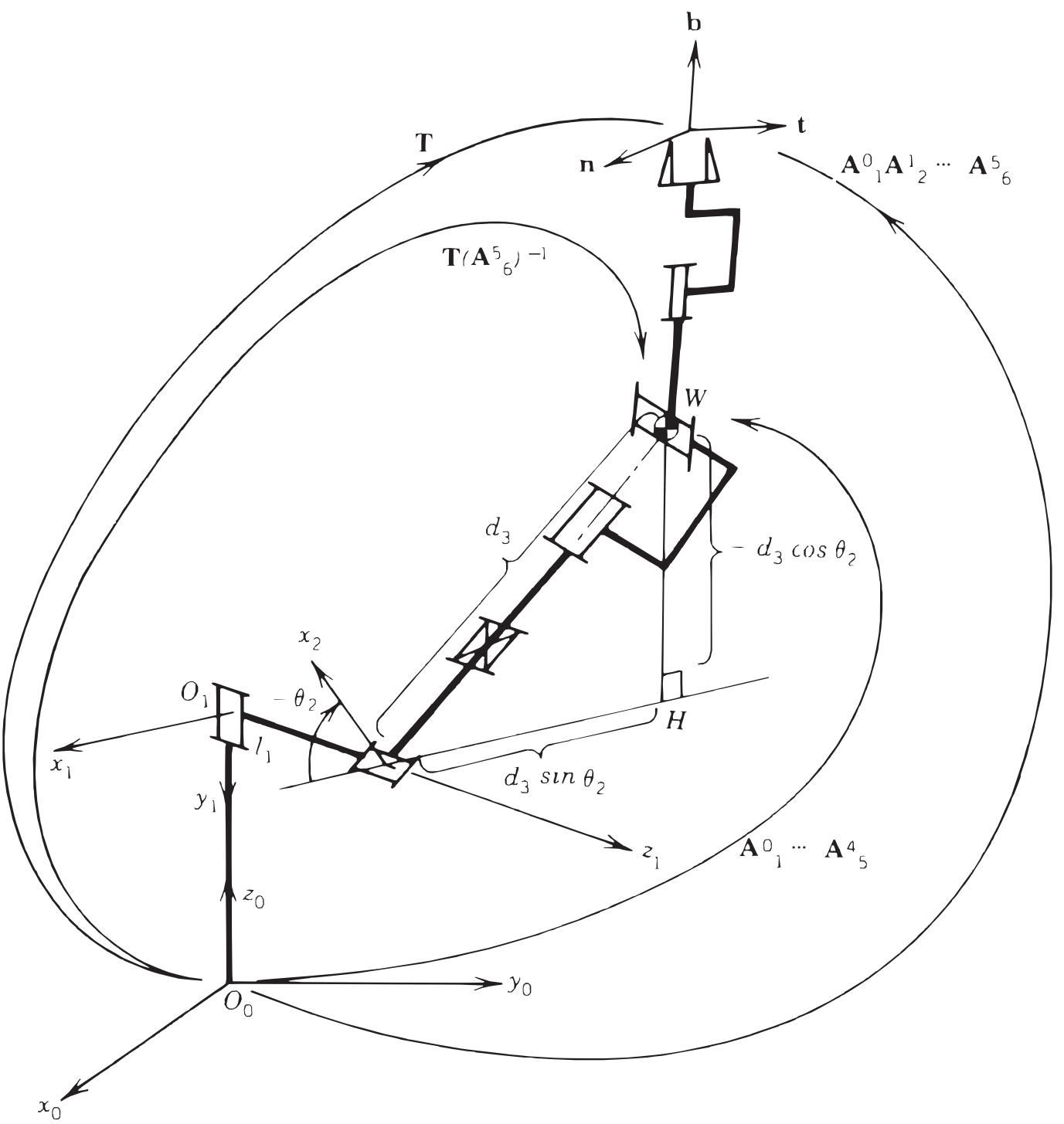
Otázka k zamyšlení: Těleso v prostoru (např. $i+1$ -ní rameno), má 6 DOF, v DH-notaci stačí čtyři parametry. Je to rozpor a proč?

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Inverzní kinematika 5-R-1-P manipulátoru



m p



1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Inverzní kinematika - příklad



m p

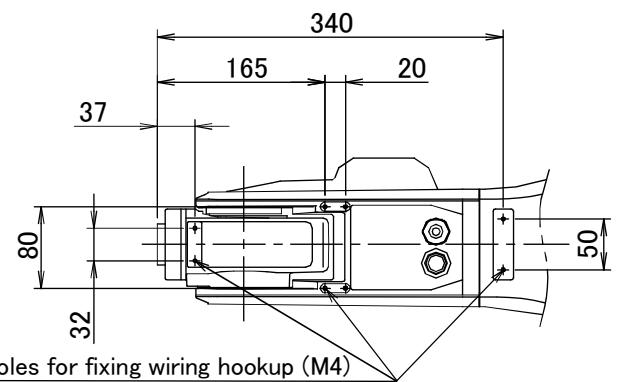


1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

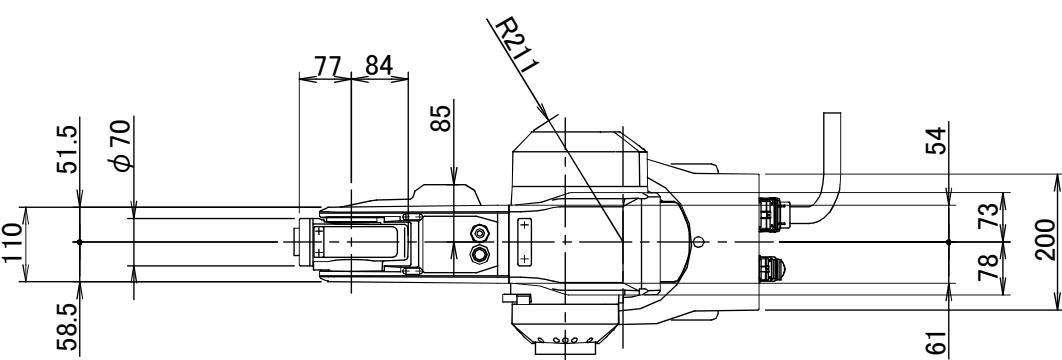


Inverzní kinematika - příklad

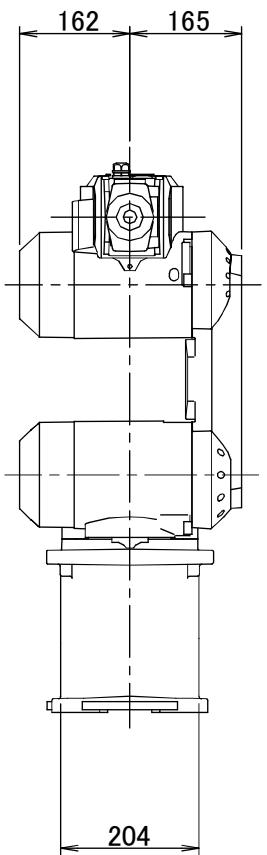
View A: Detail of mechanical interface



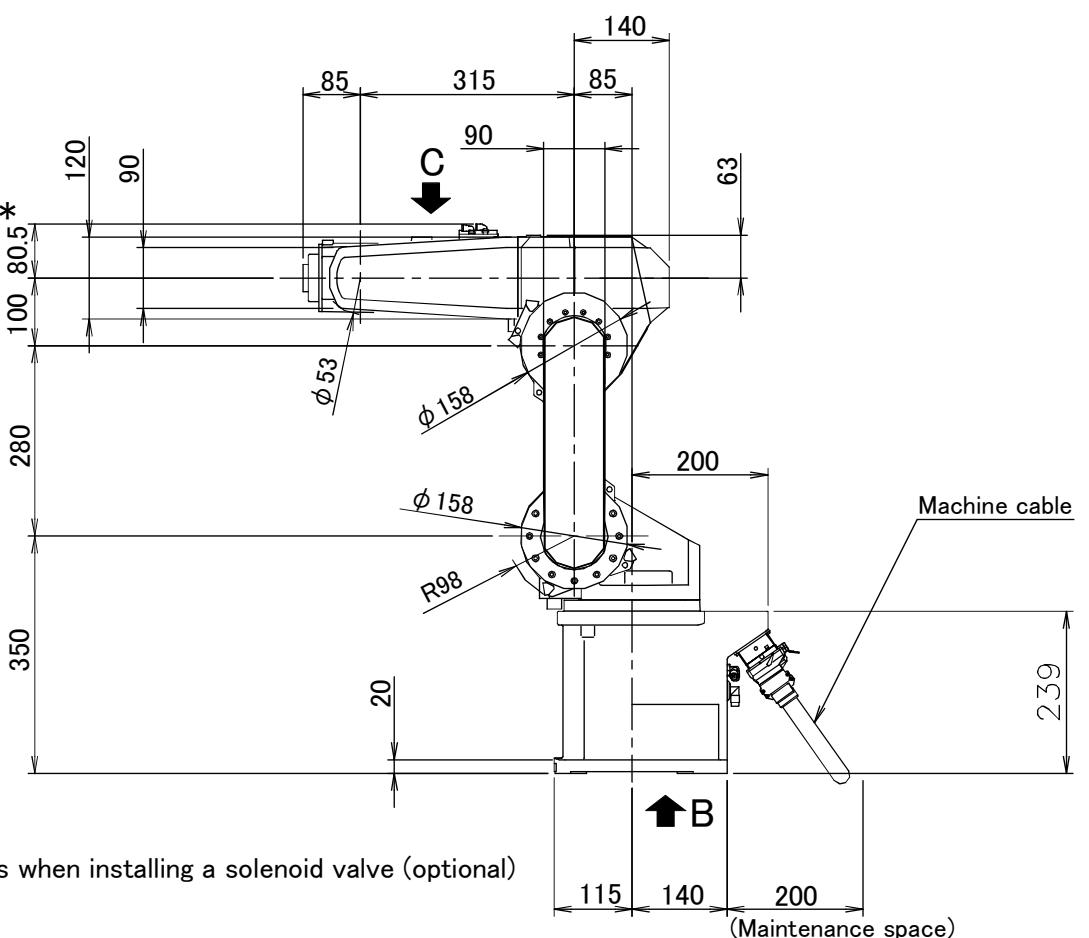
View D bottom view drawing : Detail of installation dimension



View C: Detail of screw holes for fixing wiring hookup



A →

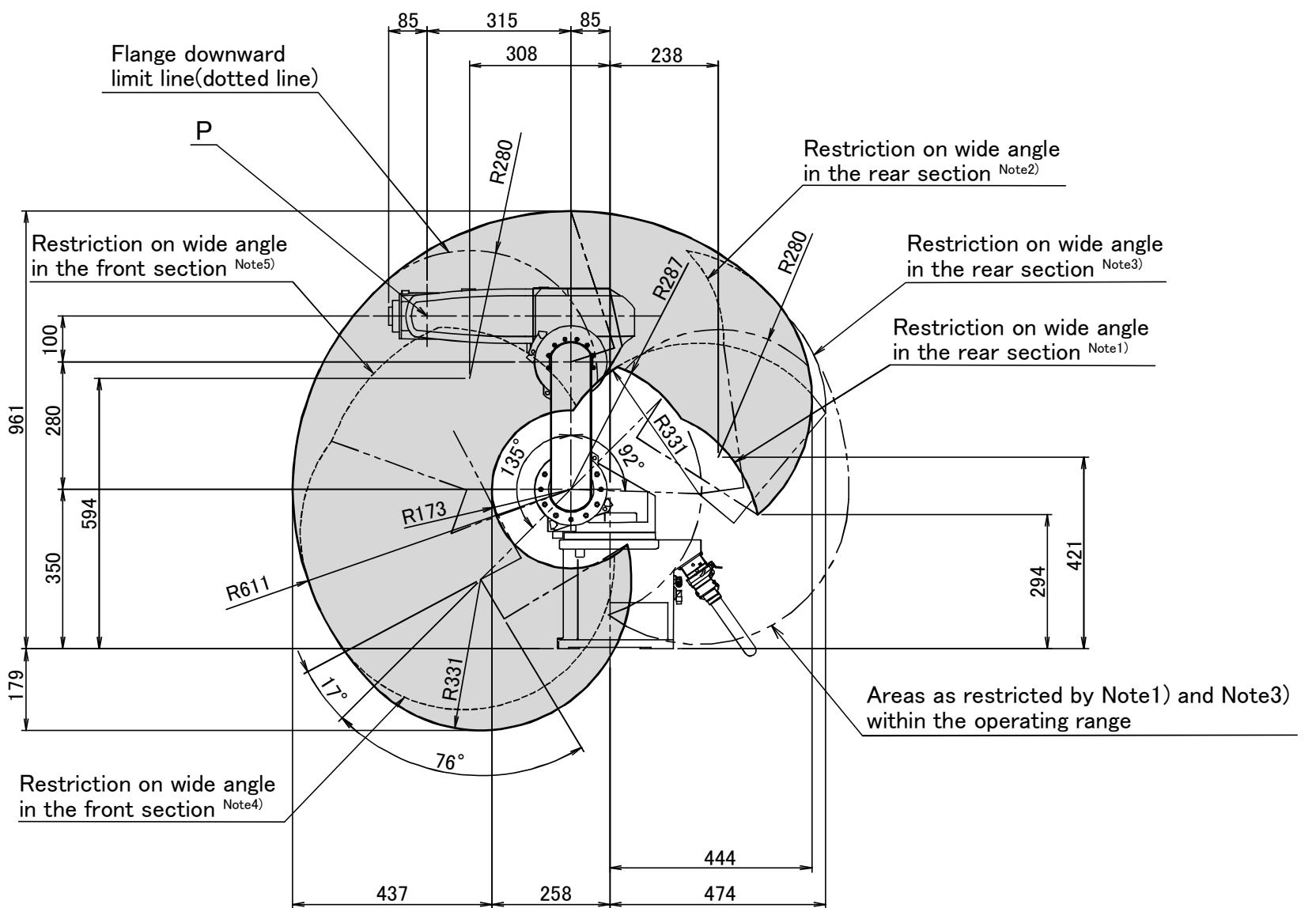


1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Inverzní kinematika - příklad



m p



Restriction on wide angle in the rear section

Note1) $J_2 + J_3 \times 2 \geq -200$ degree when $-45 \text{ degree} \leq J_2 < 15 \text{ degree}$.

Note2) $J_2 + J_3 \geq 8$ degree when $|J_1| \leq 75 \text{ degree}$, $J_2 < -45 \text{ degree}$.

Note3) $J_2 + J_3 \geq -40$ degree when $|J_1| > 75 \text{ degree}$, $J_2 < -45 \text{ degree}$.

Restriction on wide angle in the front section

Note4) $J_3 \geq -40$ degree when $-105 \text{ degree} \leq J_1 \leq 95 \text{ degree}$, $J_2 \geq 123 \text{ degree}$.

Note5) $J_2 \geq 110 \text{ degree}$ when $J_1 < -105 \text{ degree}$, $J_1 < -95 \text{ degree}$.

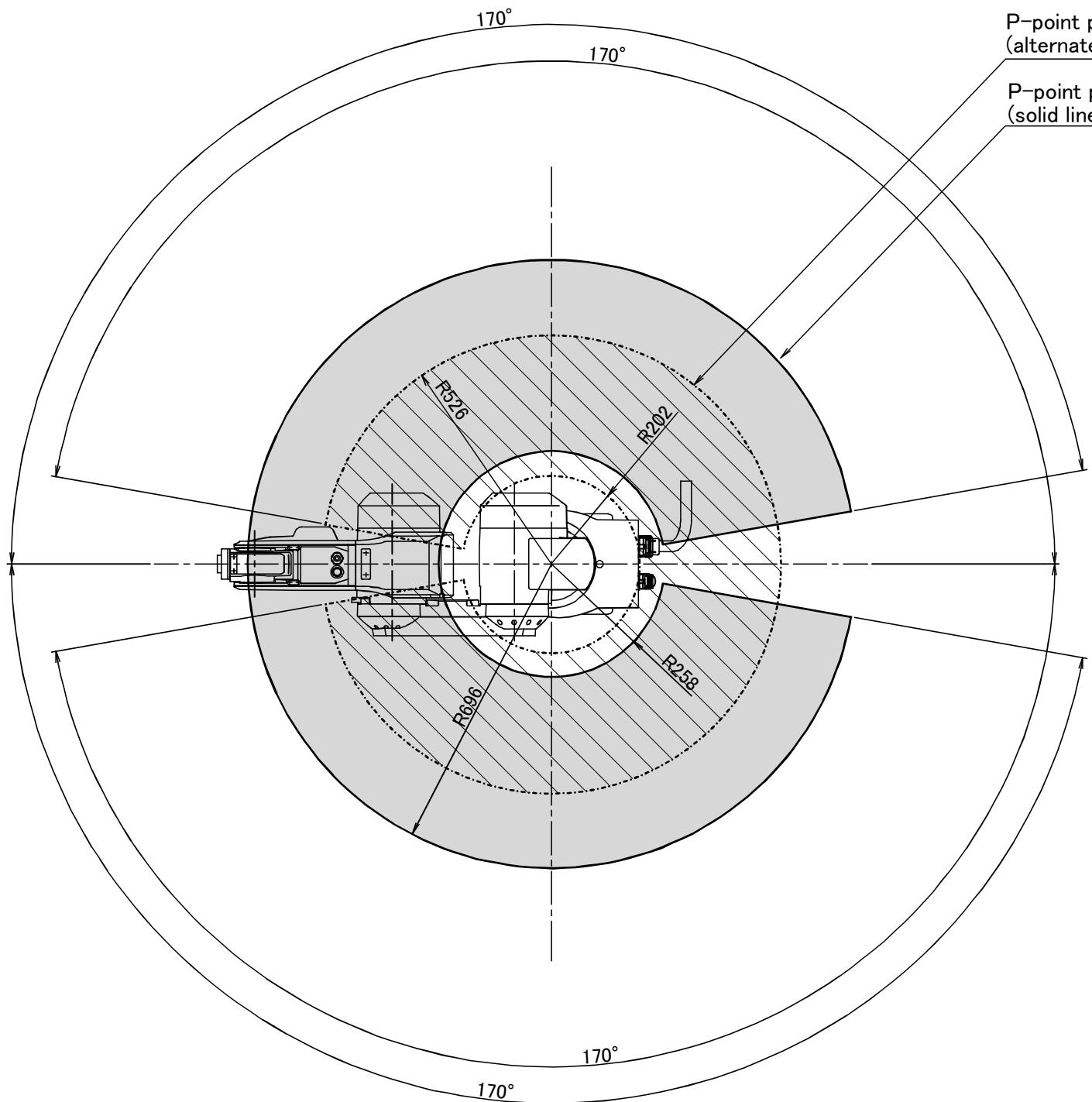
However, $J_2 - J_3 \leq 150$ degree when $85 \text{ degree} \leq J_2 \leq 110 \text{ degree}$.

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Inverzní kinematika - příklad



m p

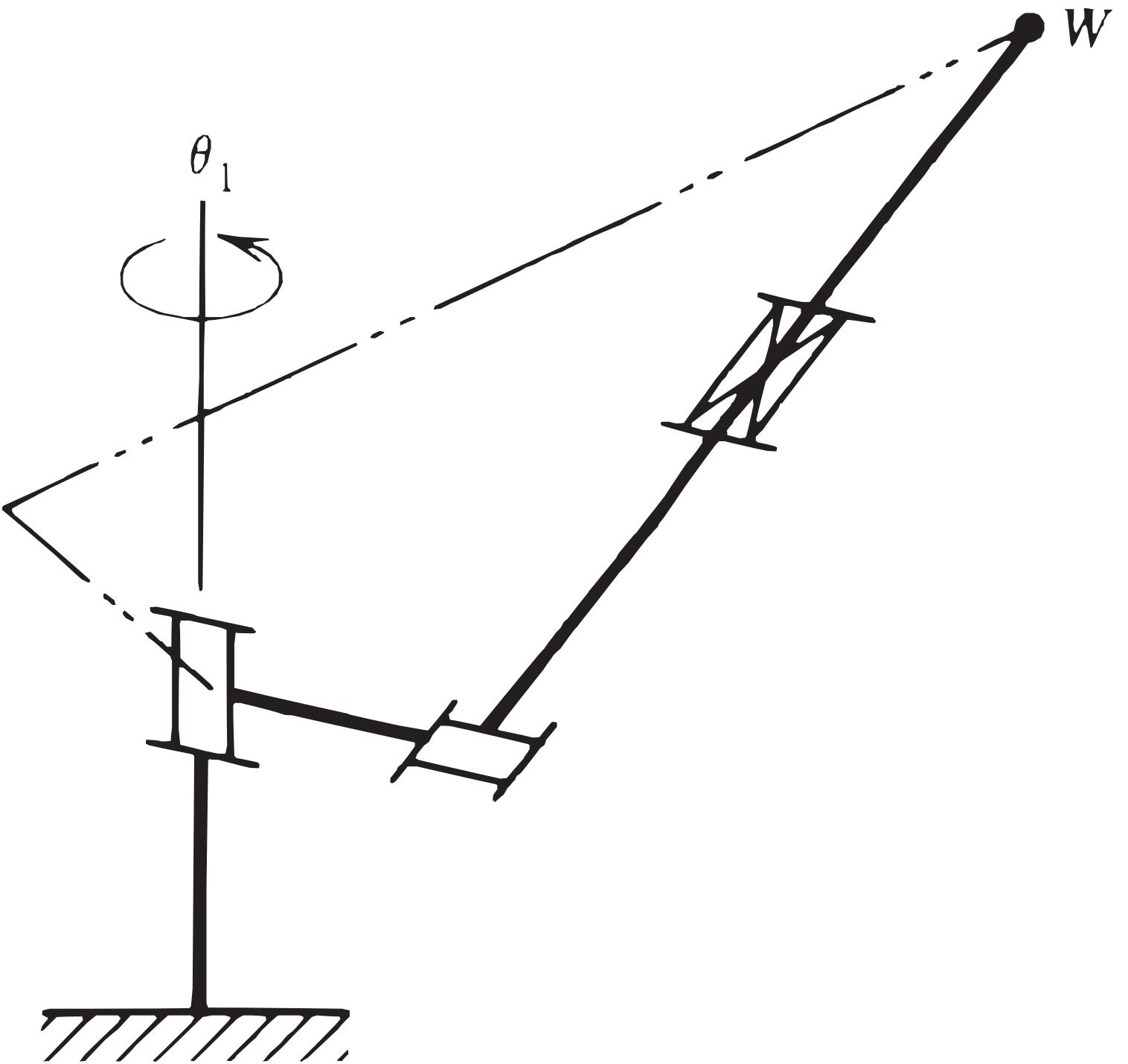


1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Nejednoznačnost inverzní kinematické úlohy



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

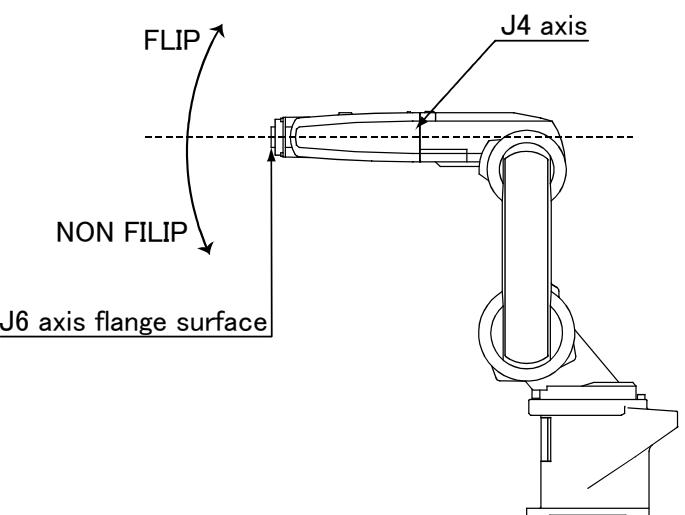
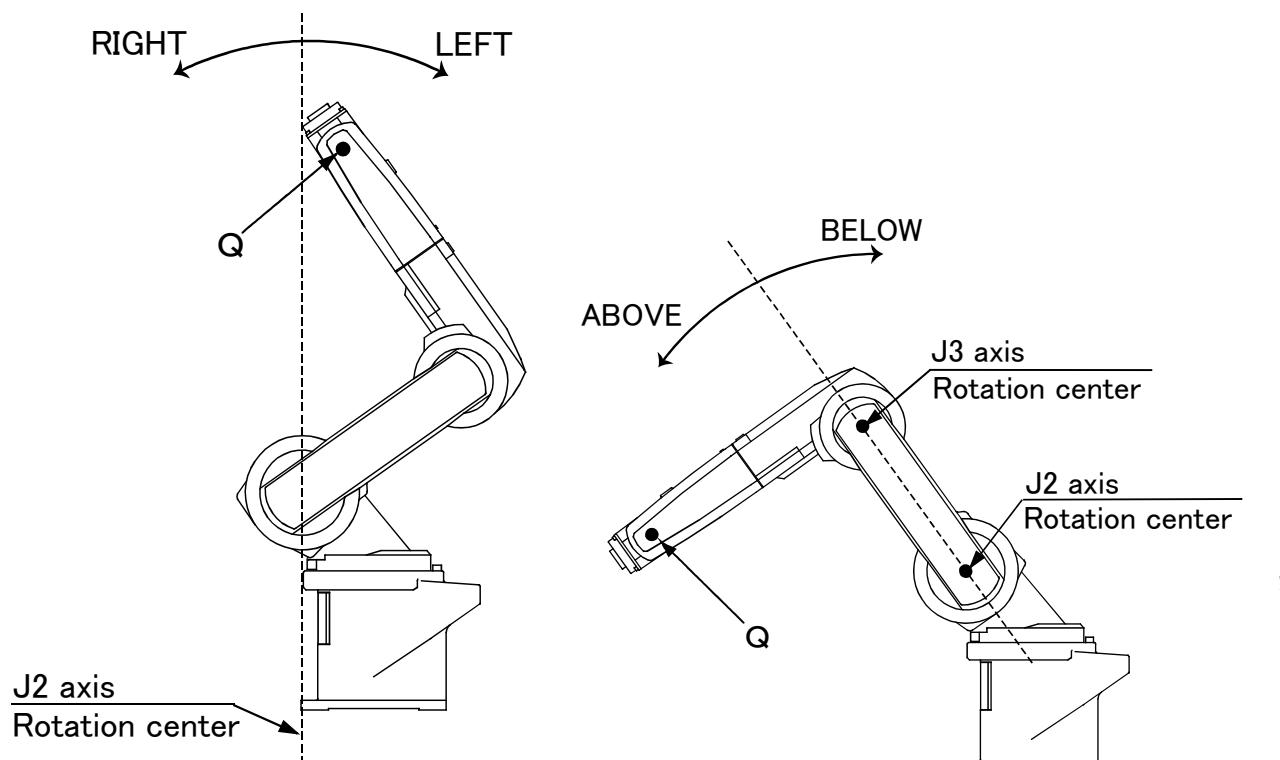
31 32

33 34

Inverzní kinematika - konfigurace



m p

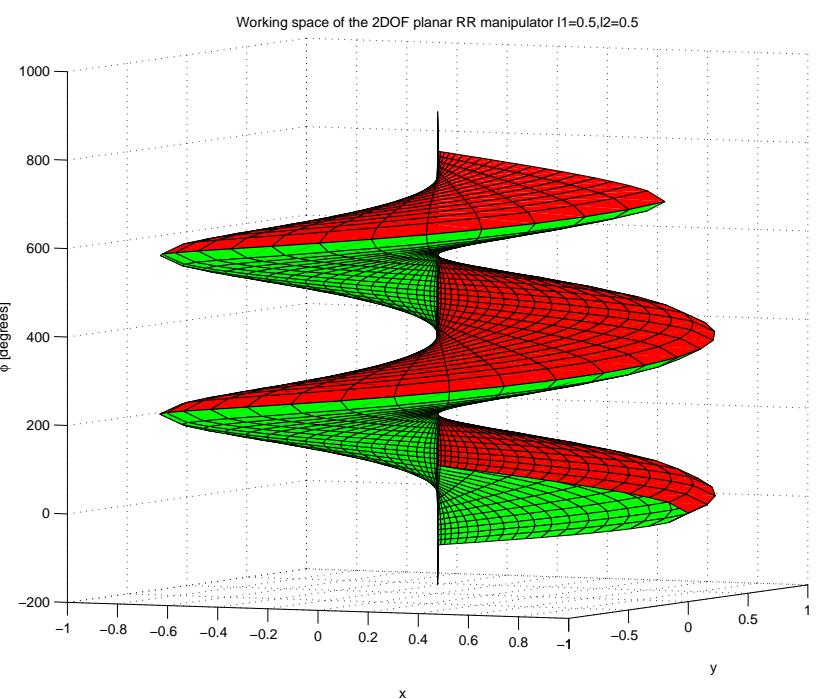
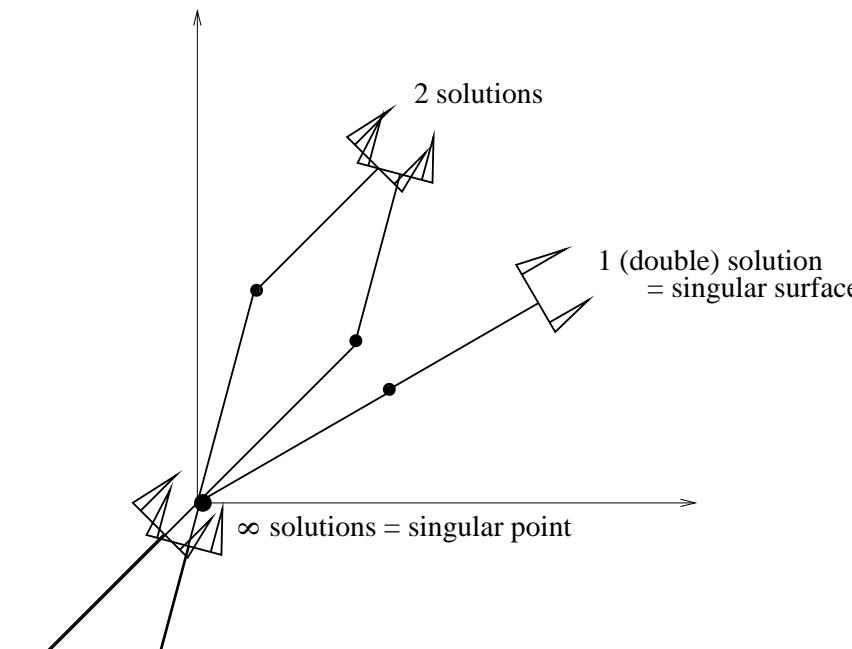
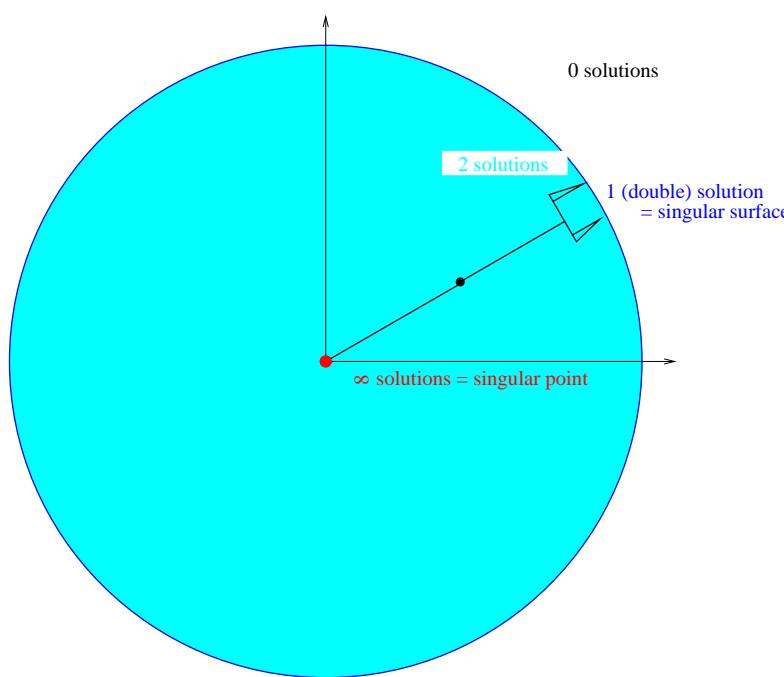
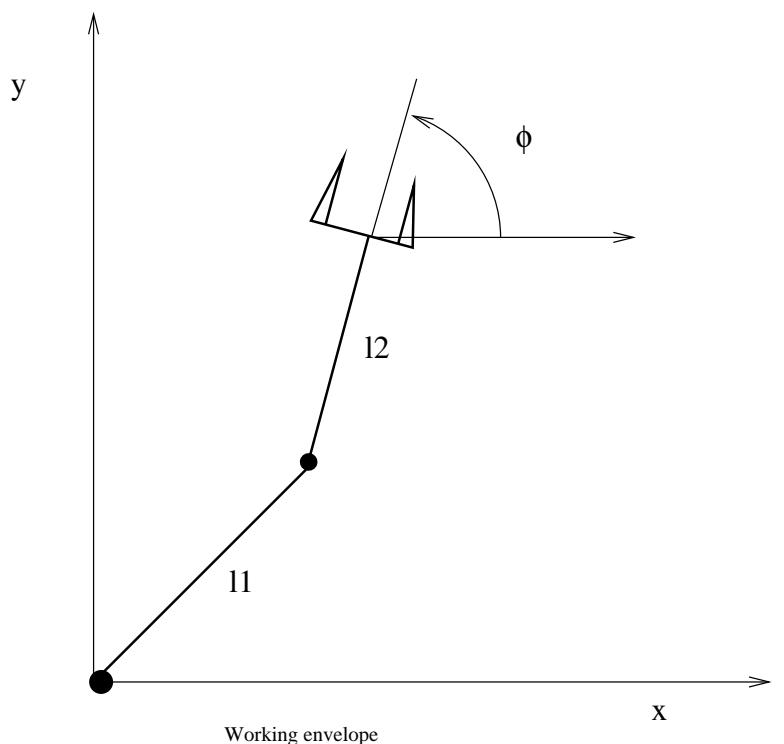


1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Příklad: Počet řešení IKT pro jednoduchý rovinný manipulátor



m p



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

Příklad: Počet řešení IKT pro jednoduchý rovinný manipulátor
3D model zobrazují jen některé prohlížeče (např. Acrobat)



m p

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

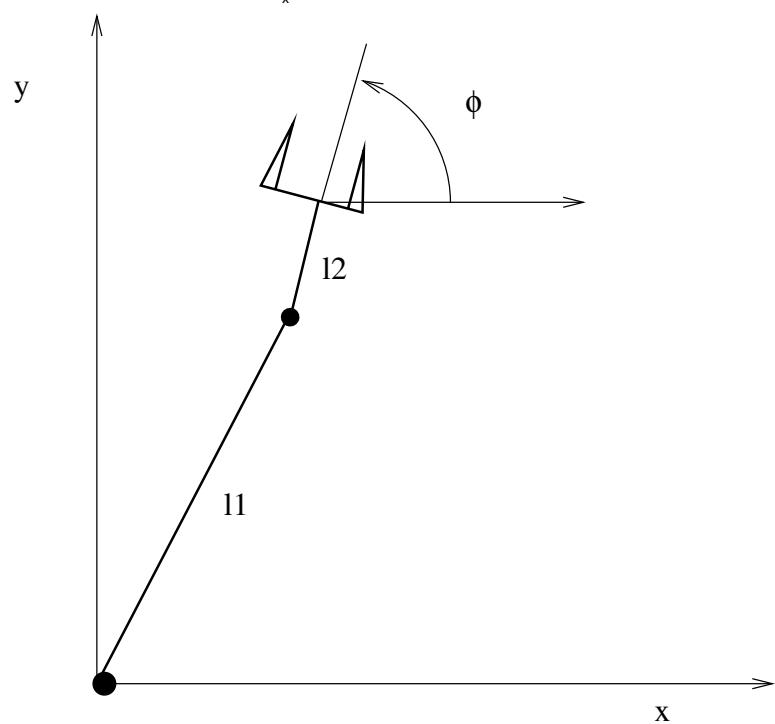
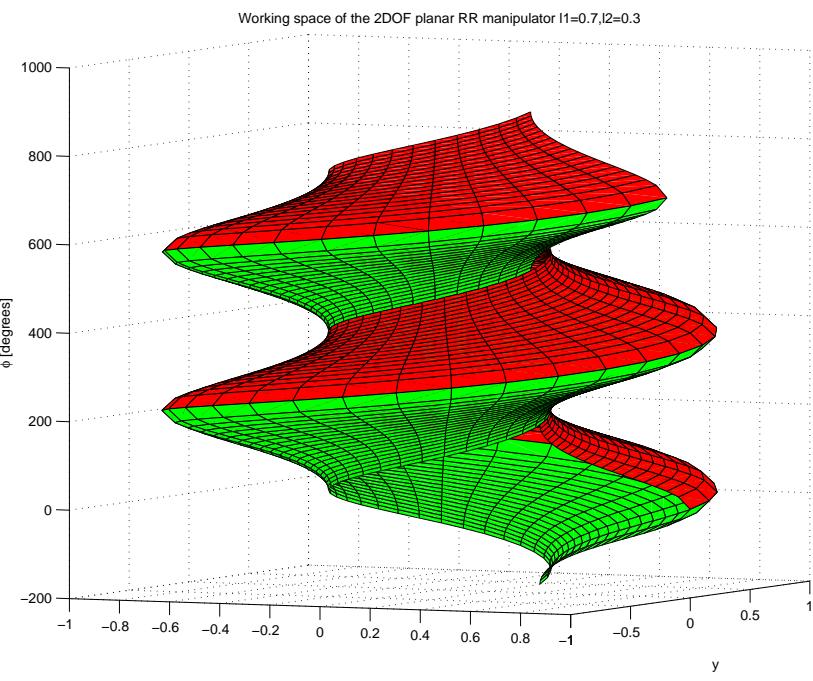
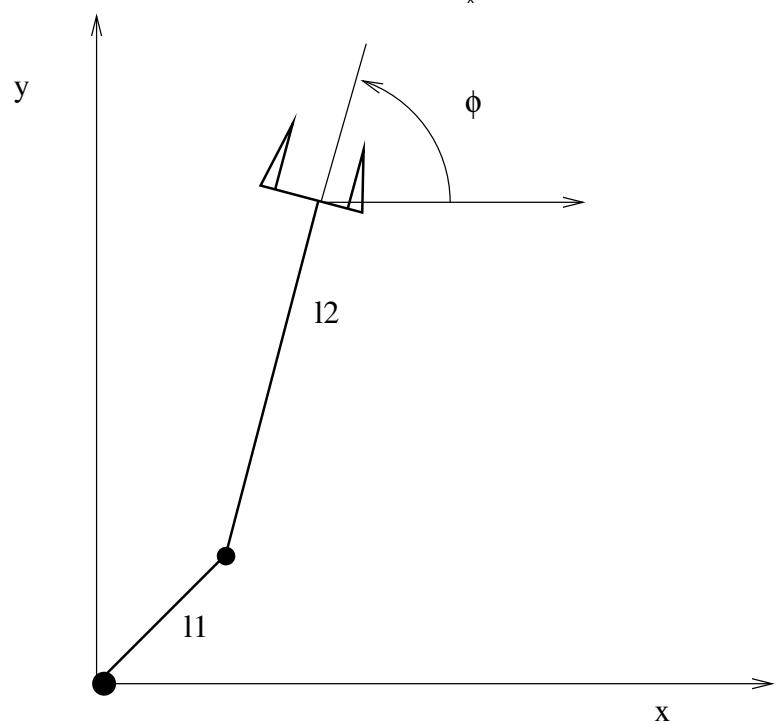
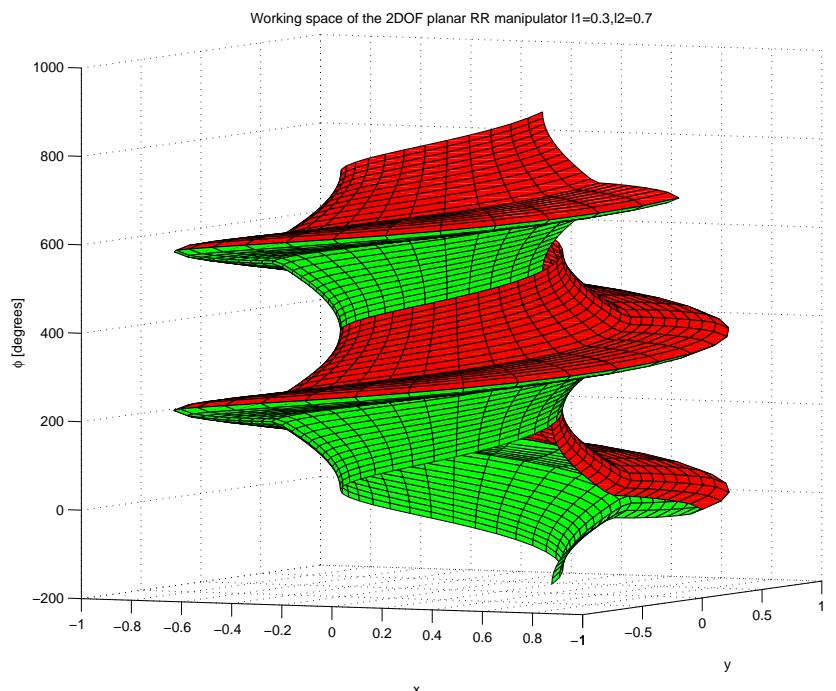
33 34

(simple2D1.u3d; this could be previewed only in the Acrobat Reader)

Příklad: Počet řešení IKT pro jednoduchý rovinný manipulátor



m p



1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Příklad: Počet řešení IKT pro jednoduchý rovinný manipulátor, $l_1 < l_2$
3D model zobrazují jen některé prohlížeče (např. Acrobat)



m p

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34

(simple2D2.u3d; this could be previewed only in the Acrobat Reader)

Příklad: Počet řešení IKT pro jednoduchý rovinný manipulátor, $l_1 > l_2$
3D model zobrazují jen některé prohlížeče (např. Acrobat)



m p

1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

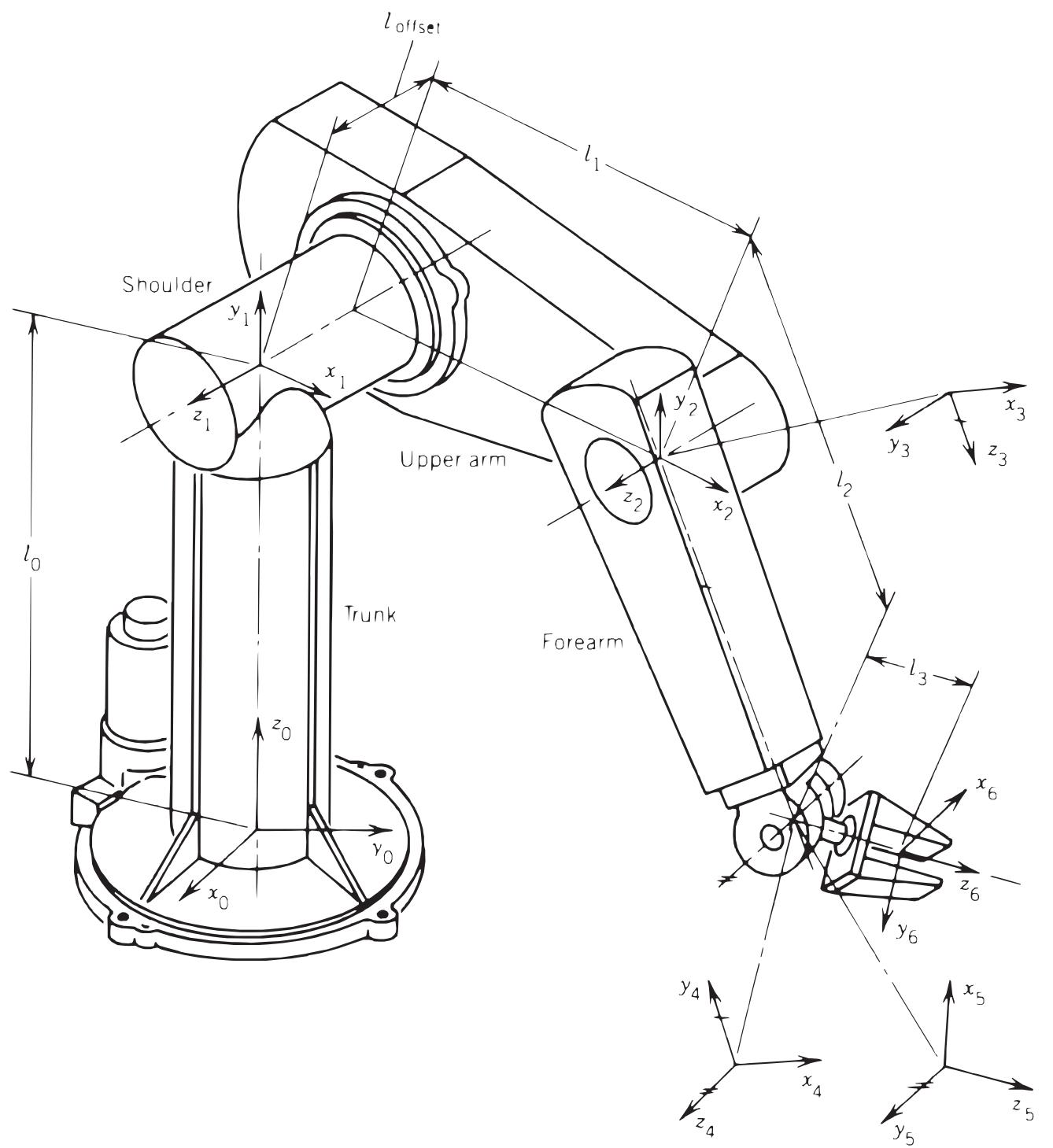
27 28

29 30

31 32

33 34

(simple2D3.u3d; this could be previewed only in the Acrobat Reader)



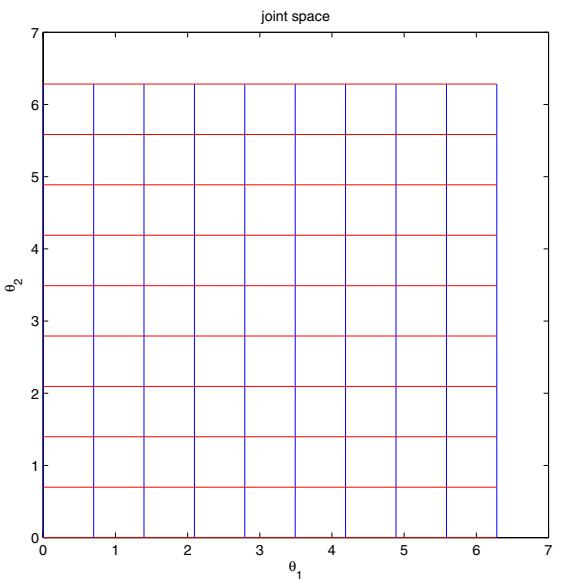
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34

Zobrazení mezi kloubovým a kartézským prostorem

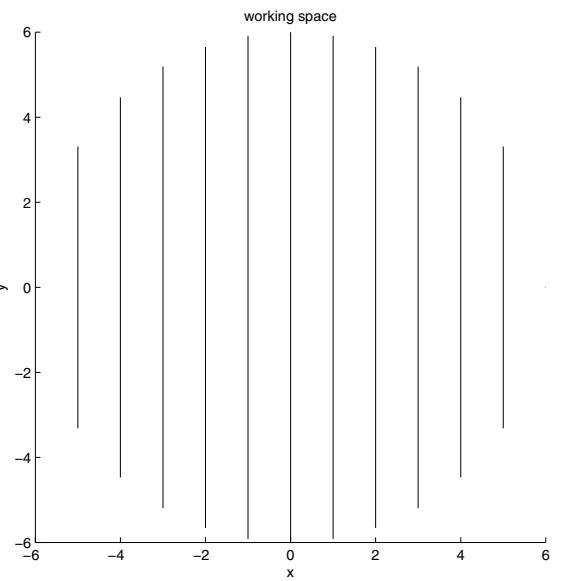
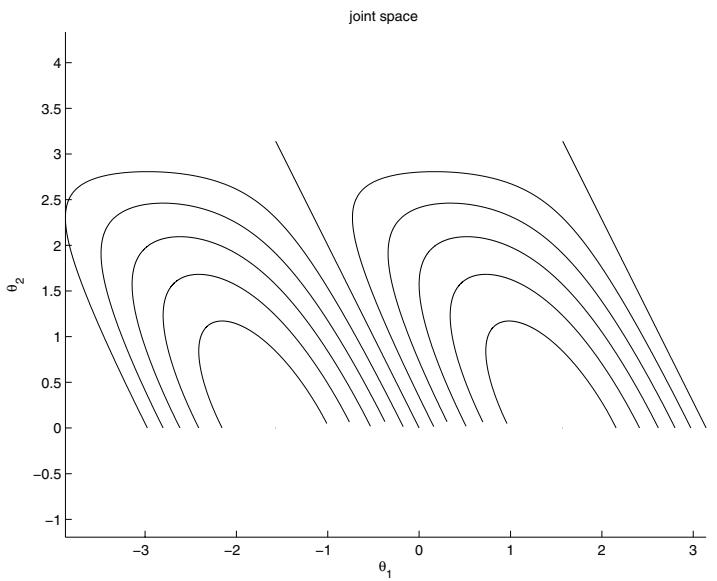
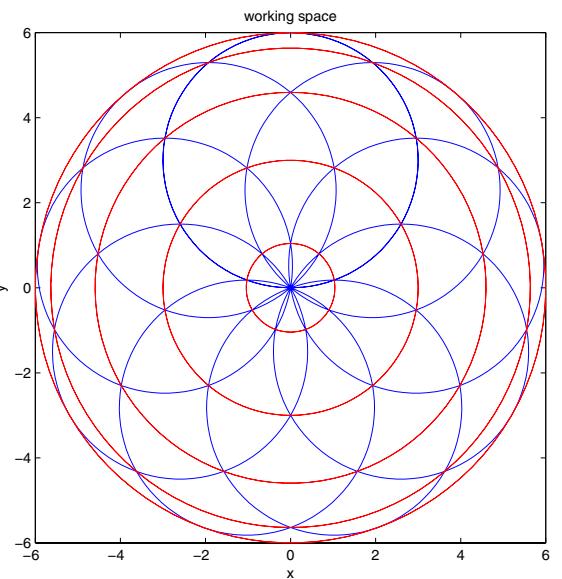


m p

Kloubový prostor



↔ Pracovní (kartézský) prostor



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

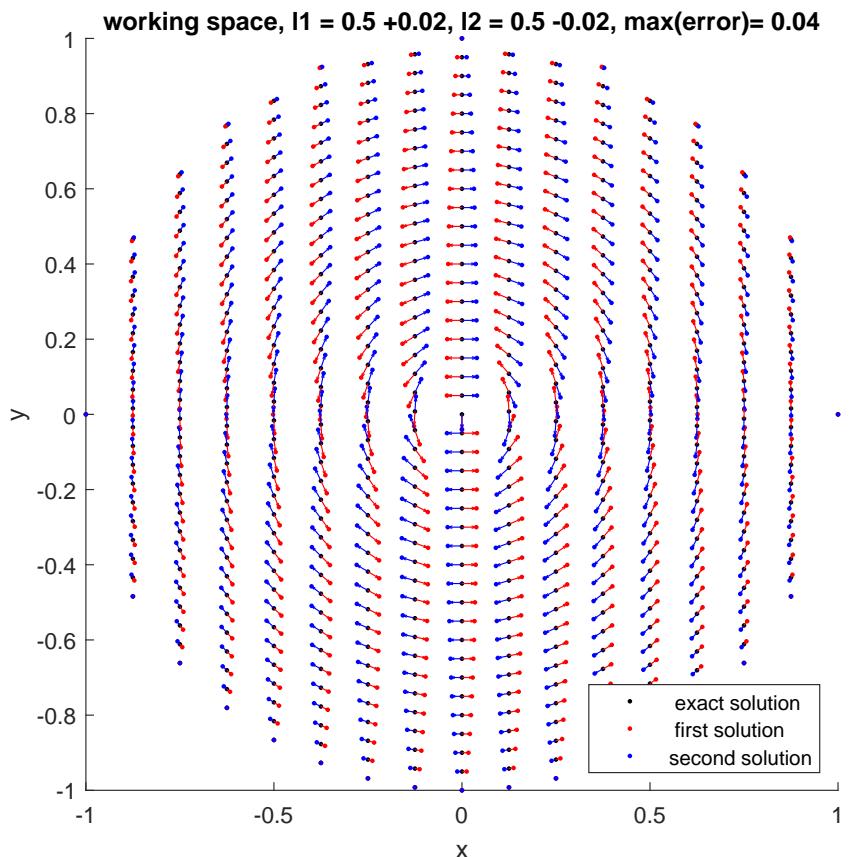
27 28

29 30

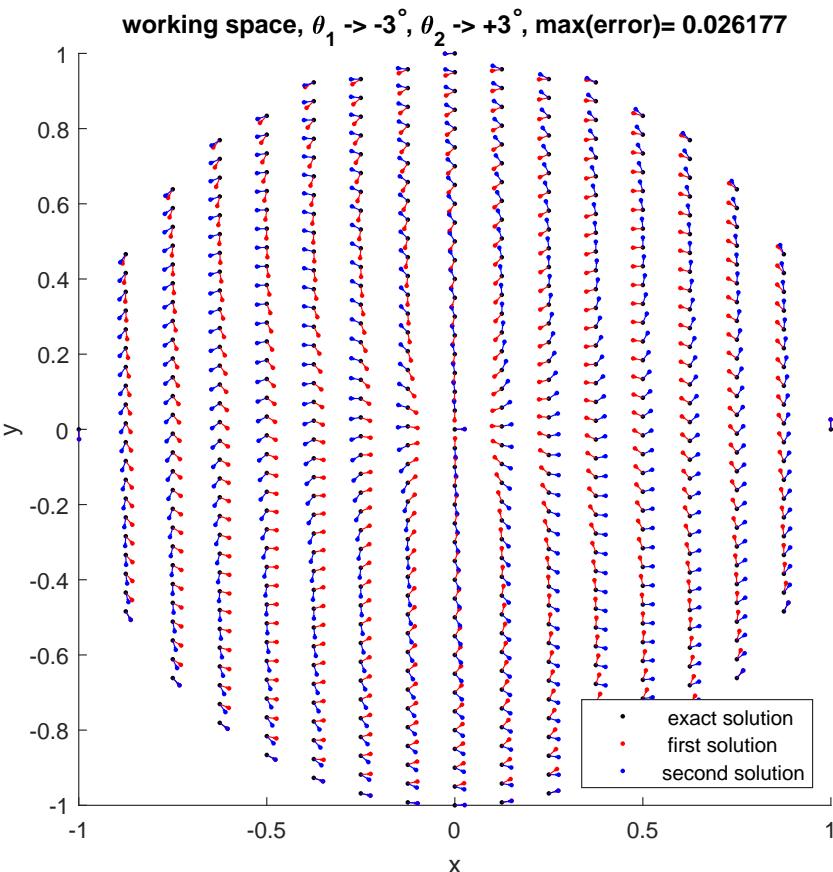
31 32

33 34

Nepřesně známé délky rámén



Nepřesně známé offsety úhlů



1 2

3 4

5 6

7 8

9 10

11 12

13 14

15 16

17 18

19 20

21 22

23 24

25 26

27 28

29 30

31 32

33 34



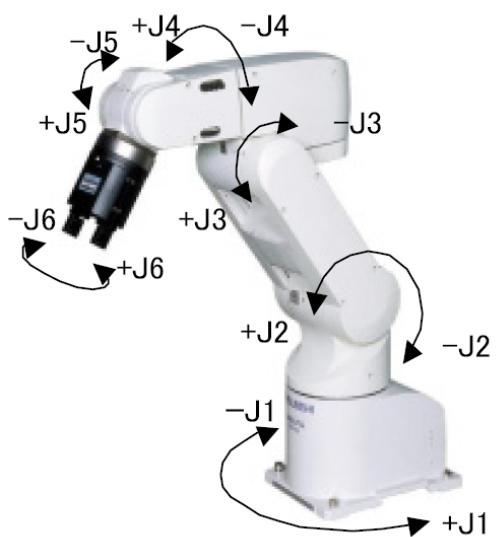
Přímá a inverzní kinematická úloha - shrnutí

kinematika	struktura	počet řešení	obtížnost	1	2
přímá	otevřený kin. řet.	1	snadná	3	4
	smíšený kin. řet.	0, 1, N , ∞	obtížná	5	6
	paralelní robot	0, 1, N , ∞	obtížná	7	8
inverzní	otevřený kin. řet.	0, 1, N , ∞	obtížná	9	10
	smíšený kin. řet.	0, 1, N , ∞	obtížná	11	12
	paralelní robot	0, 1, N , ∞	snadná	13	14
				15	16
				17	18
				19	20
				21	22
				23	24
				25	26
				27	28
				29	30
				31	32
				33	34

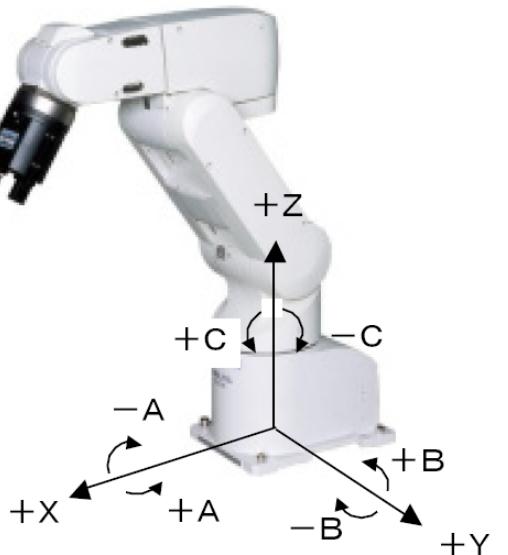
Pohyb v jiných souřadnicových systémech



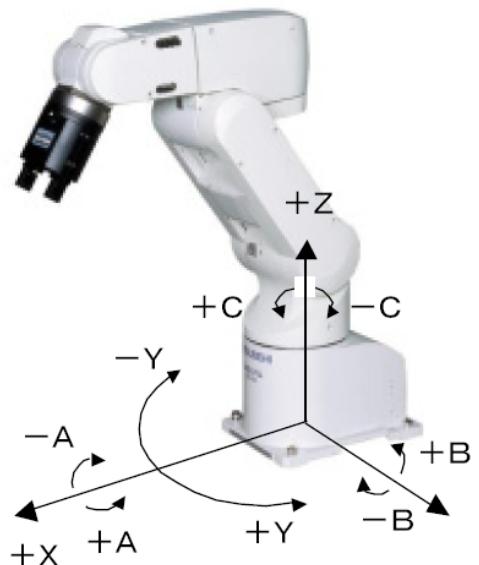
m p



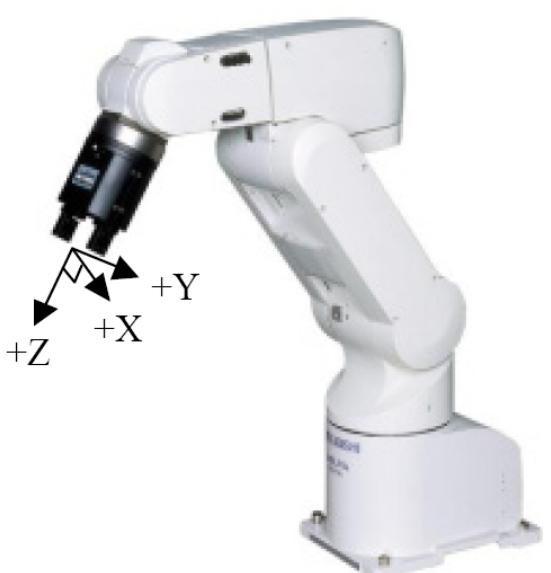
kloubové souřadnice



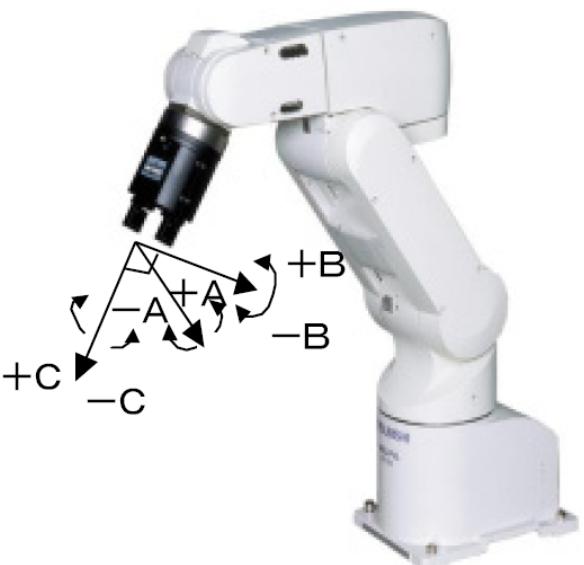
kartézské světové souřadnice



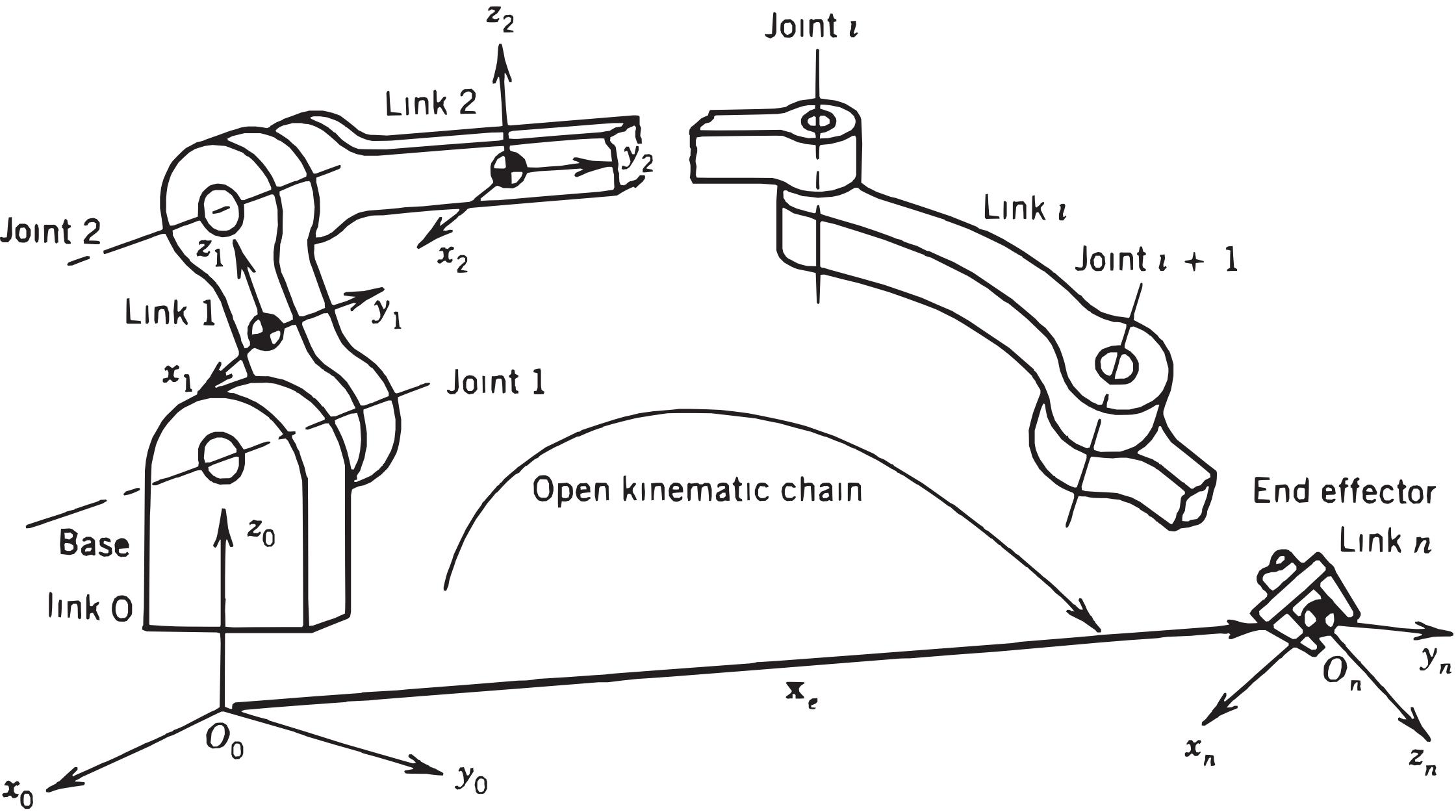
válcové světové souřadnice

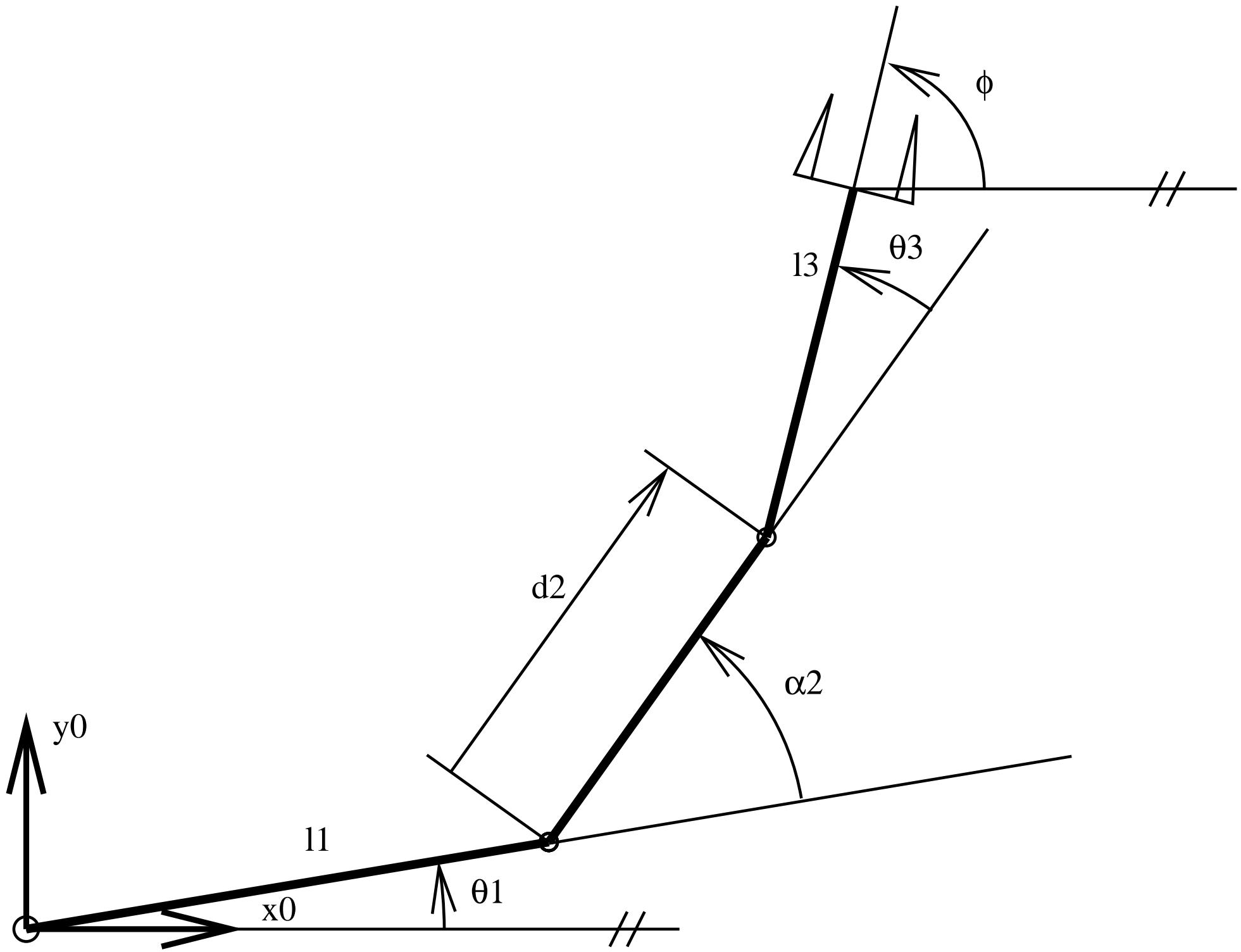


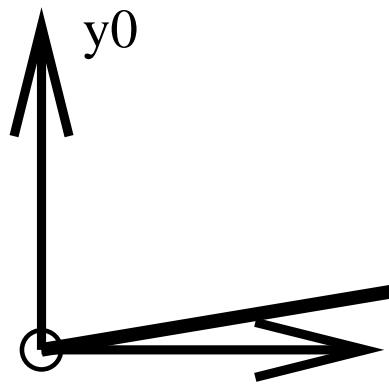
kartézské souřadnice chapadla



1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34





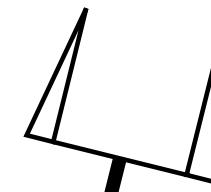
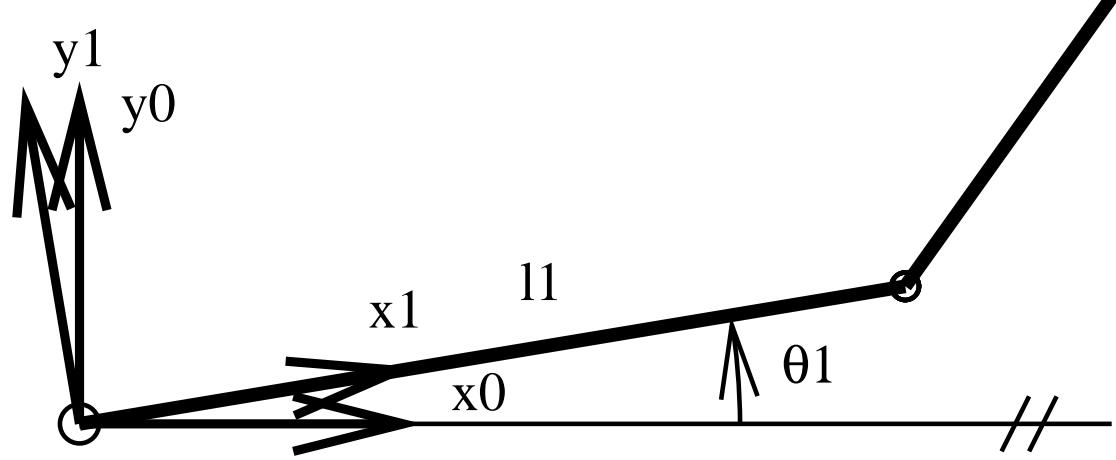


l1

x0

d2

l3



l_3

d_2

x_1

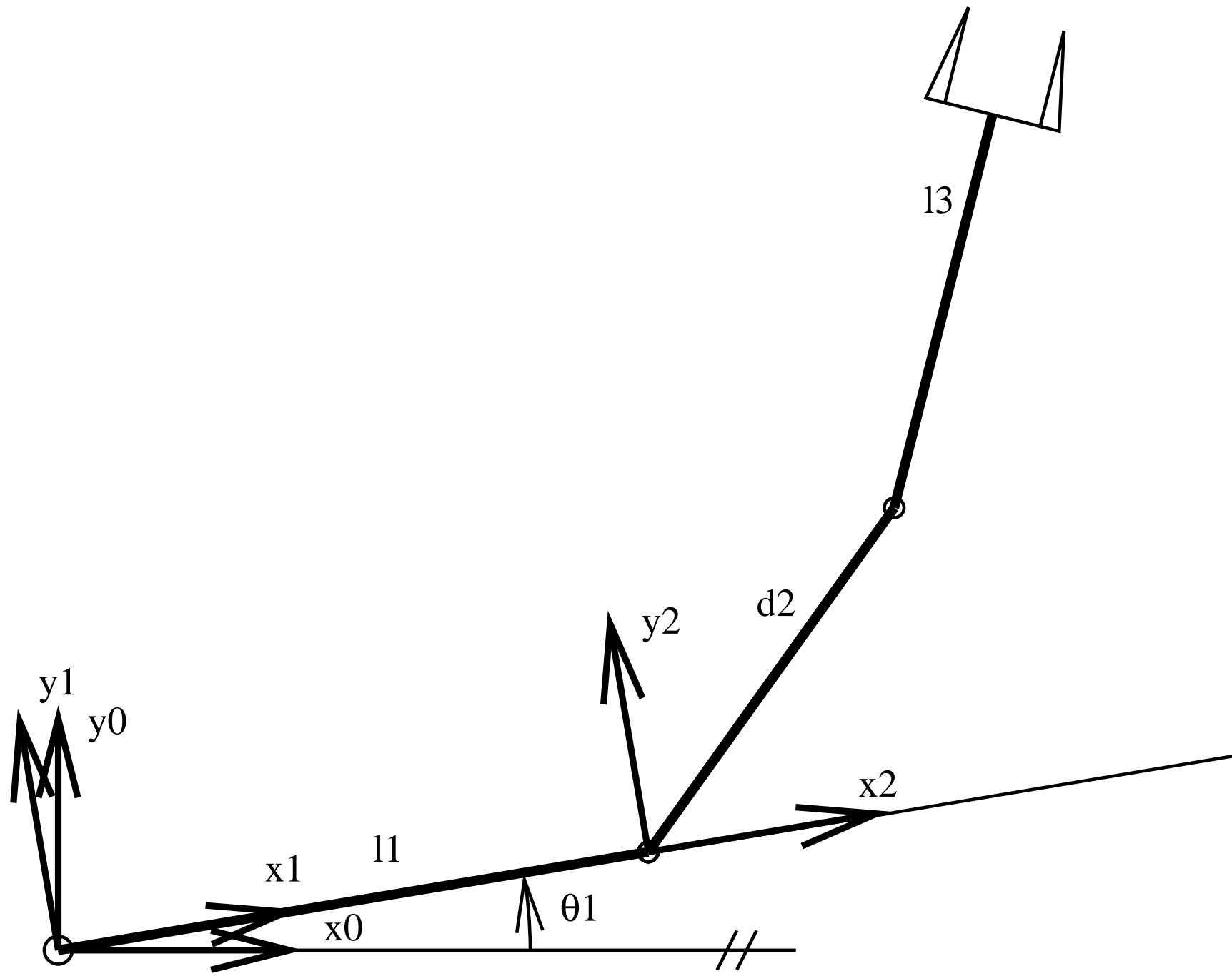
x_0

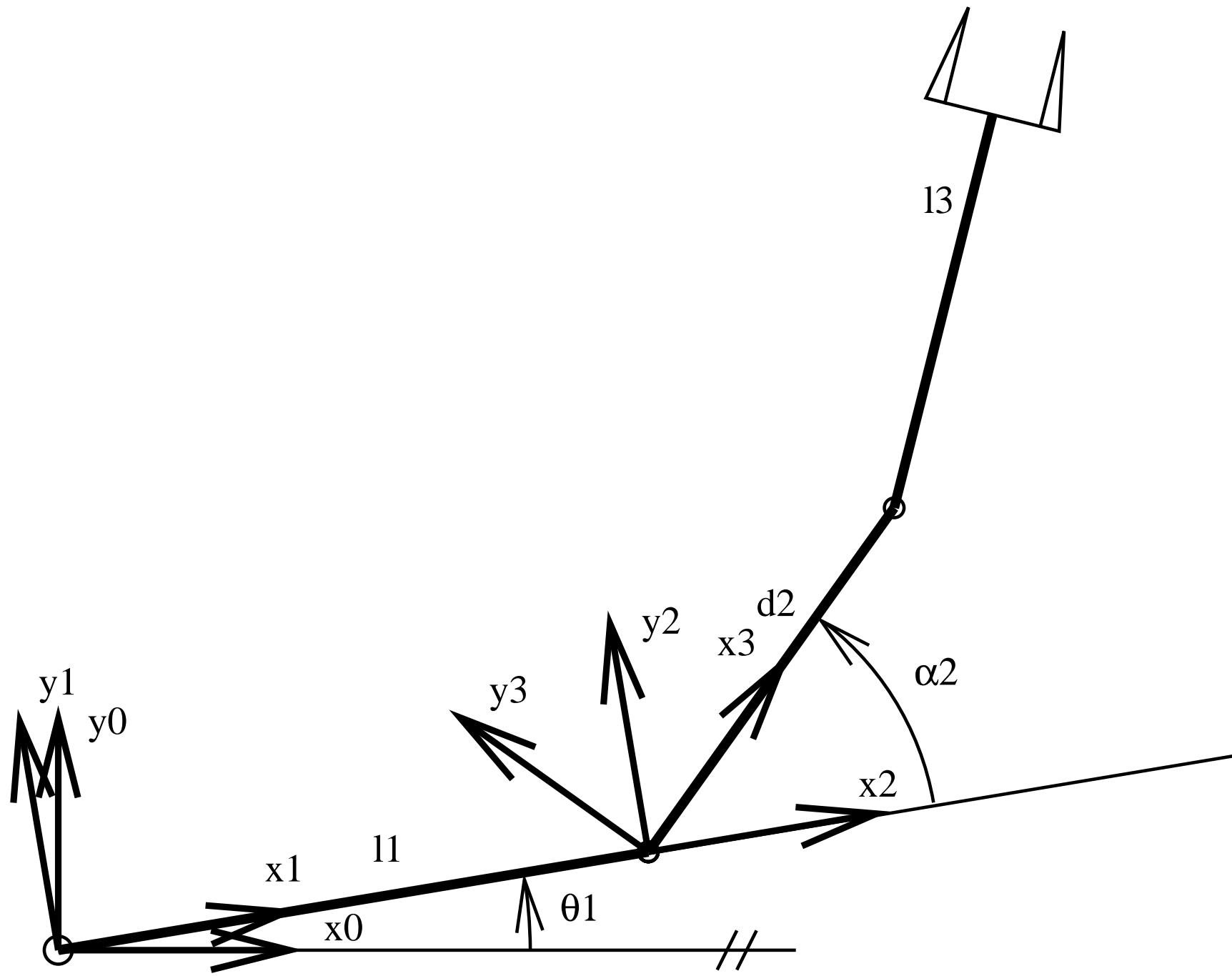
l_1

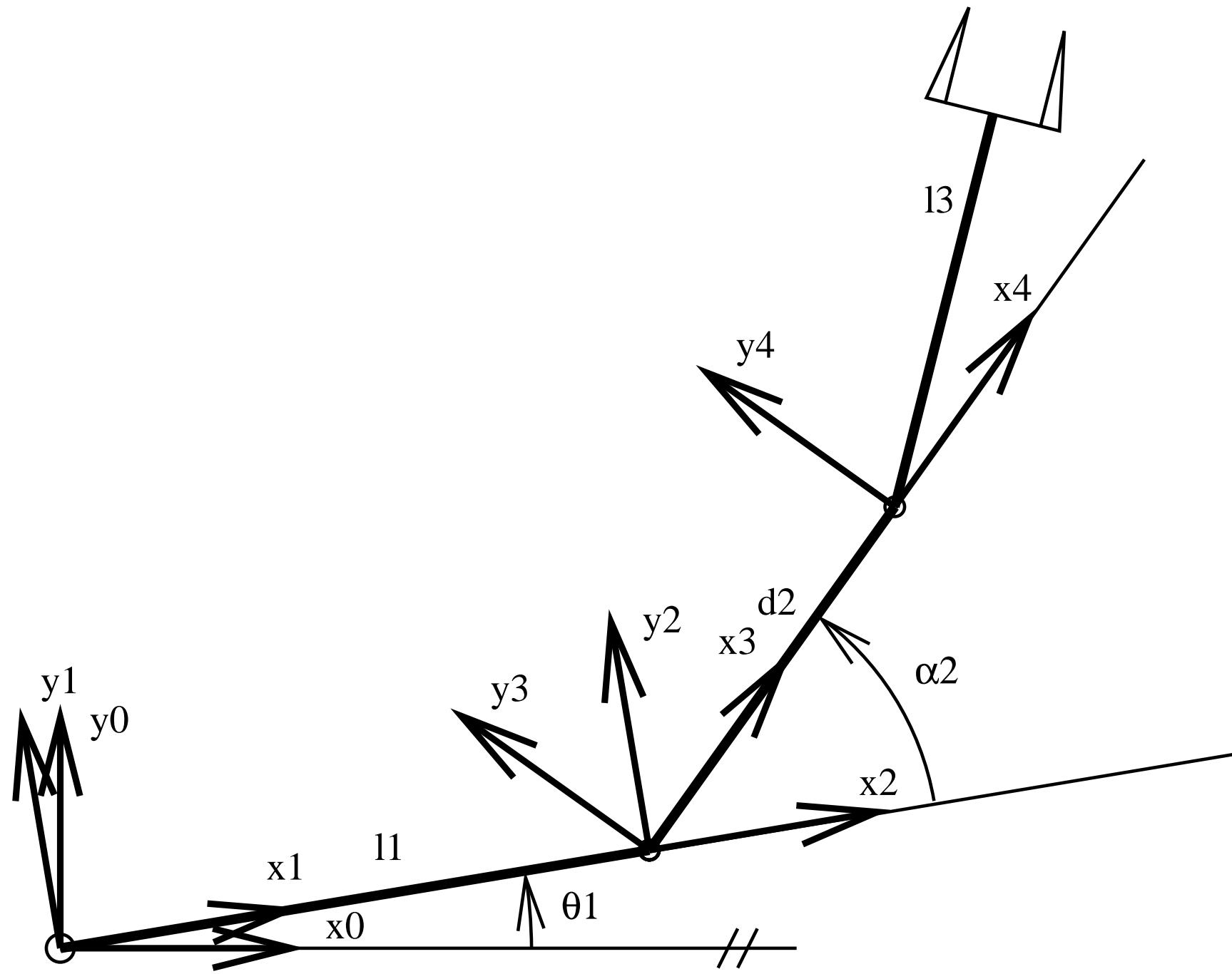
θ_1

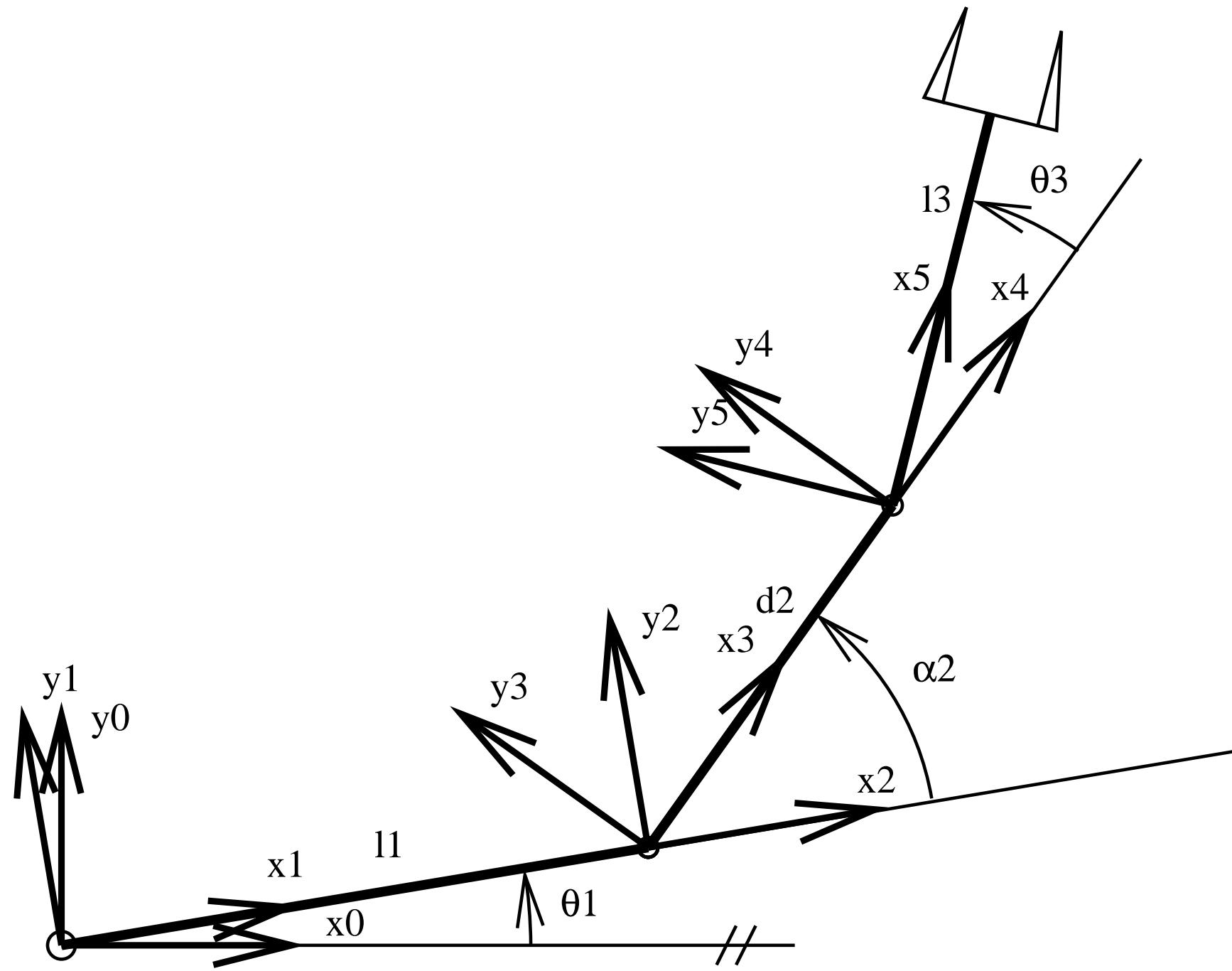
y_1

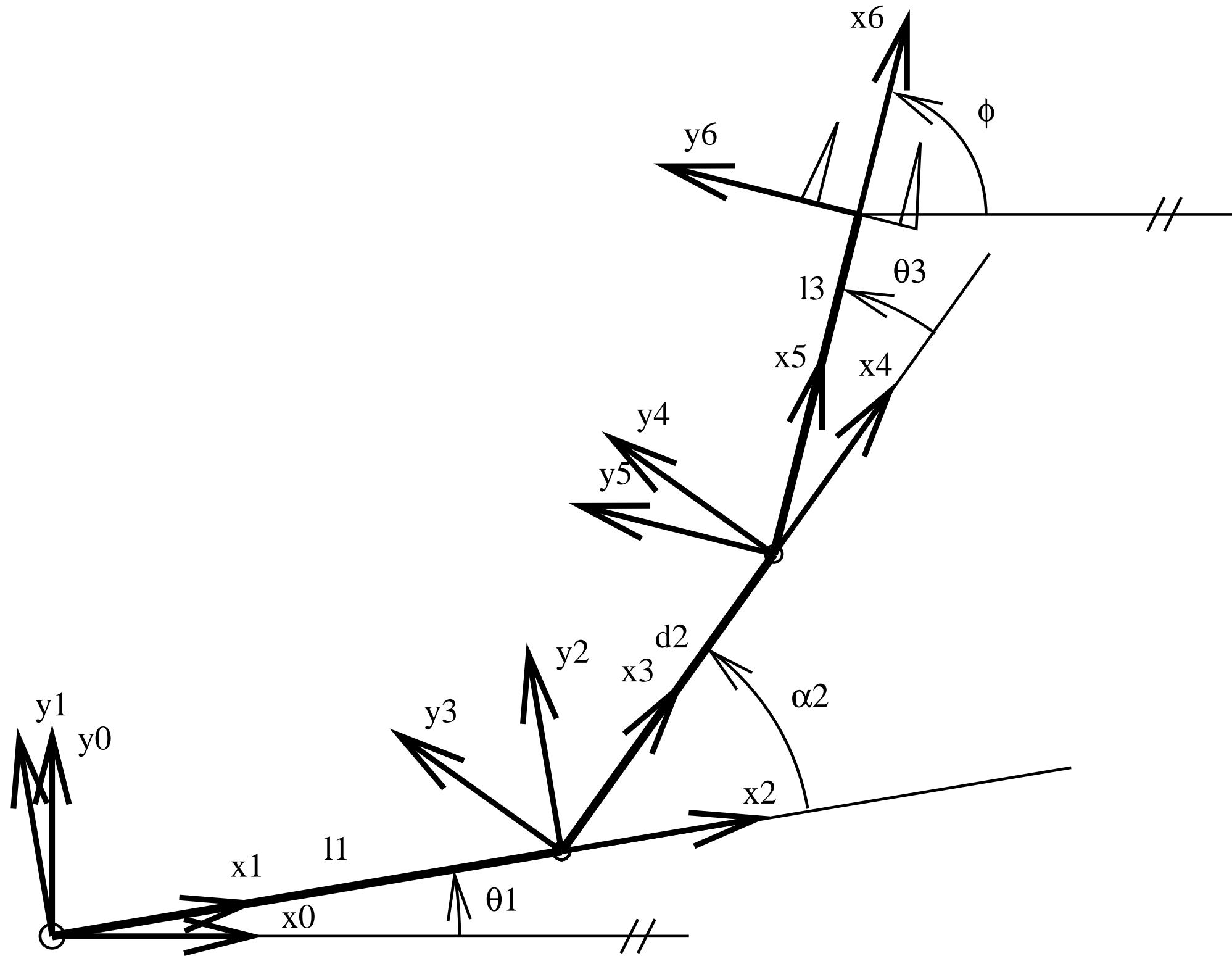
y_0

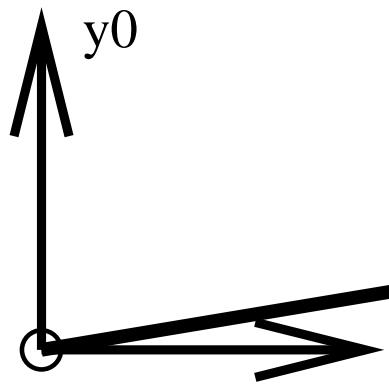










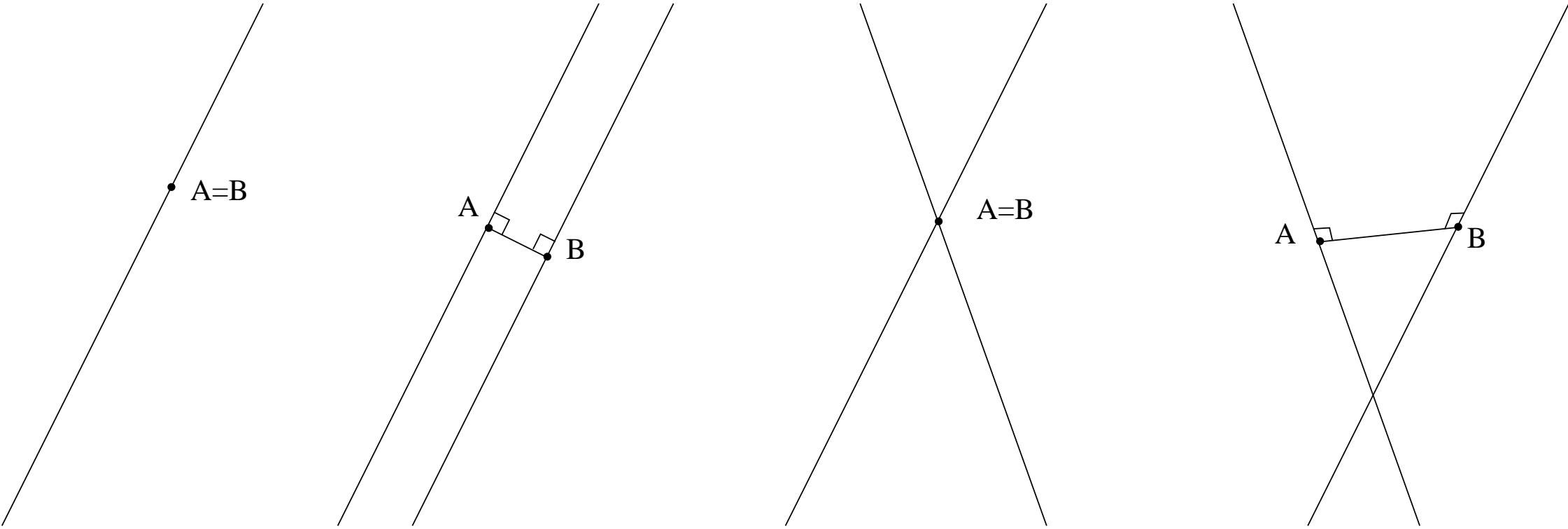


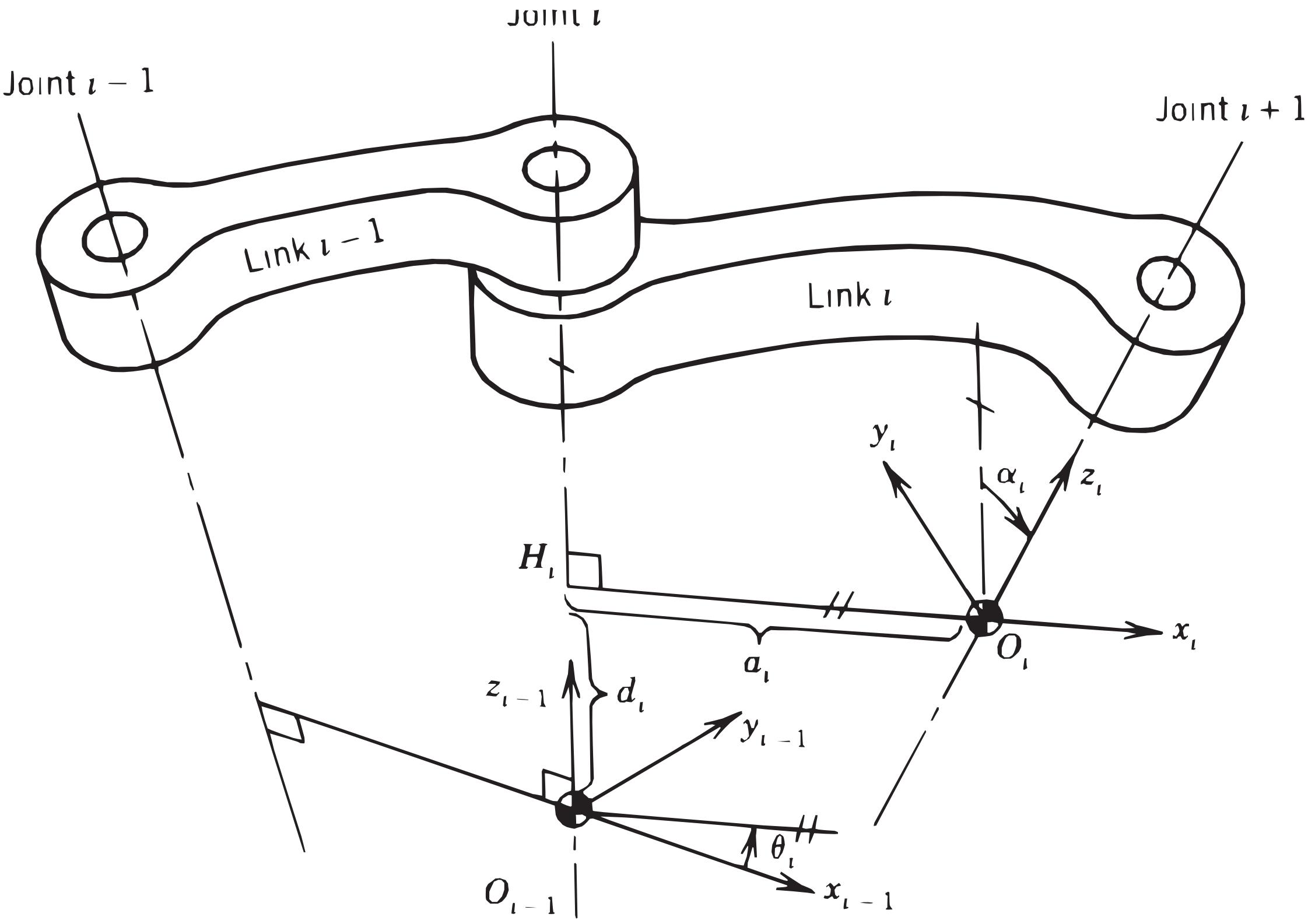
l1

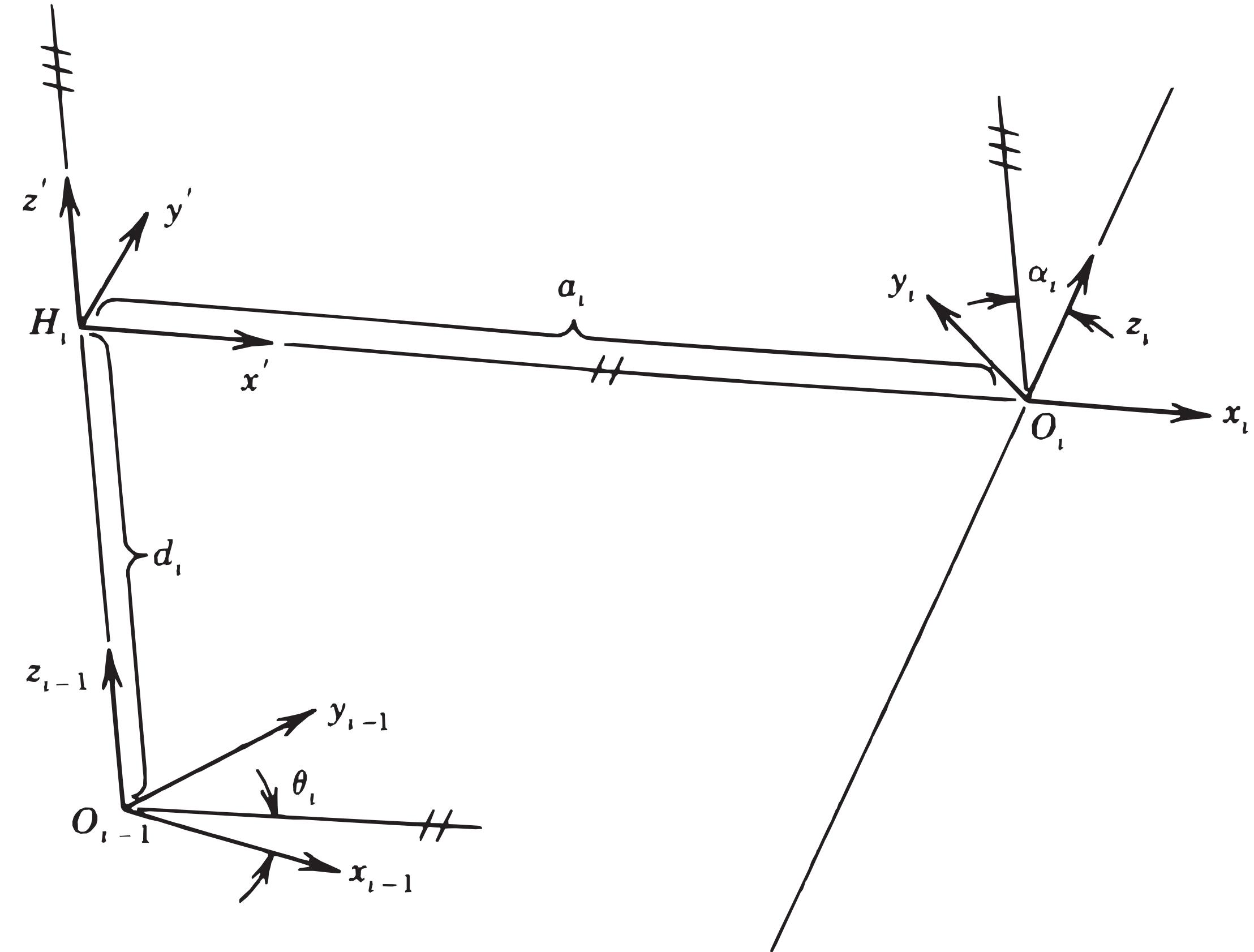
x0

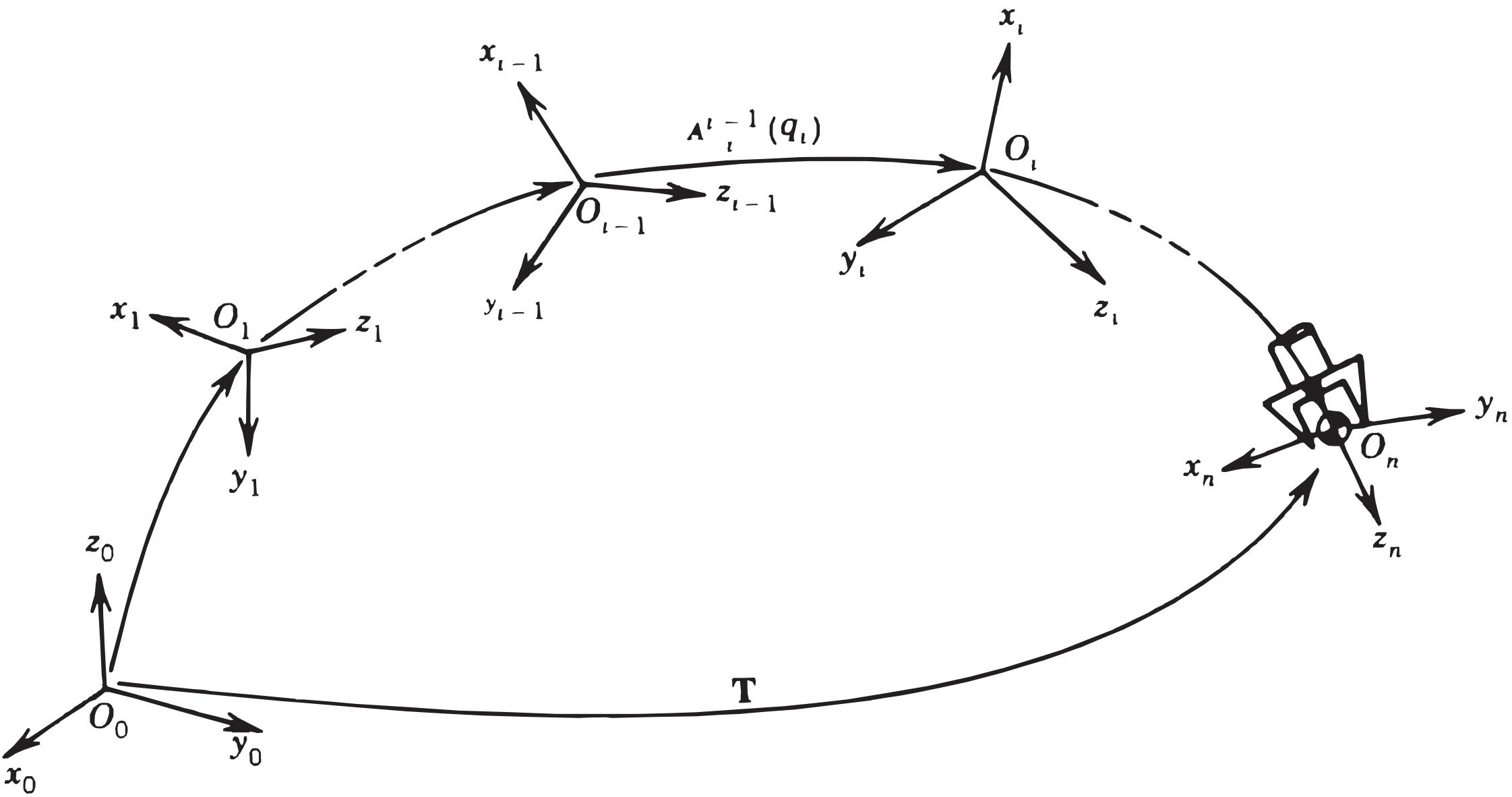
d2

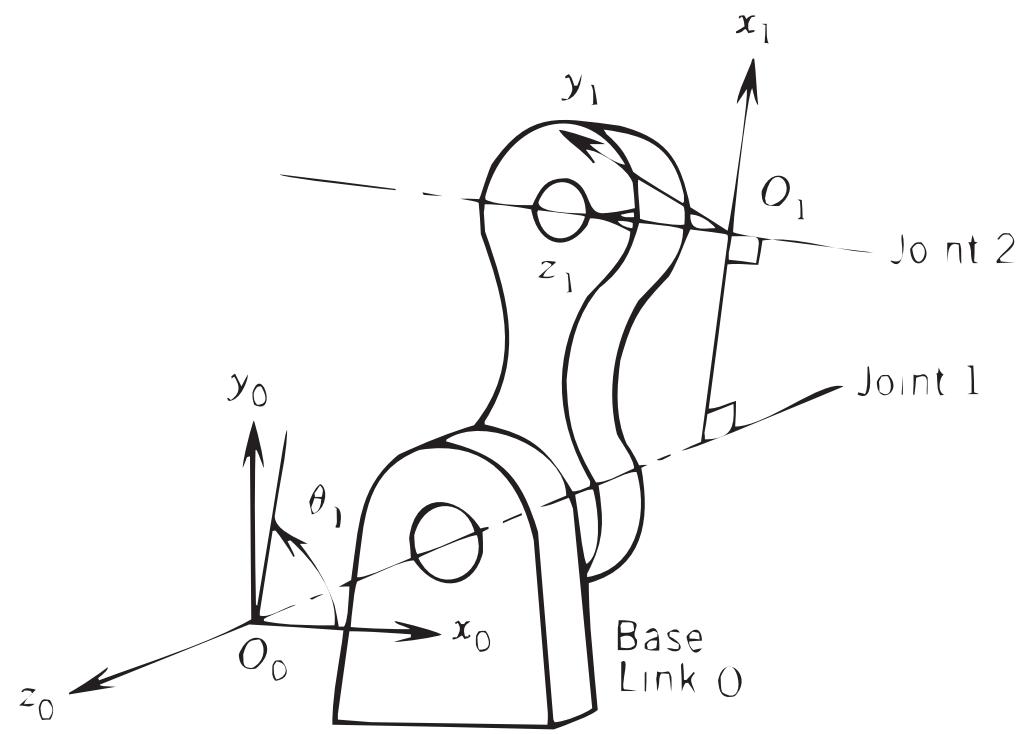
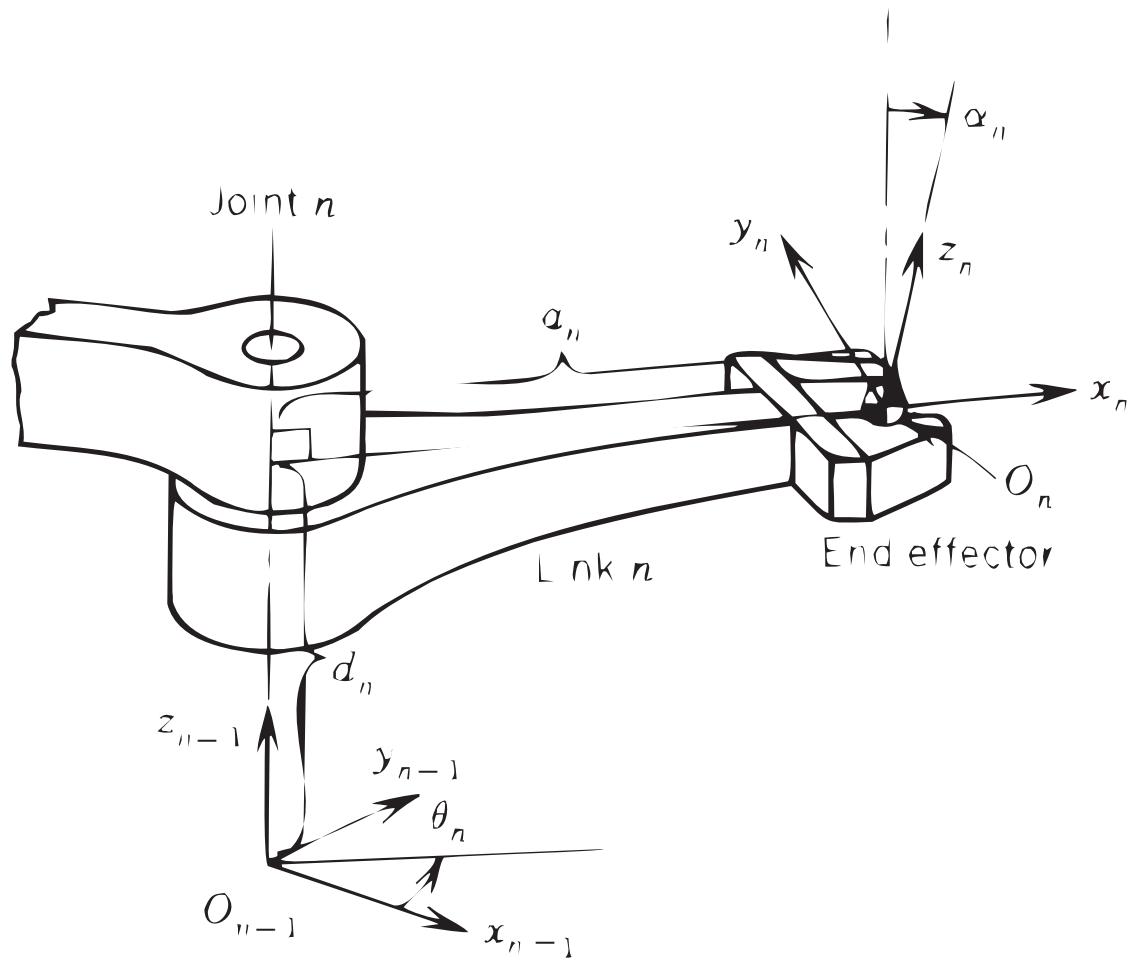
l3

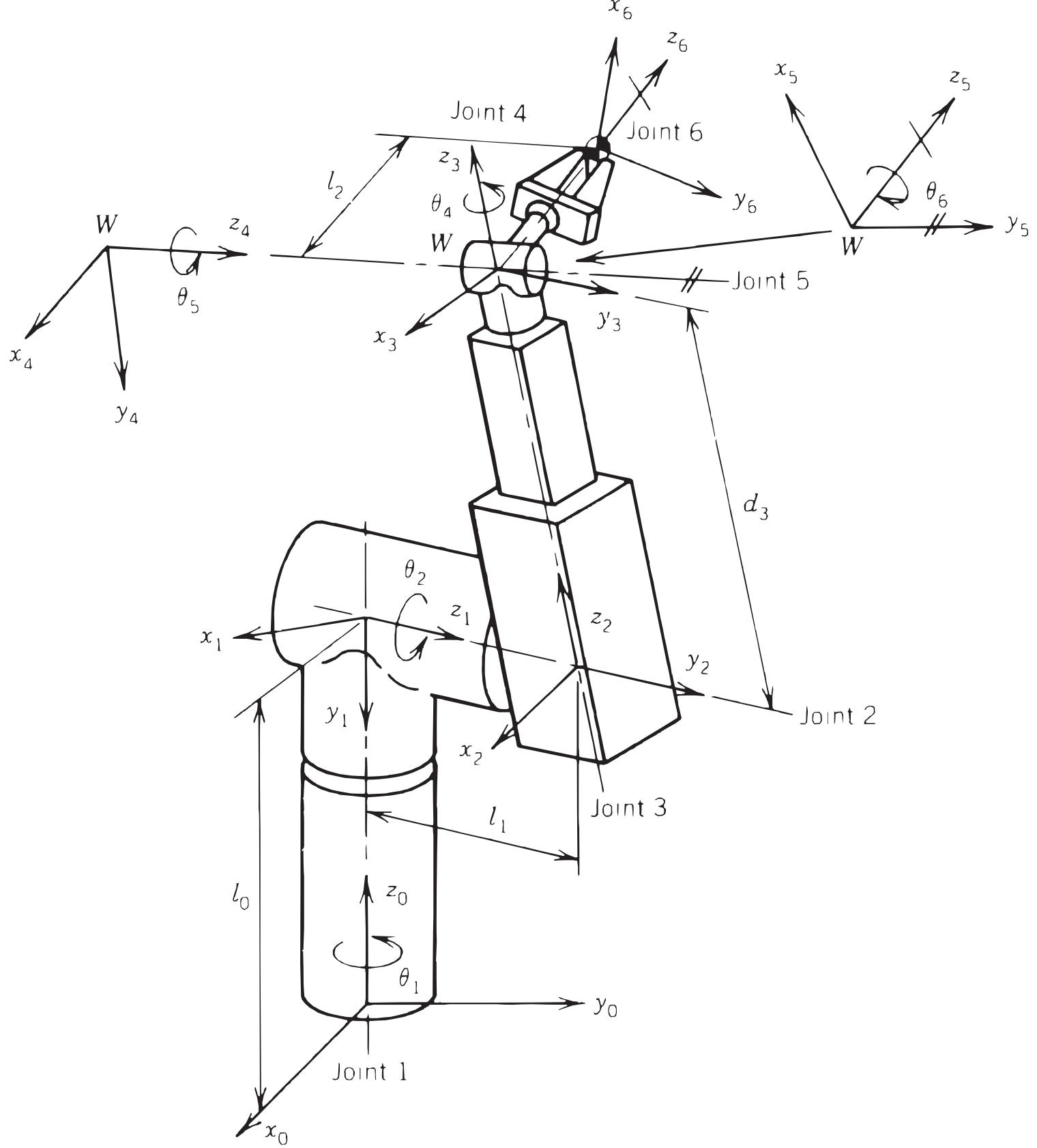


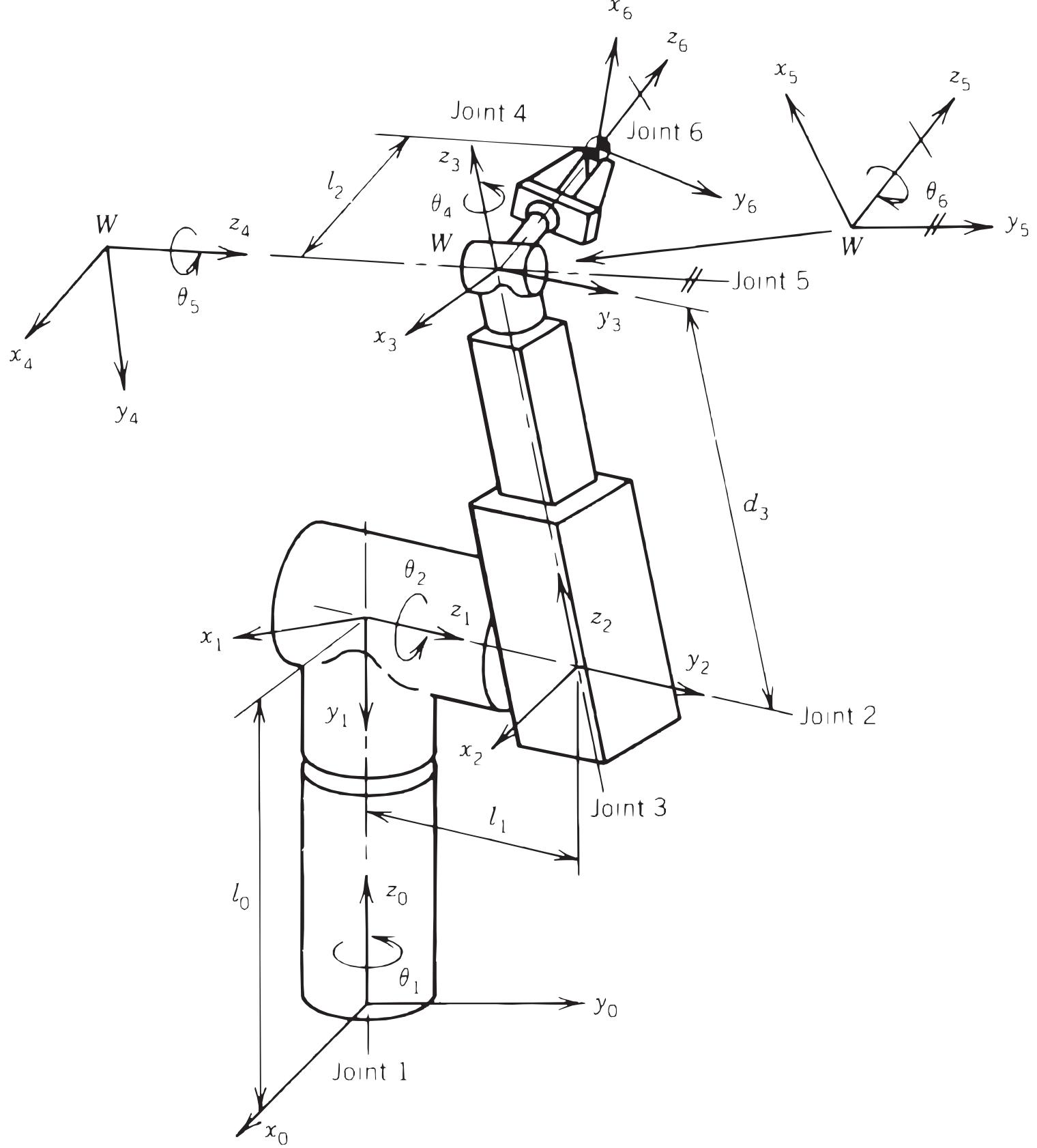


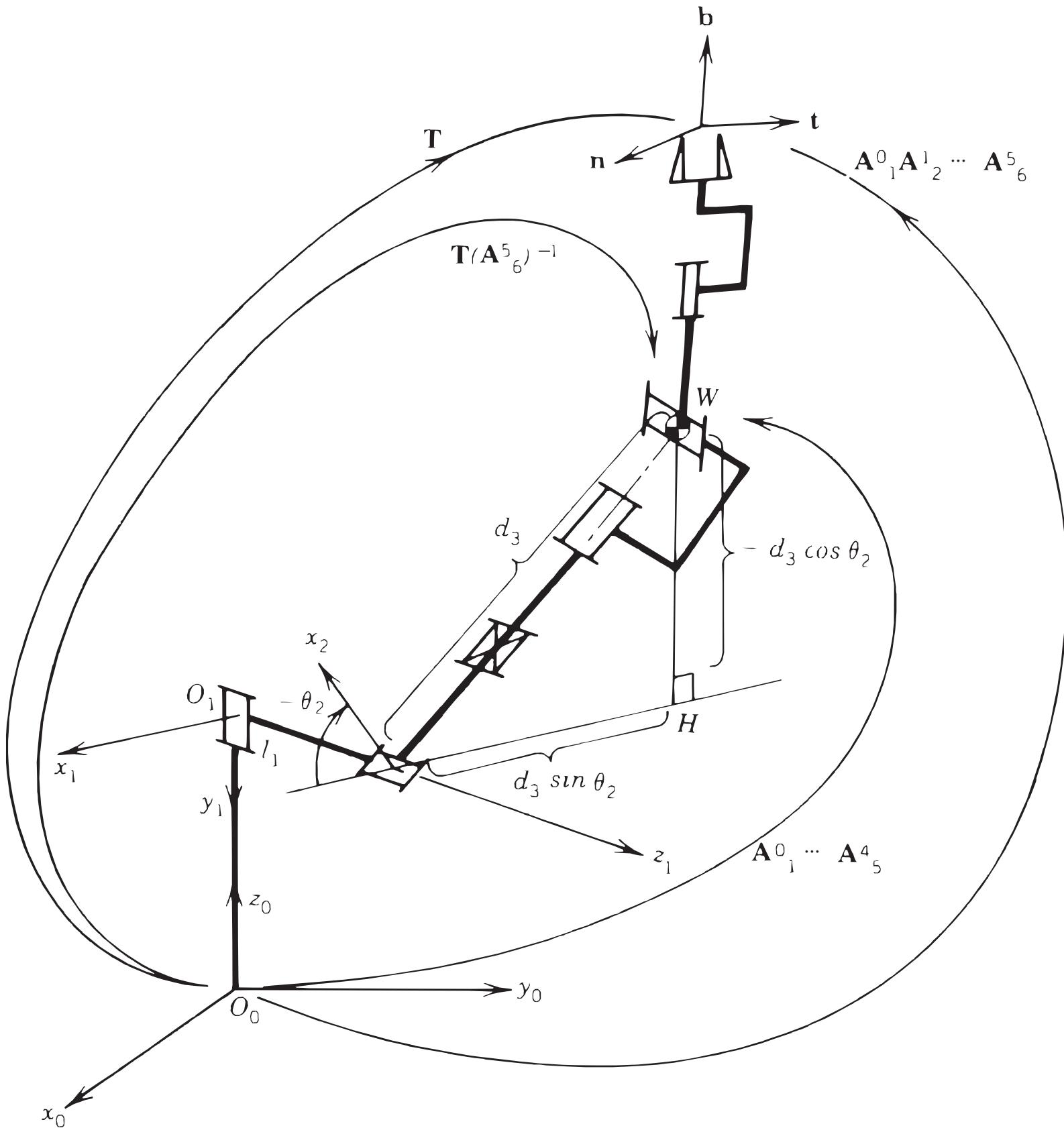






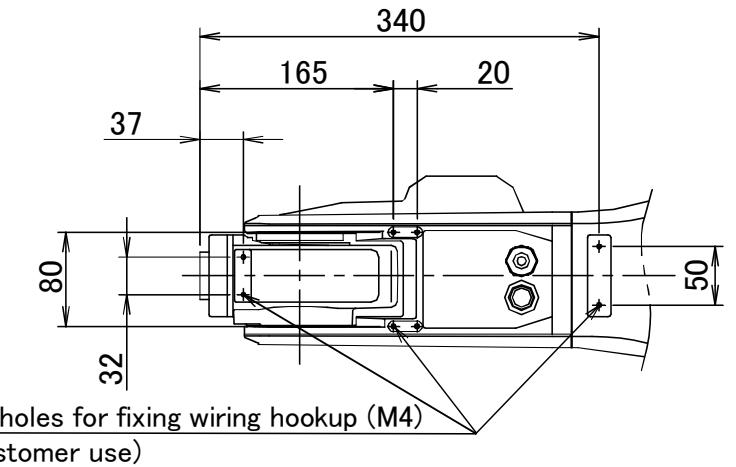








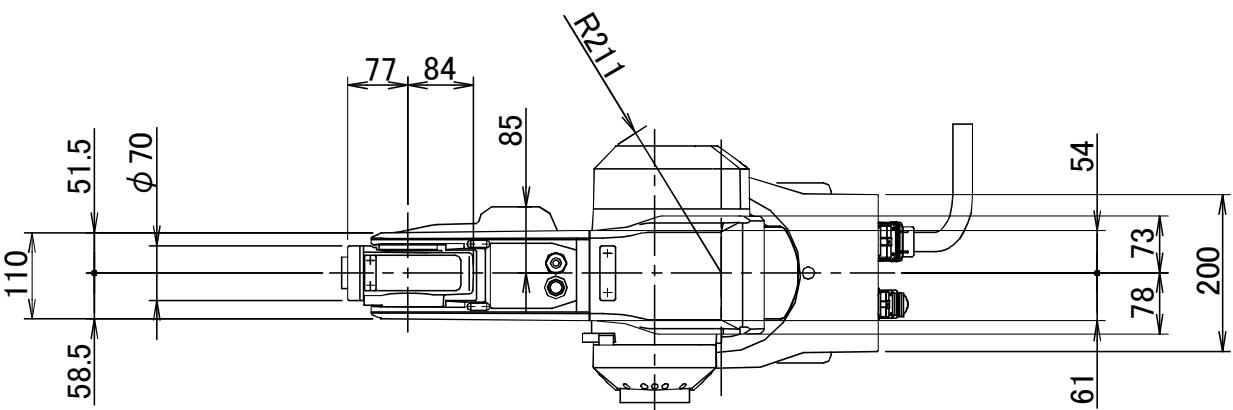
View A: Detail of mechanical interface



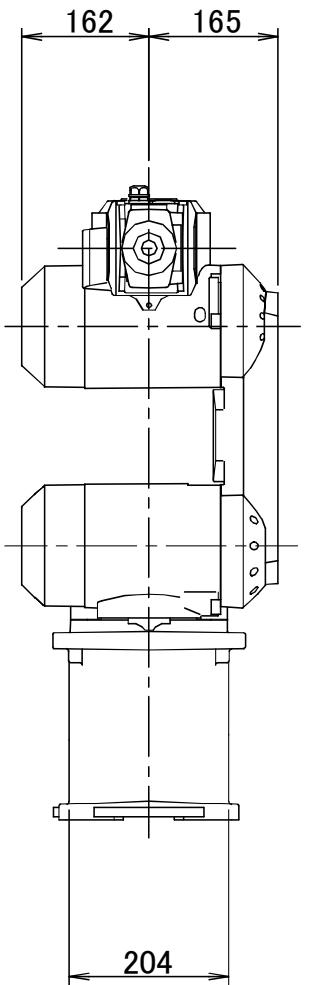
holes for fixing wiring hookup (M4)

Customer use)

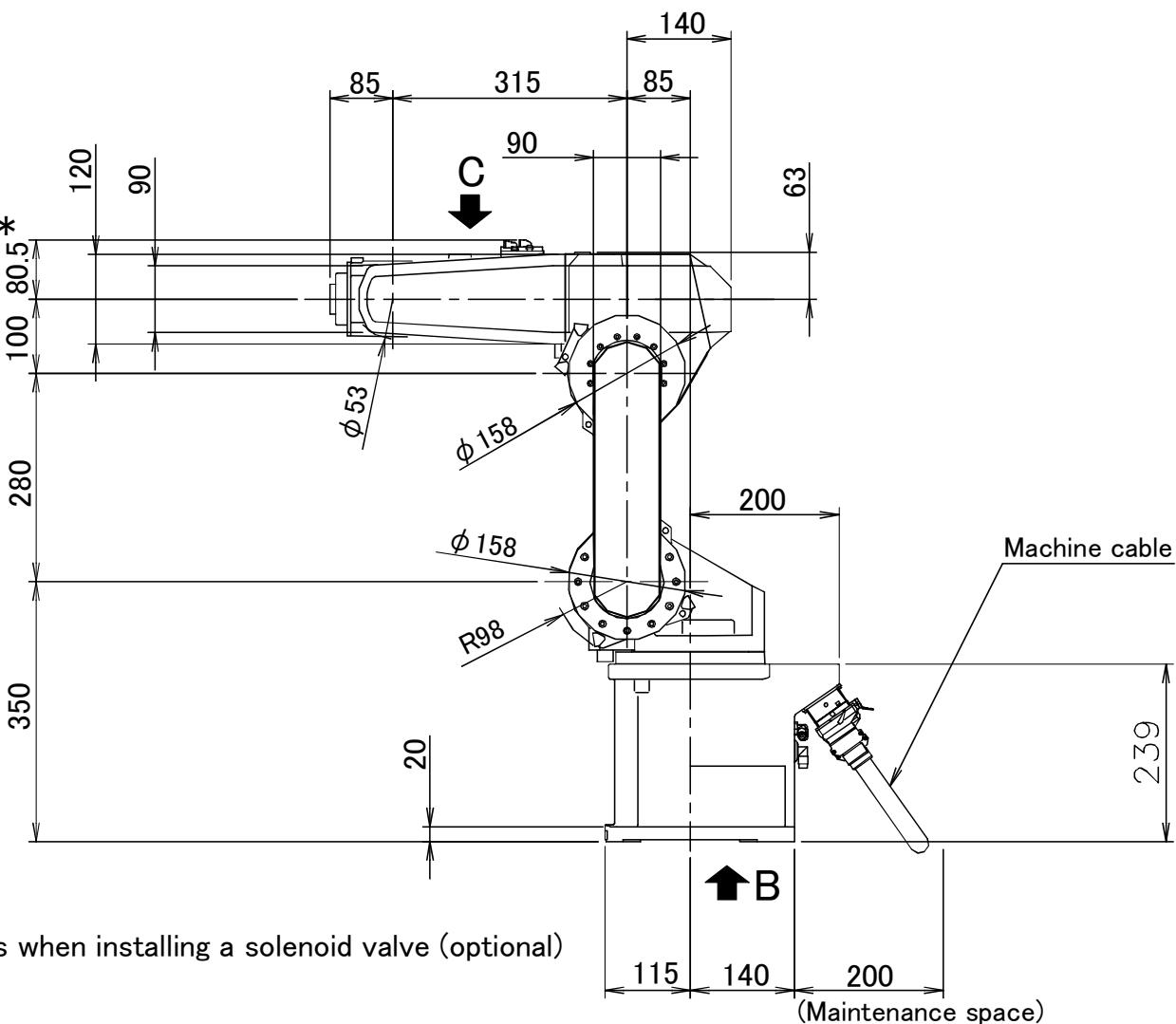
View D bottom view drawing : Detail of installation dimension



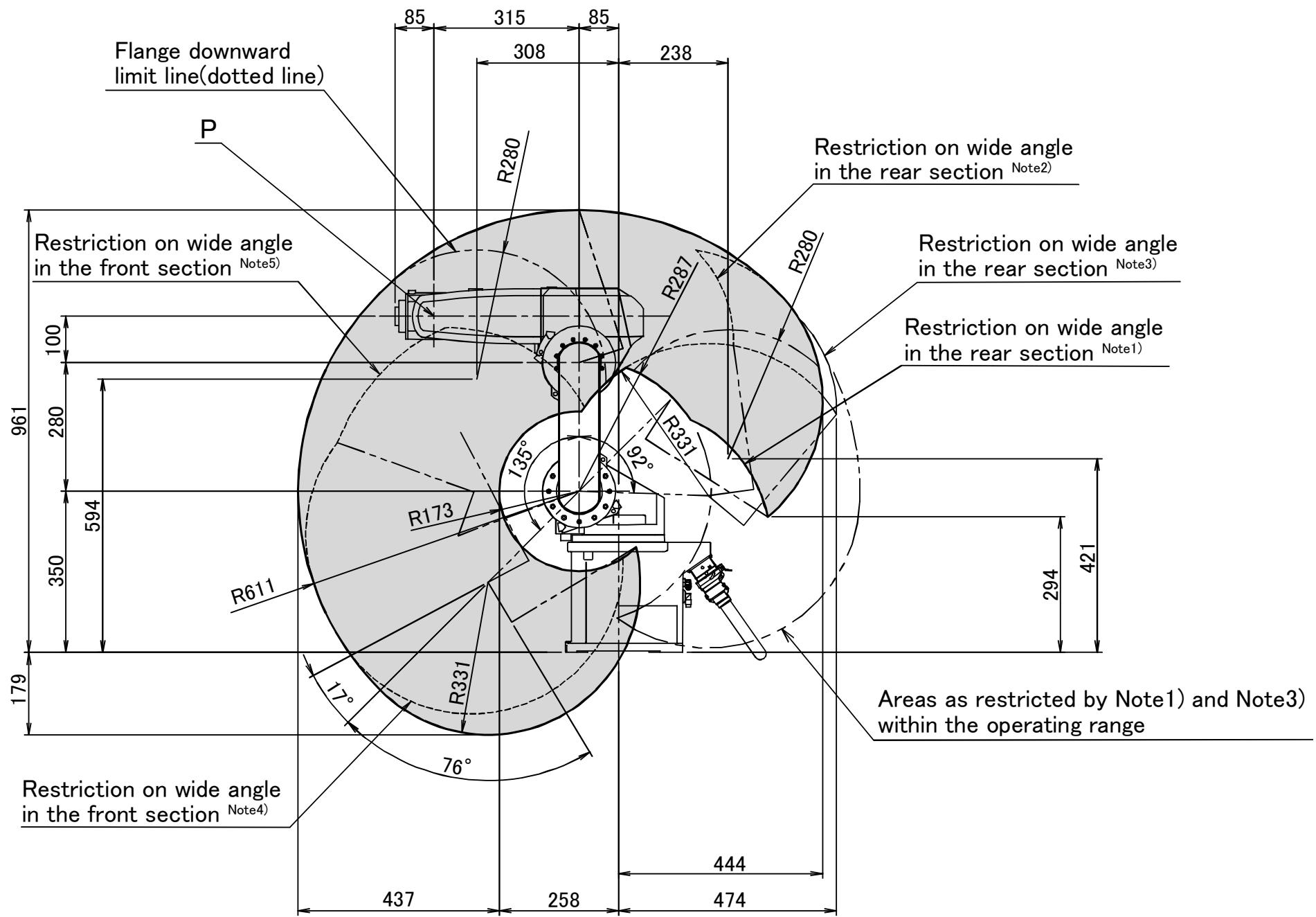
View C: Detail of screw holes for fixing wiring hookup



A



* Dimensions when installing a solenoid valve (optional)



Restriction on wide angle in the rear section

Note1) $J_2 + J_3 \times 2 \geq -200$ degree when $-45 \text{ degree} \leq J_2 < 15 \text{ degree}$.

Note2) $J_2 + J_3 \geq 8$ degree when $|J_1| \leq 75 \text{ degree}$, $J_2 < -45 \text{ degree}$.

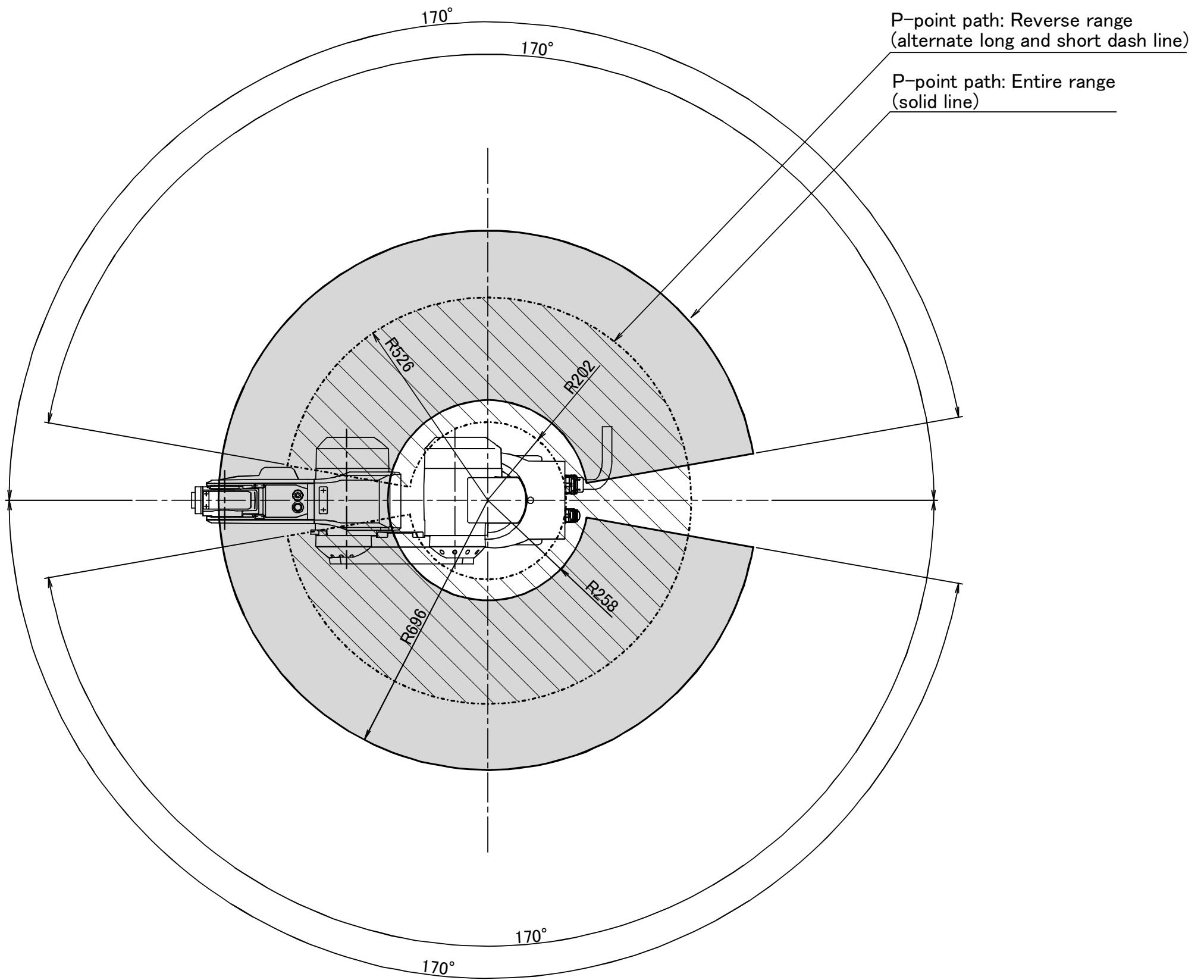
Note3) $J_2 + J_3 \geq -40$ degree when $|J_1| > 75 \text{ degree}$, $J_2 < -45 \text{ degree}$.

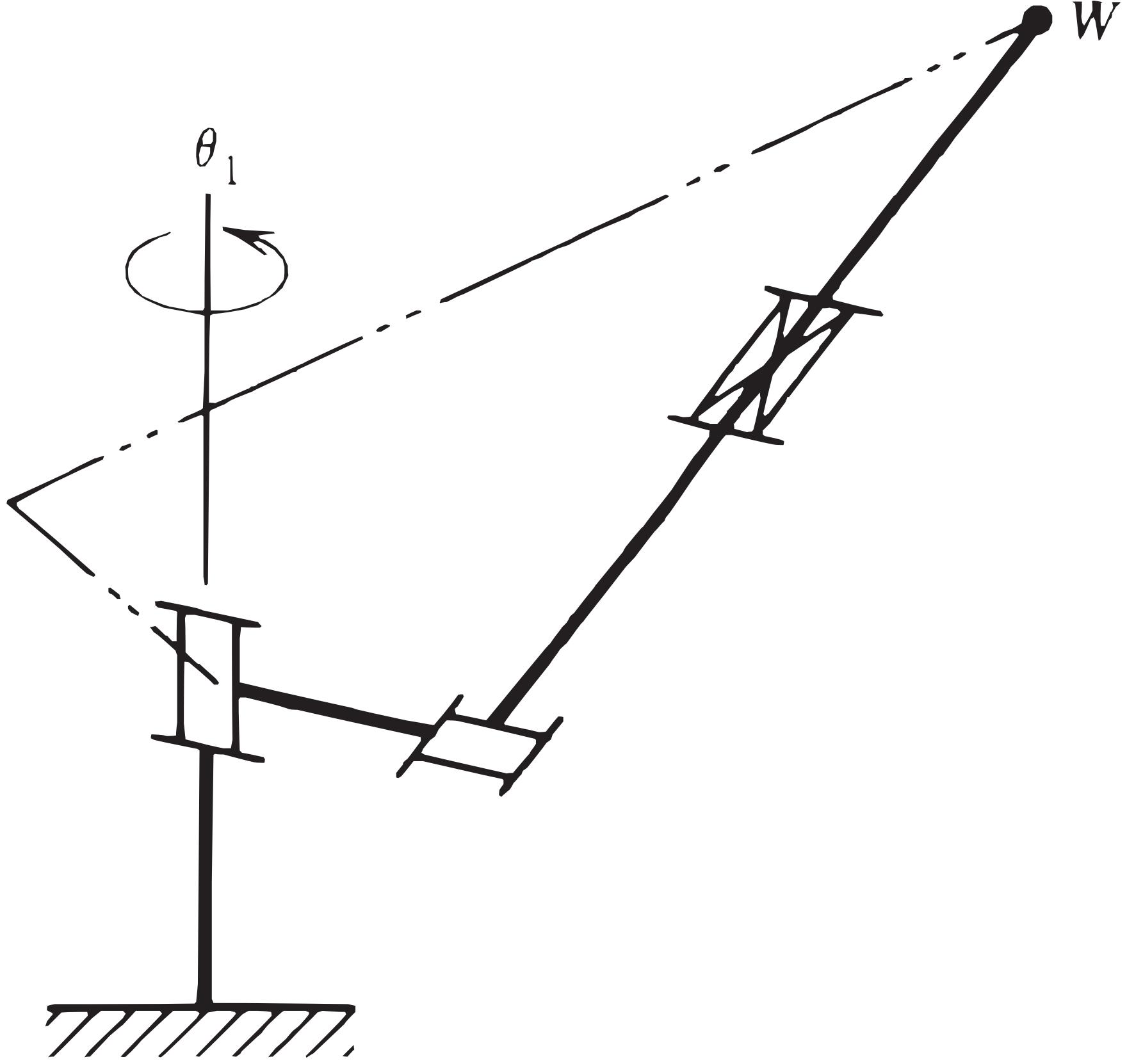
Restriction on wide angle in the front section

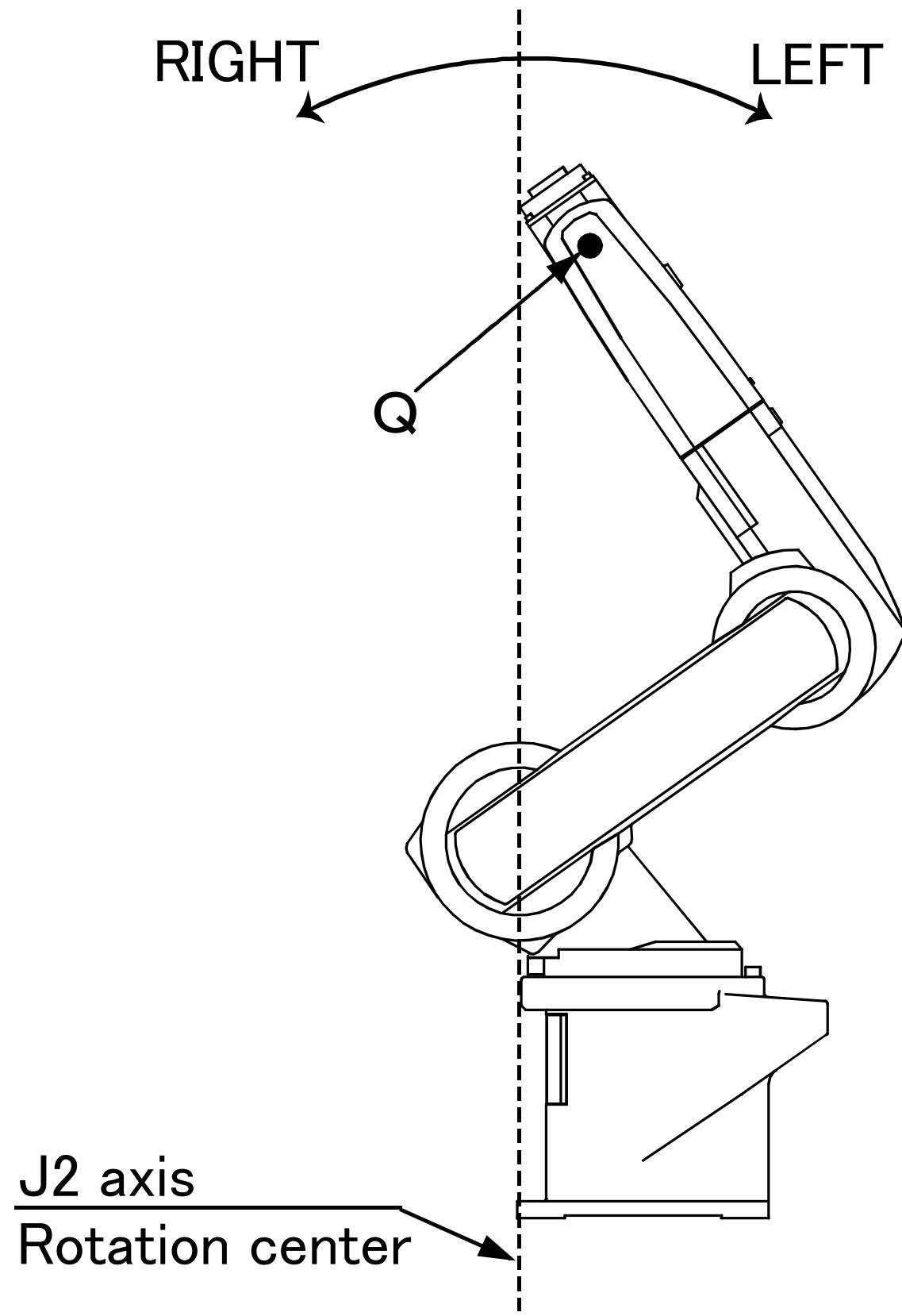
Note4) $J_3 \geq -40$ degree when $-105 \text{ degree} \leq J_1 \leq 95 \text{ degree}$, $J_2 \geq 123 \text{ degree}$.

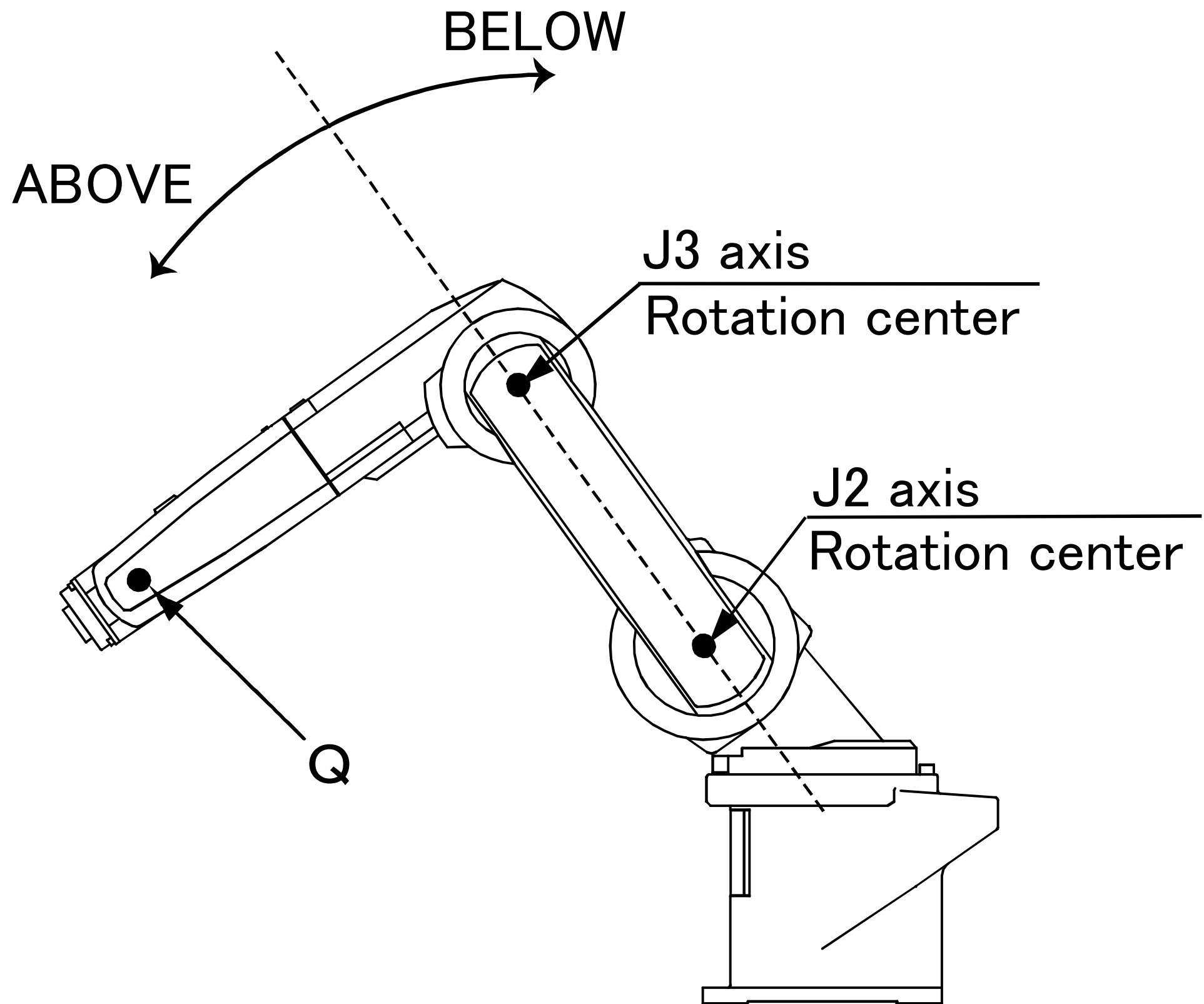
Note5) $J_2 \geq 110$ degree when $J_1 < -105 \text{ degree}$, $J_1 < -95 \text{ degree}$.

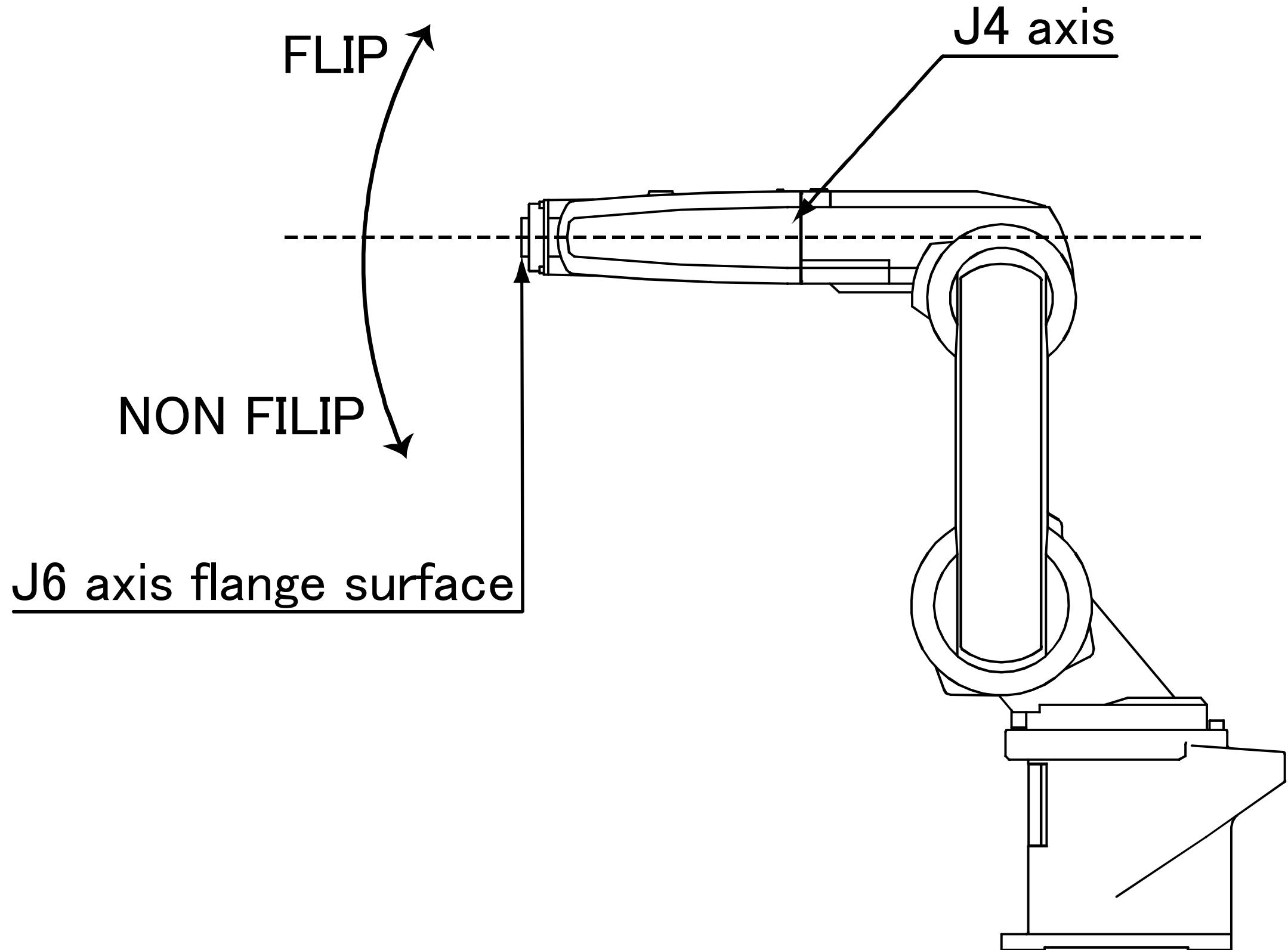
However, $J_2 - J_3 \leq 150$ degree when $85 \text{ degree} \leq J_2 \leq 110 \text{ degree}$.





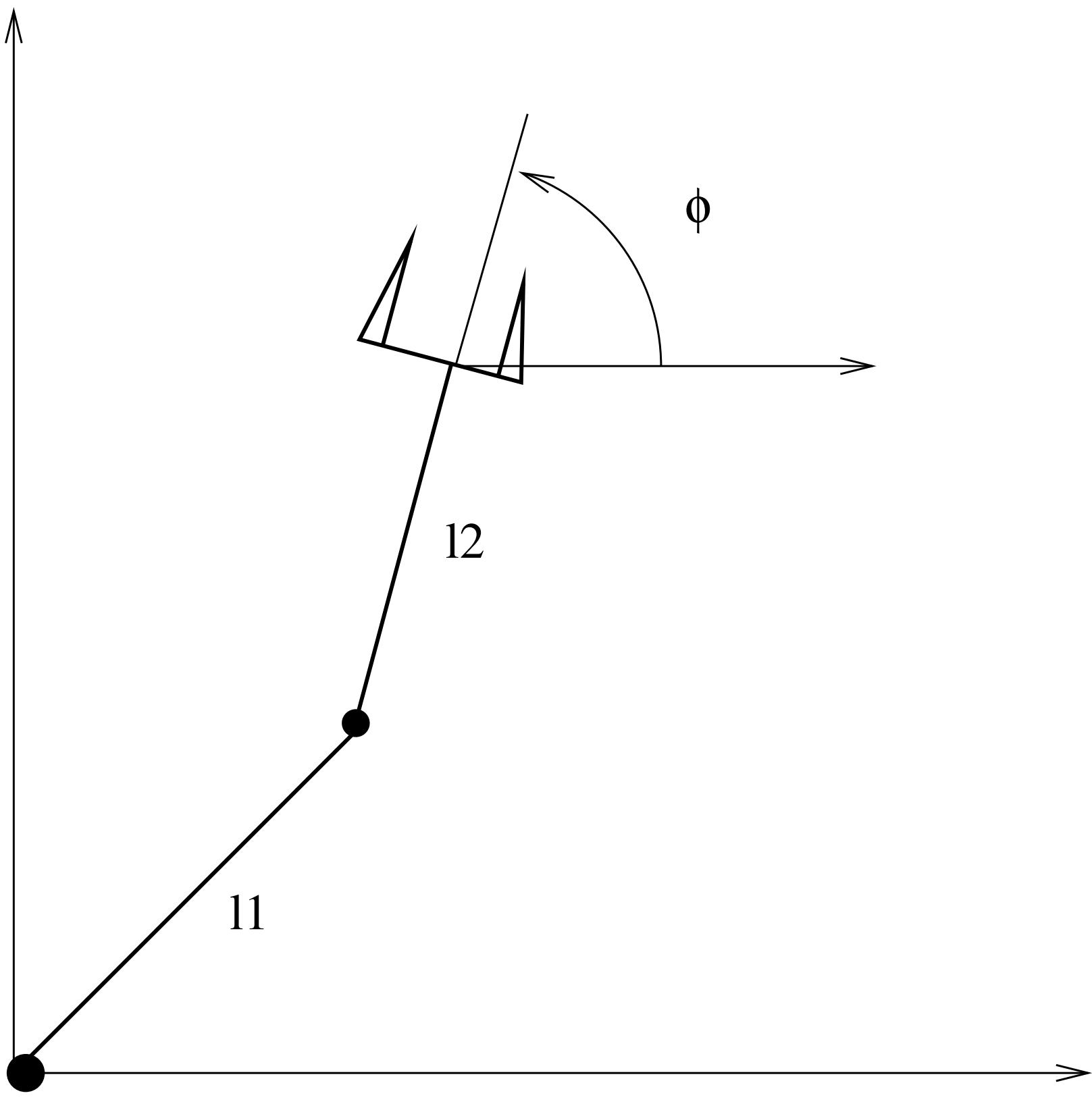


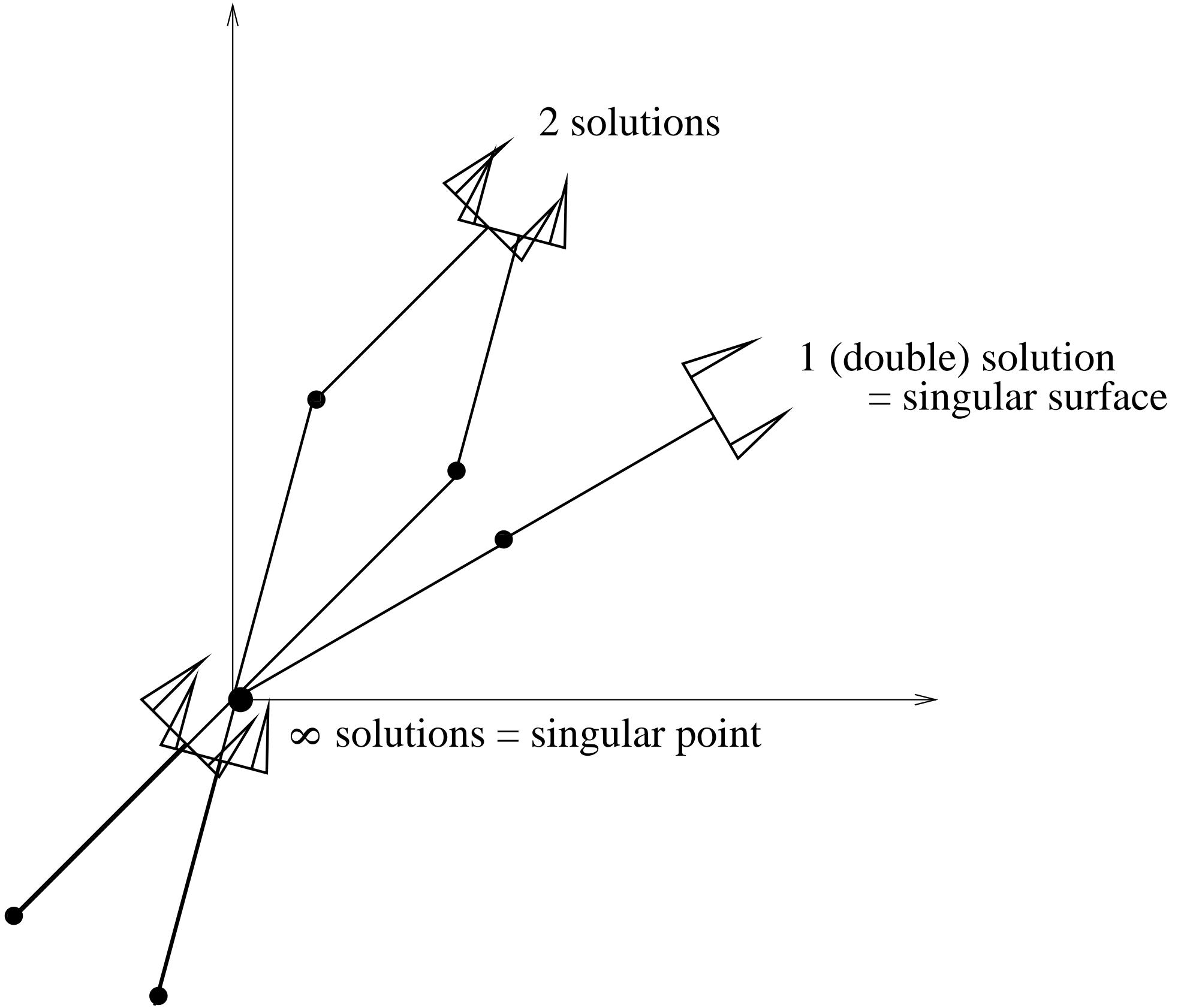




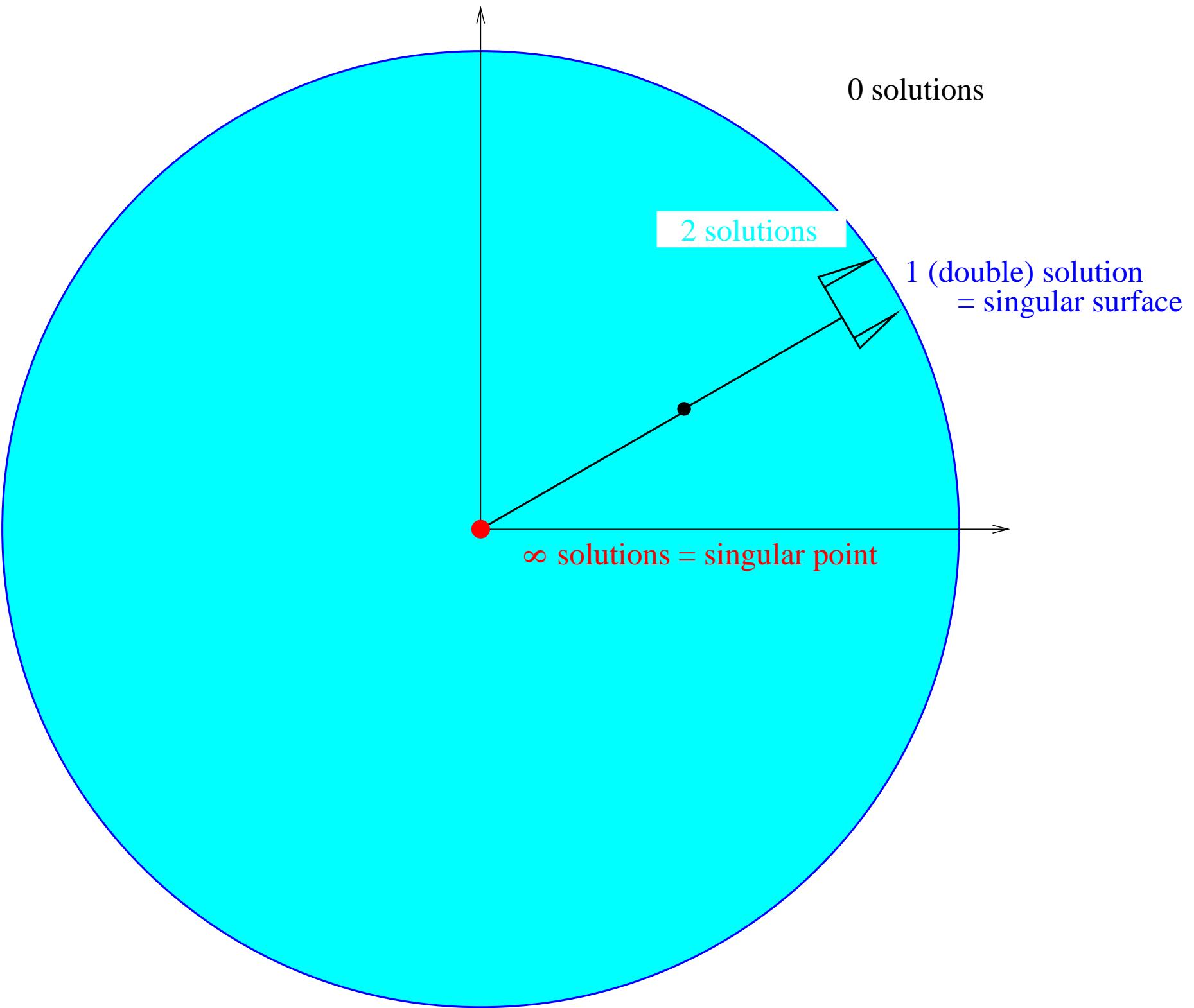
y

x

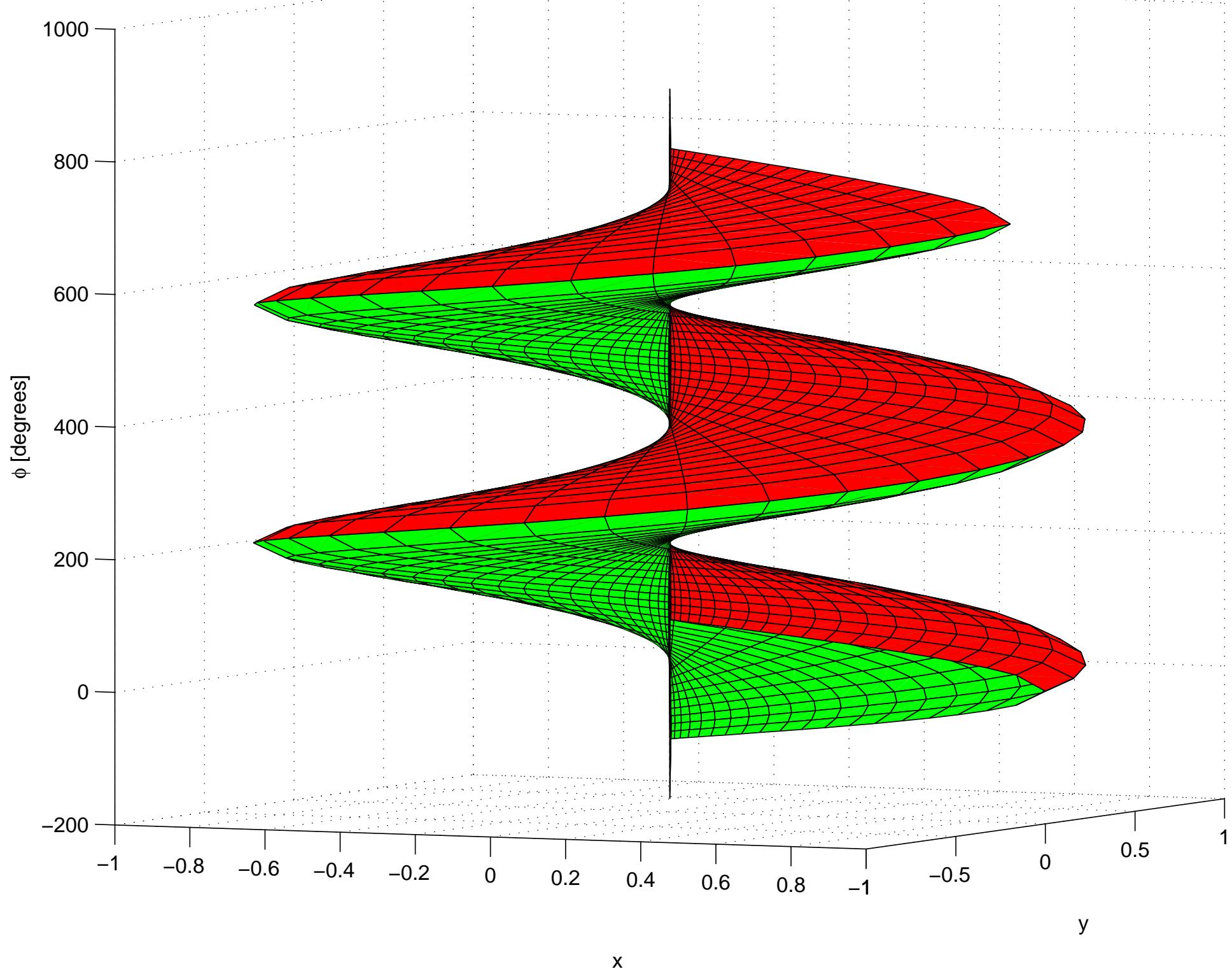




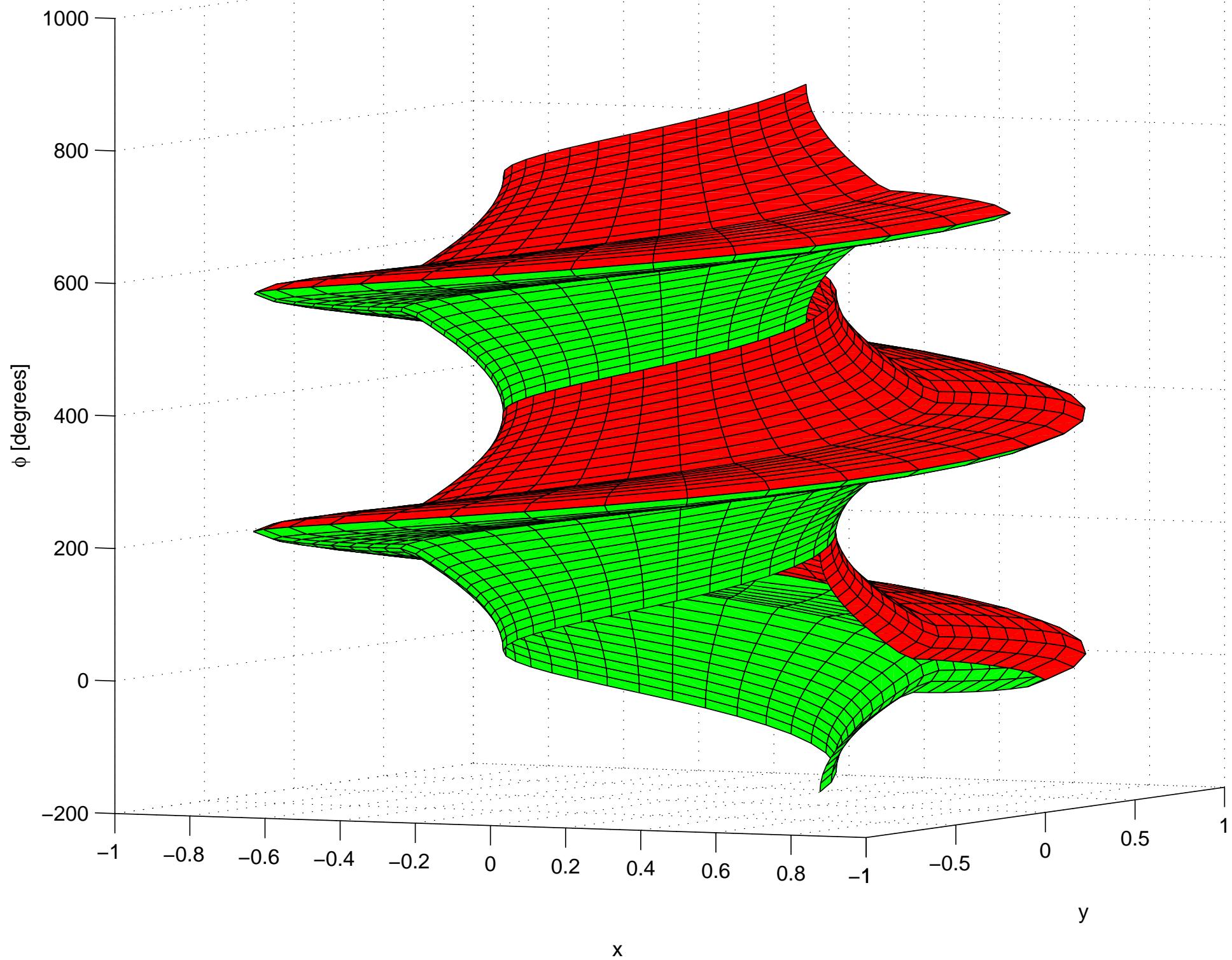
Working envelope



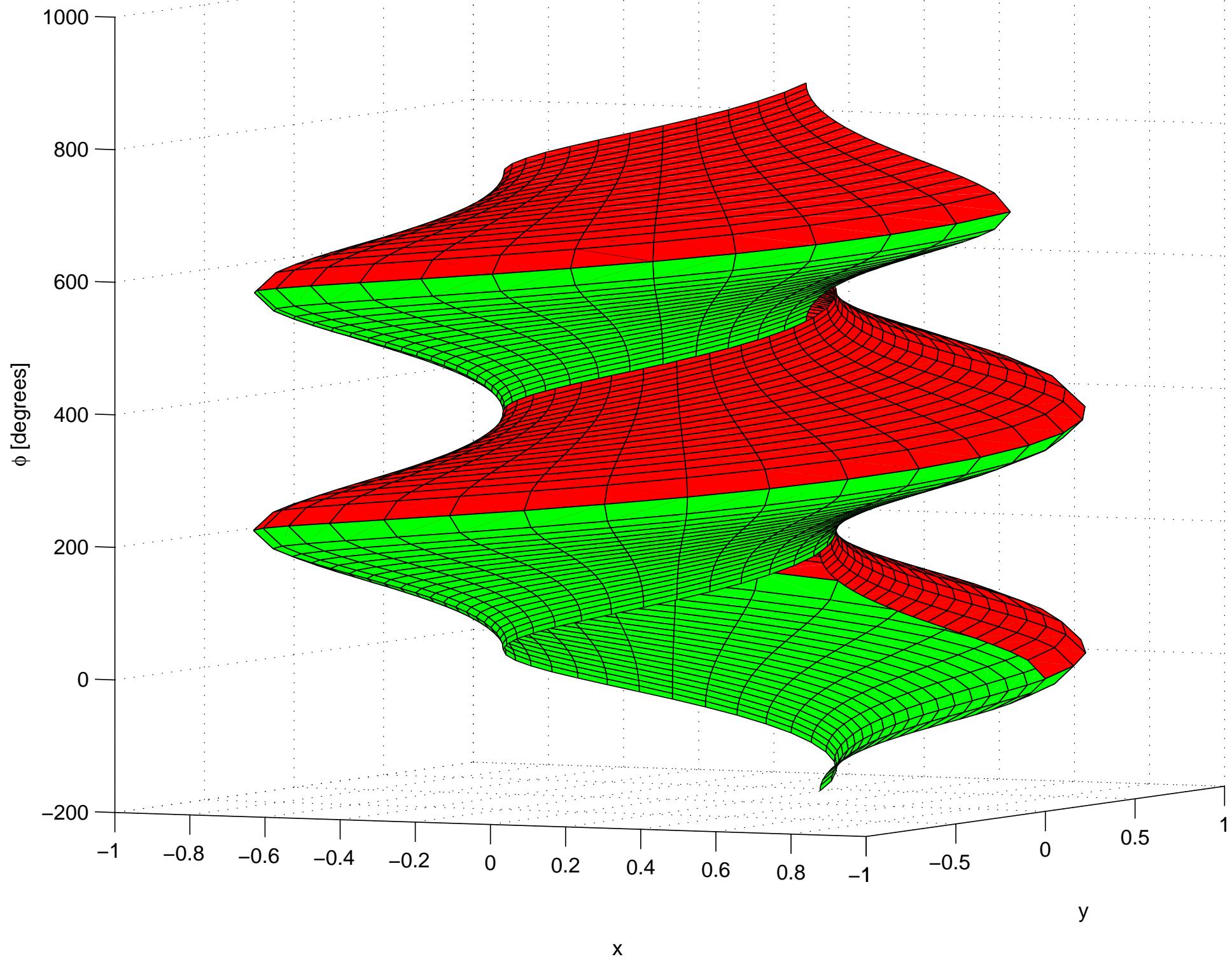
Working space of the 2DOF planar RR manipulator l1=0.5,l2=0.5

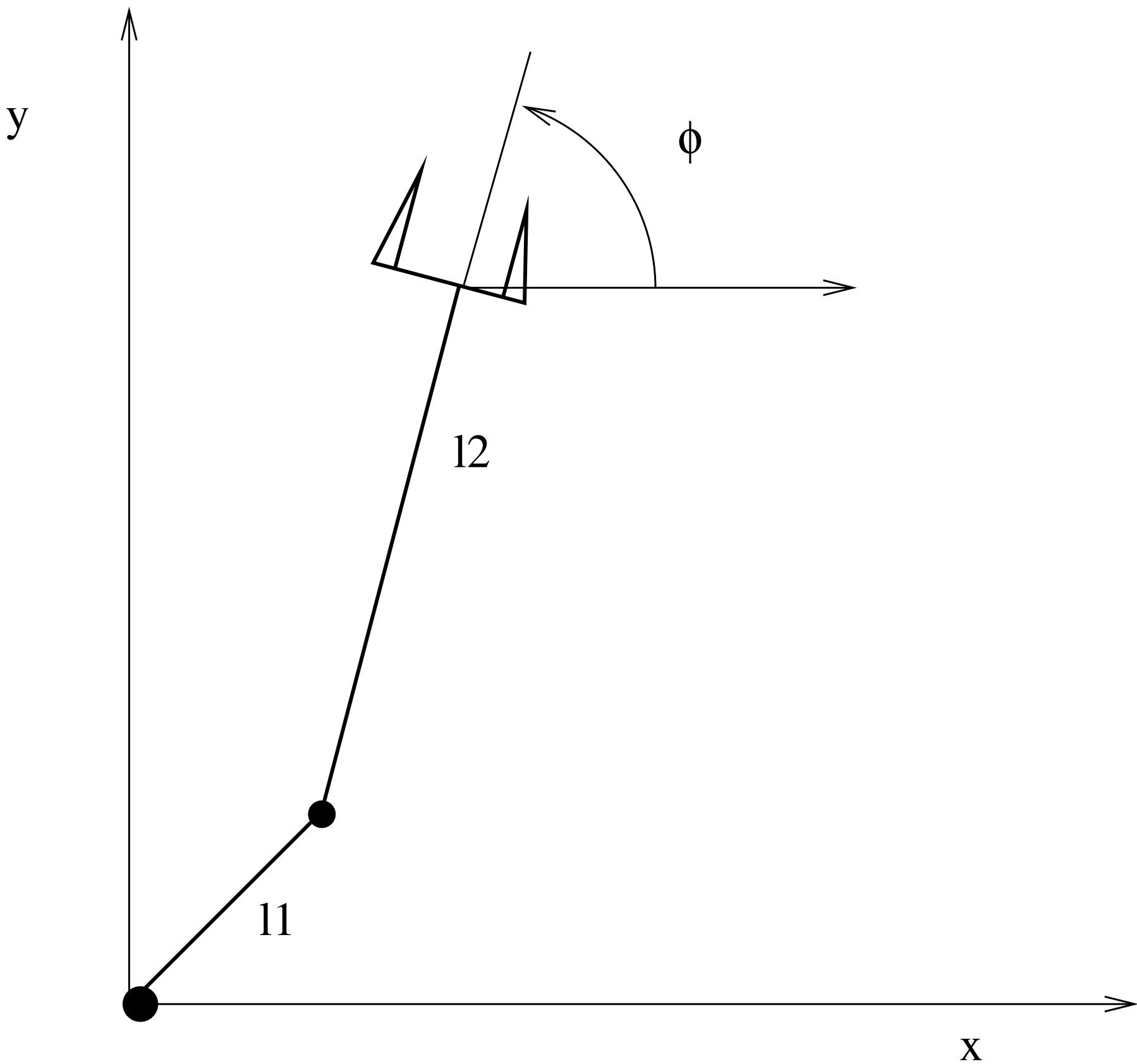


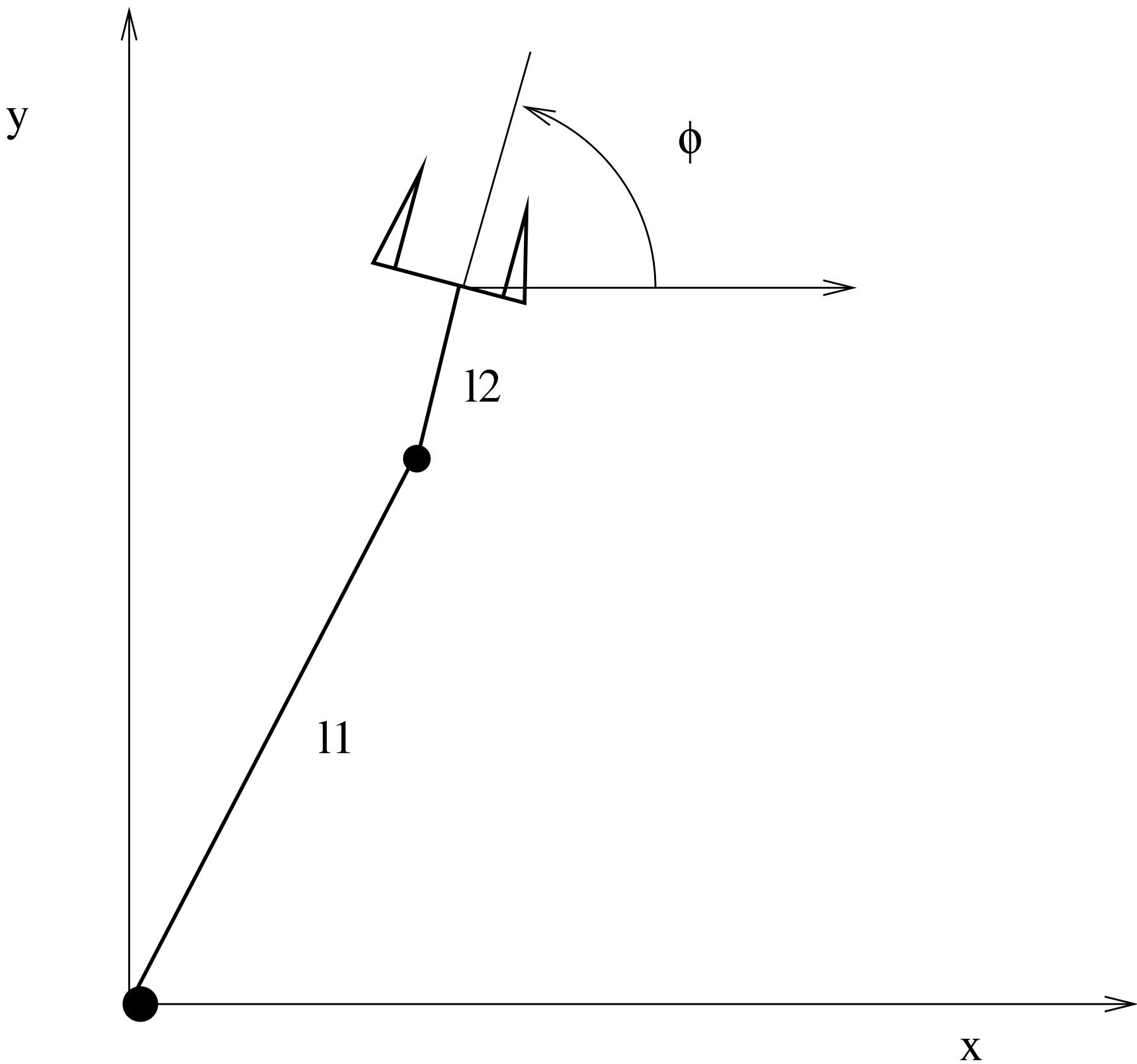
Working space of the 2DOF planar RR manipulator l1=0.3,l2=0.7



Working space of the 2DOF planar RR manipulator l1=0.7,l2=0.3







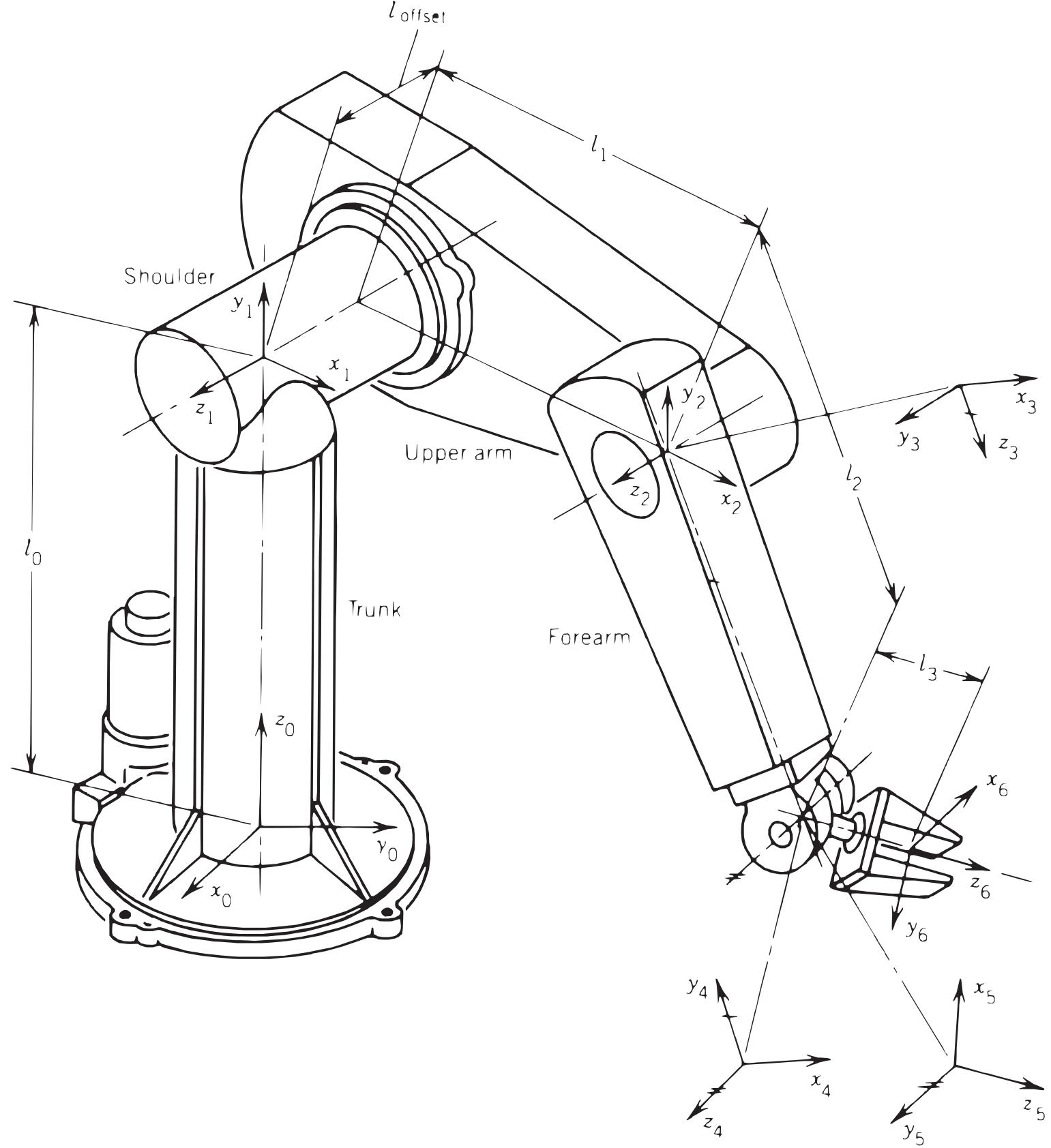
X

y

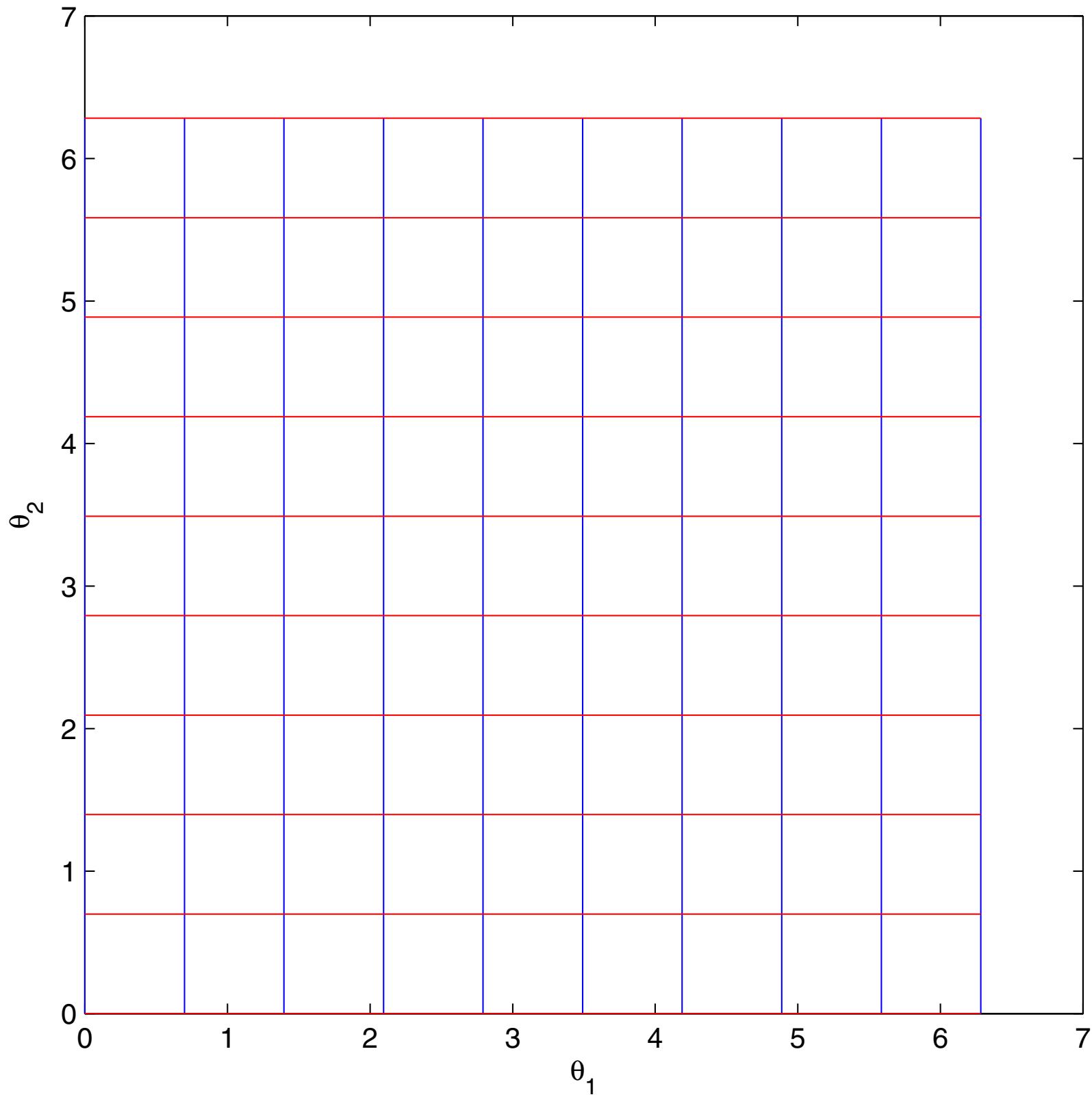
l_2

l_1

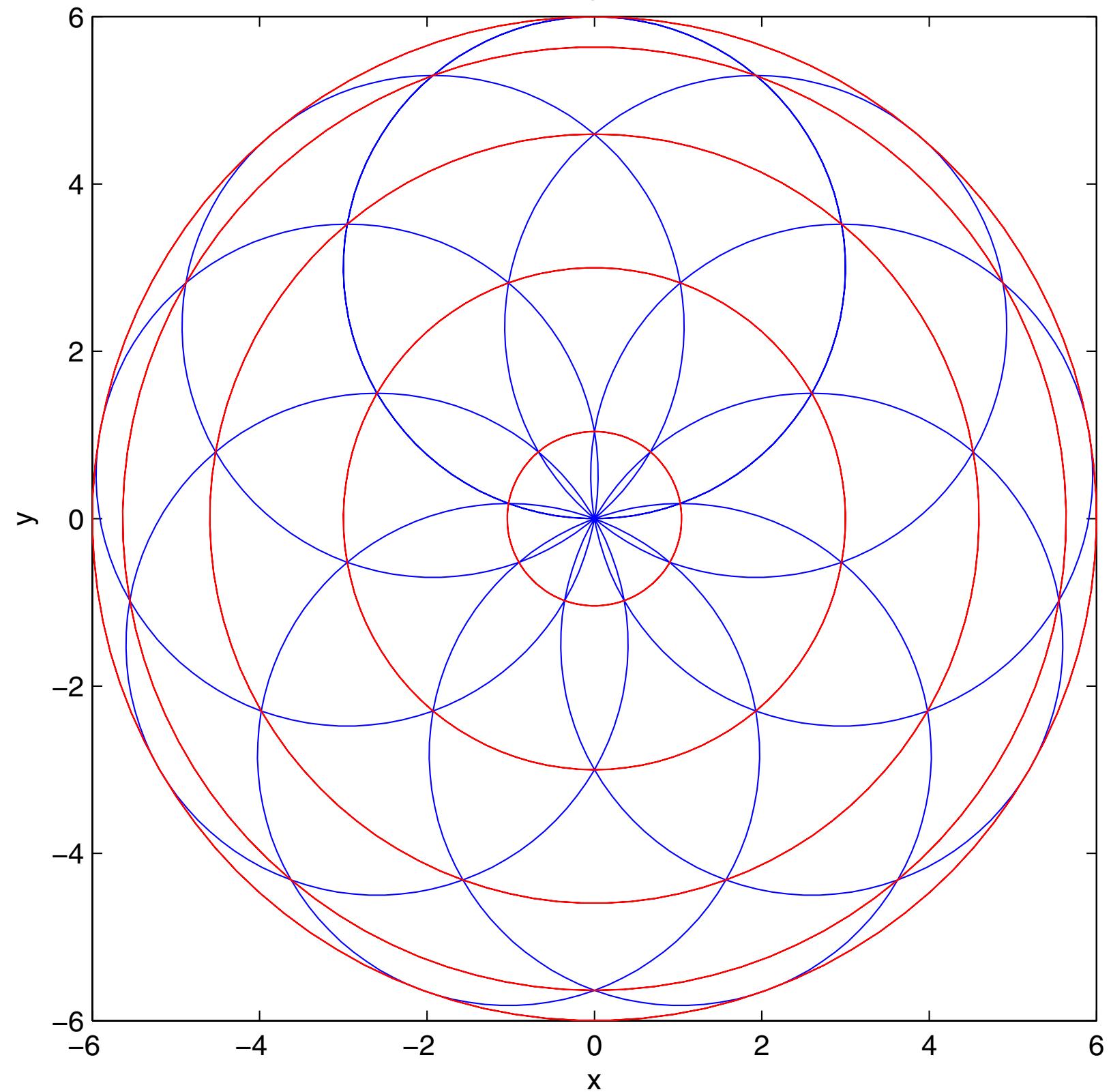
ϕ



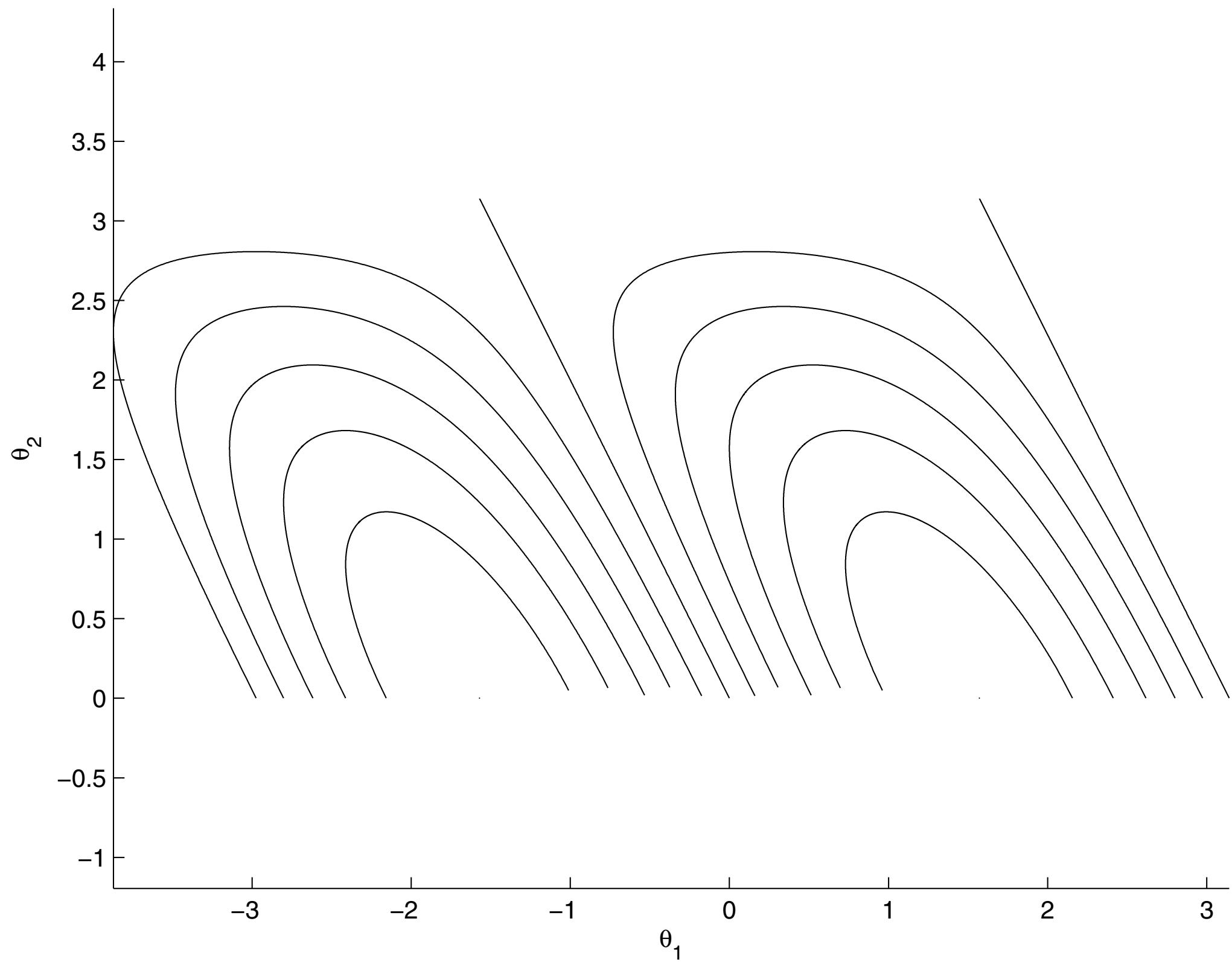
joint space



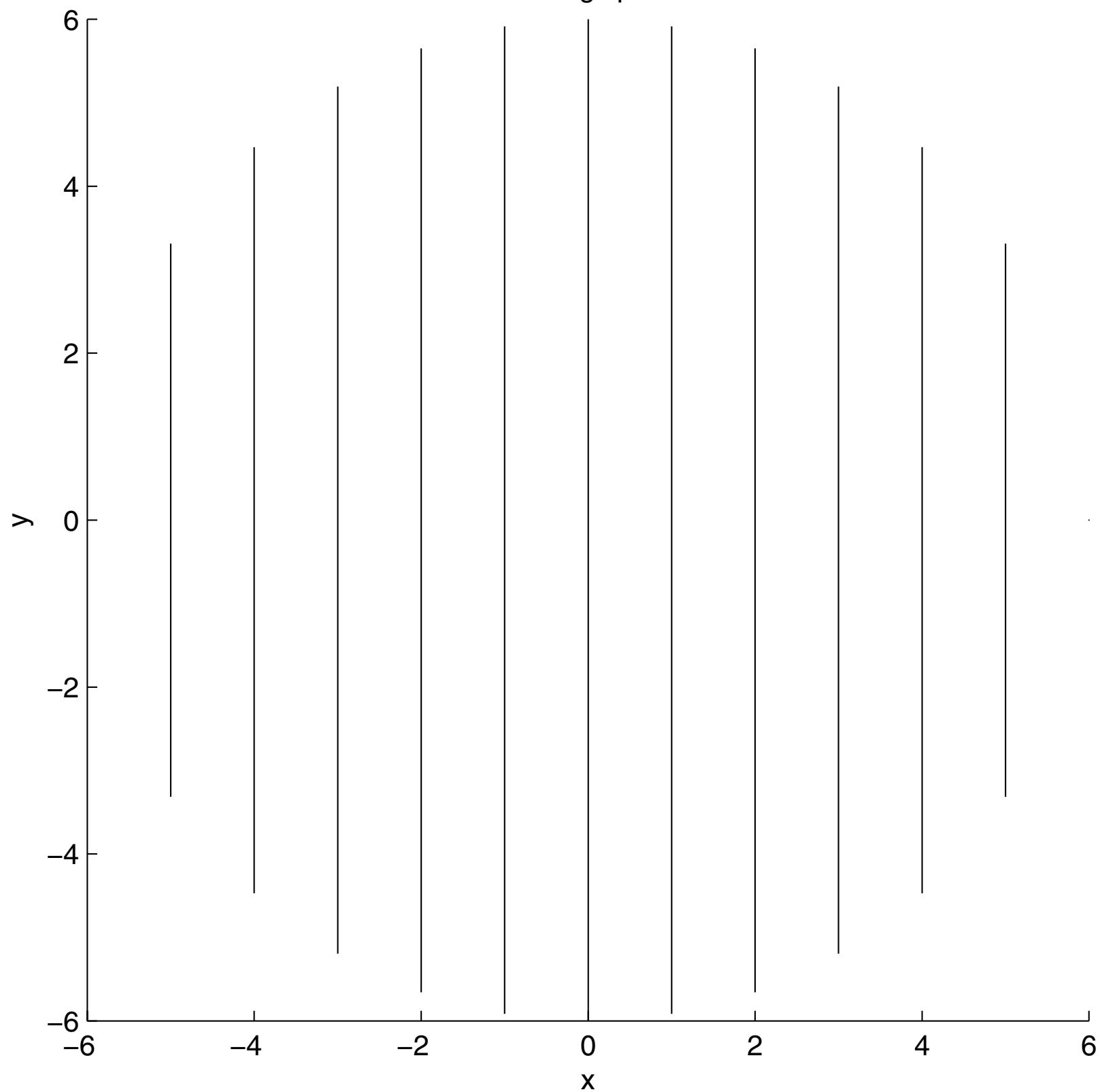
working space



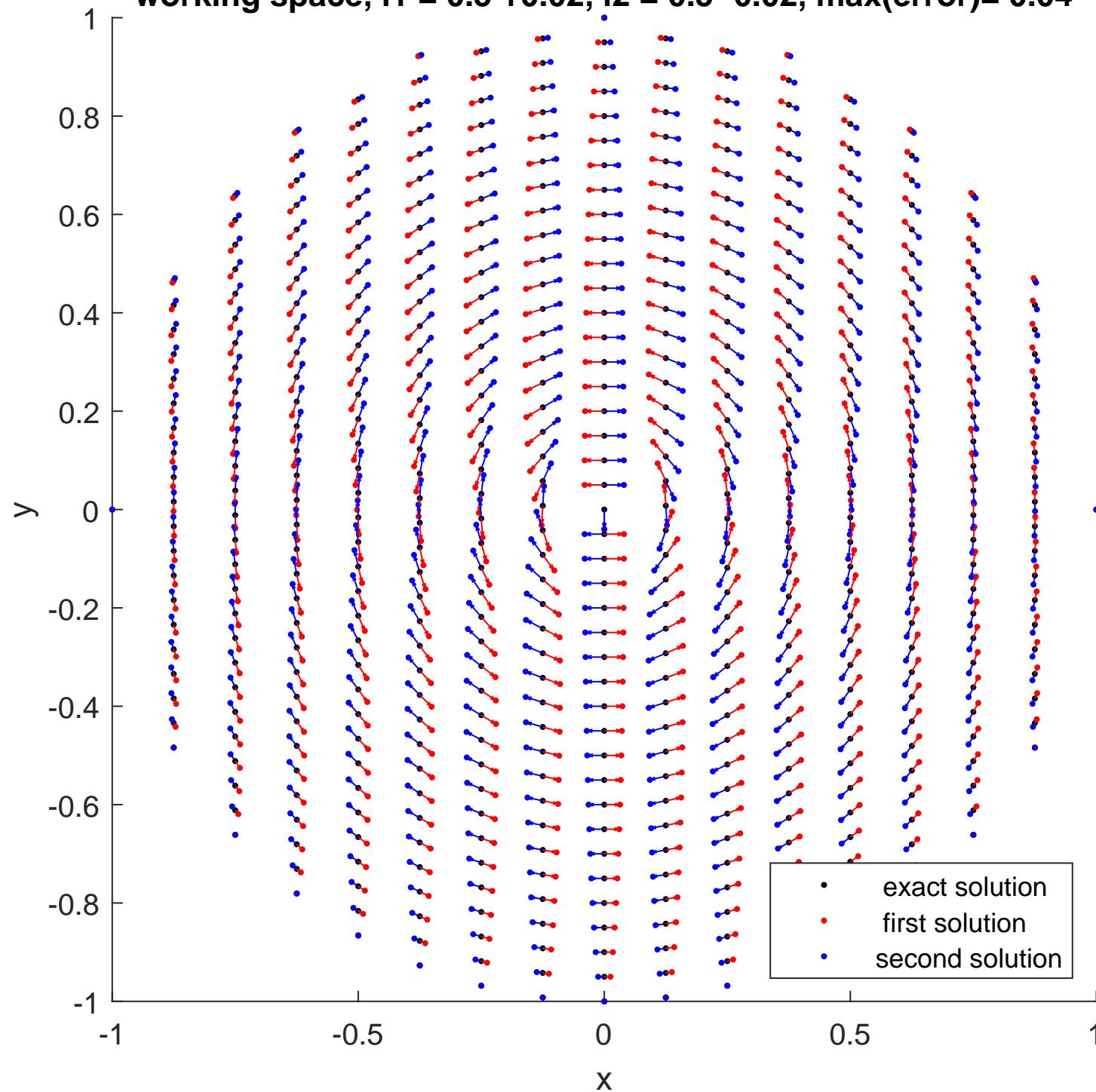
joint space



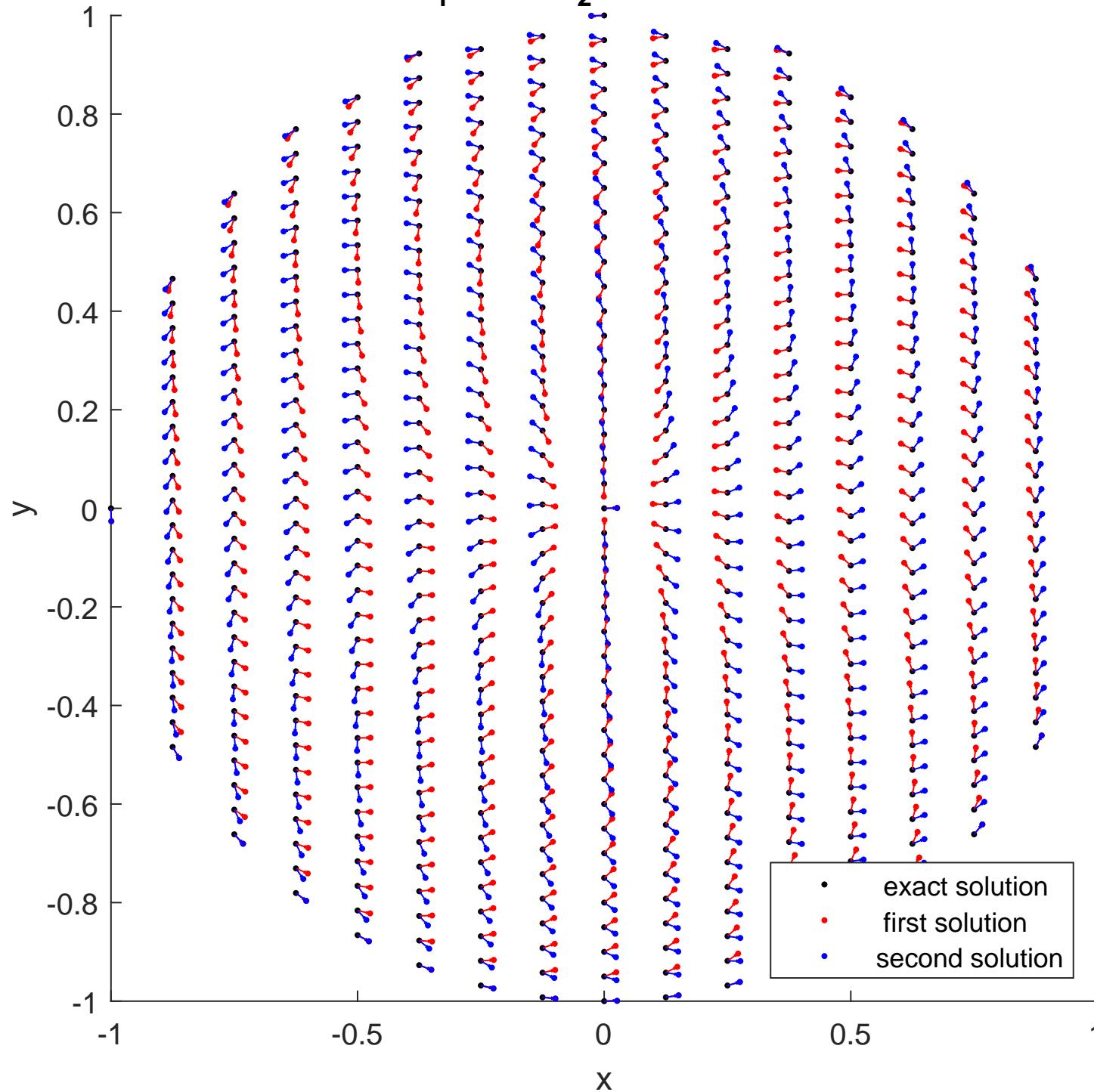
working space

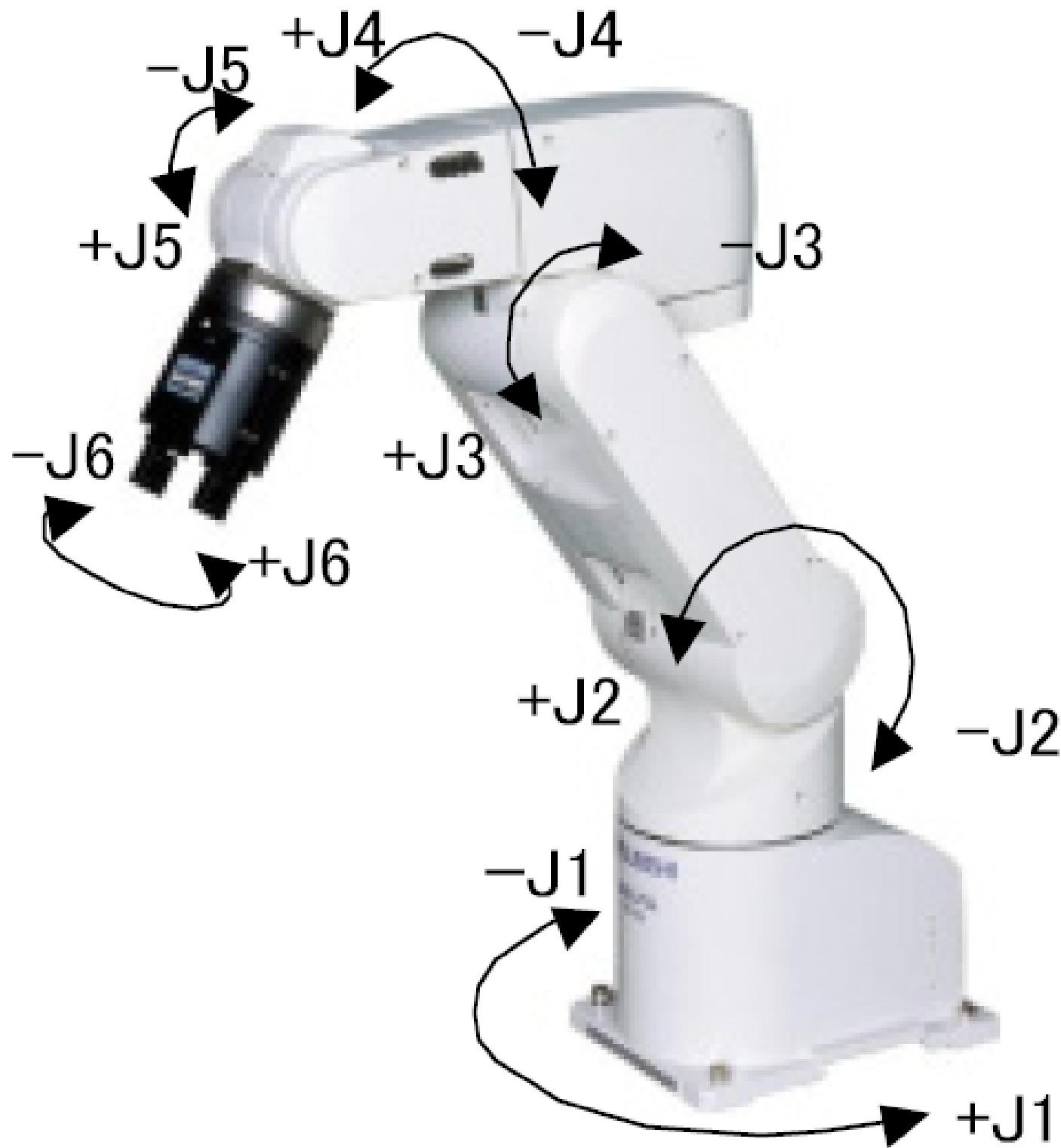


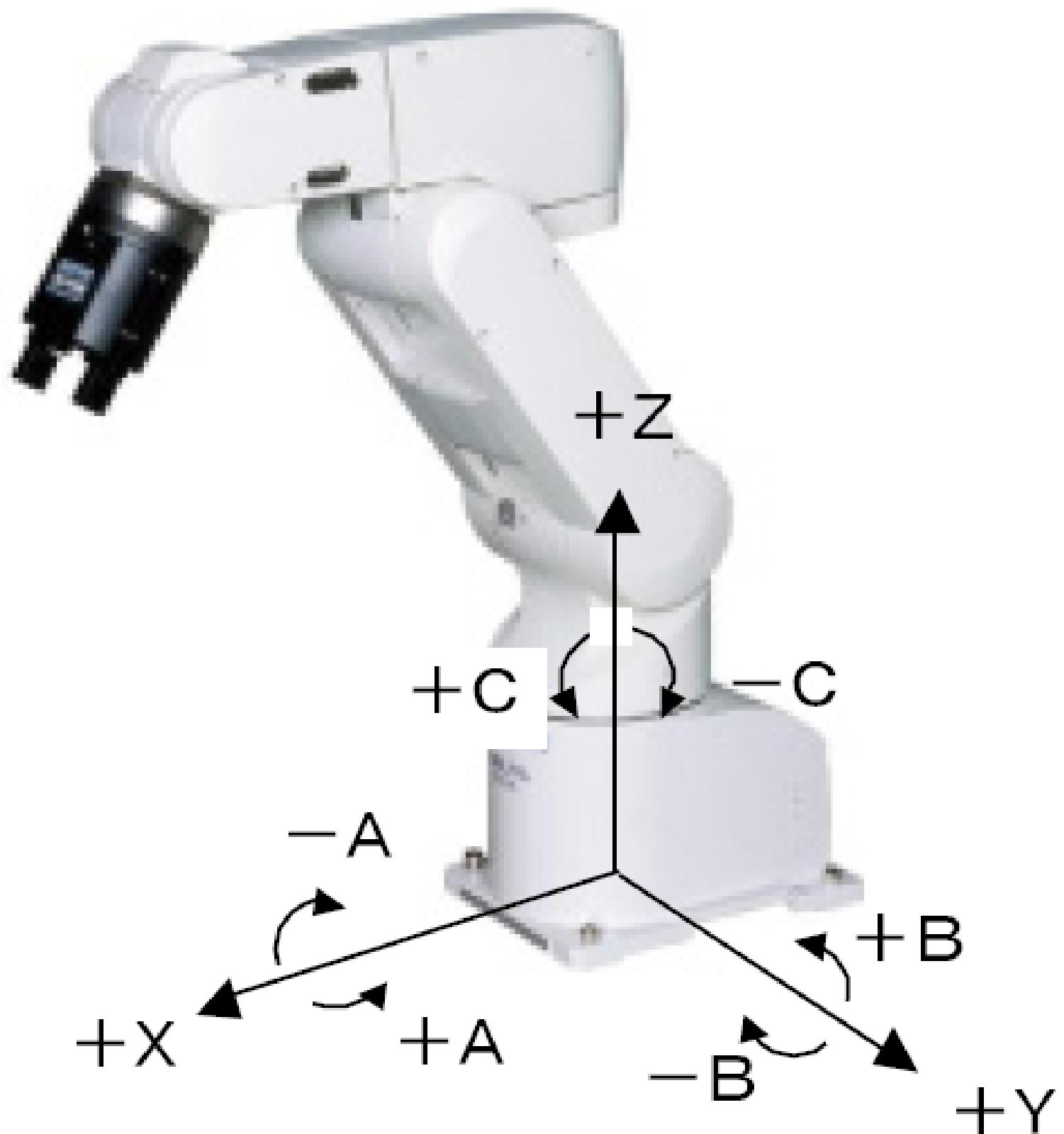
working space, I1 = 0.5 +0.02, I2 = 0.5 -0.02, max(error)= 0.04

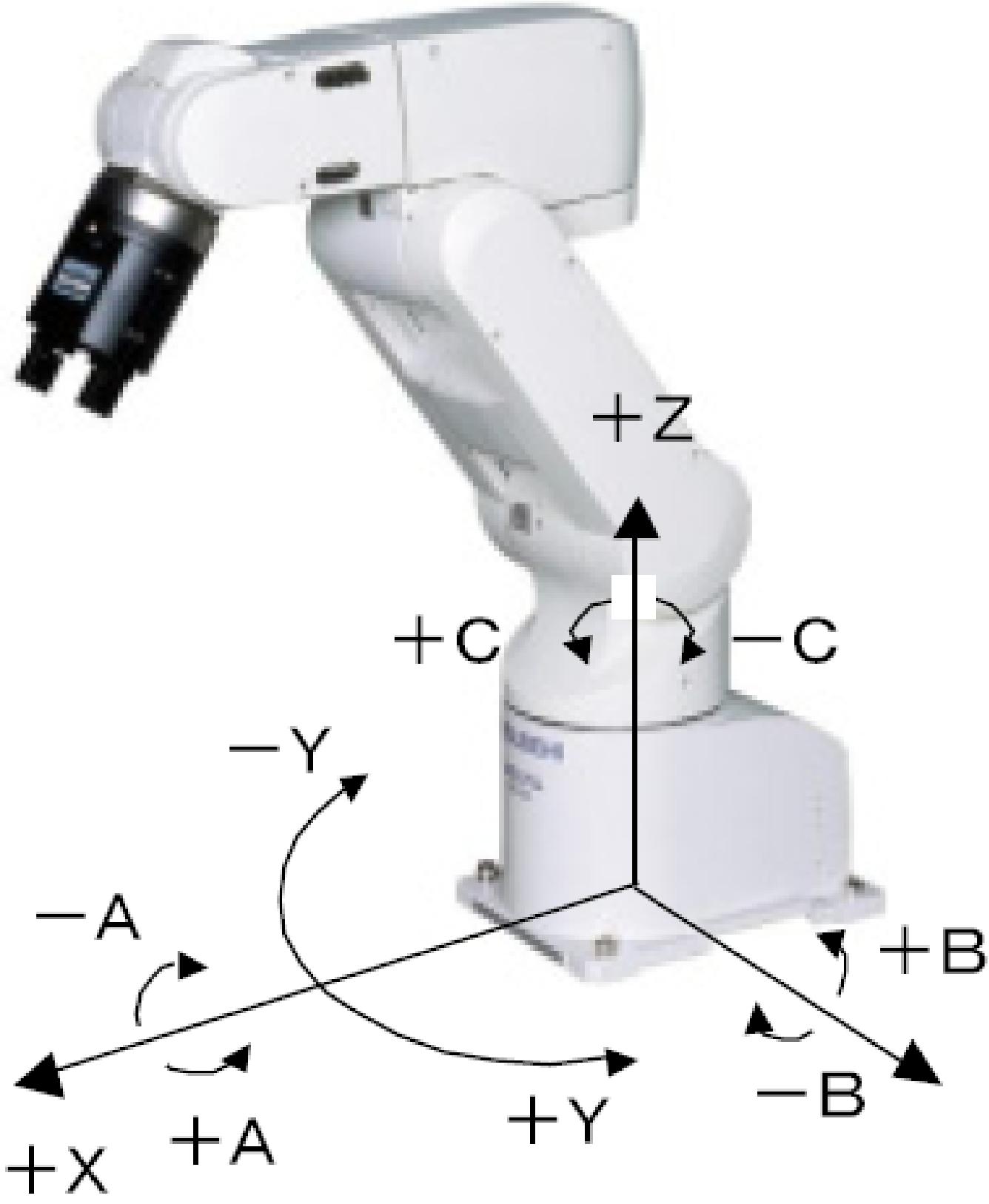


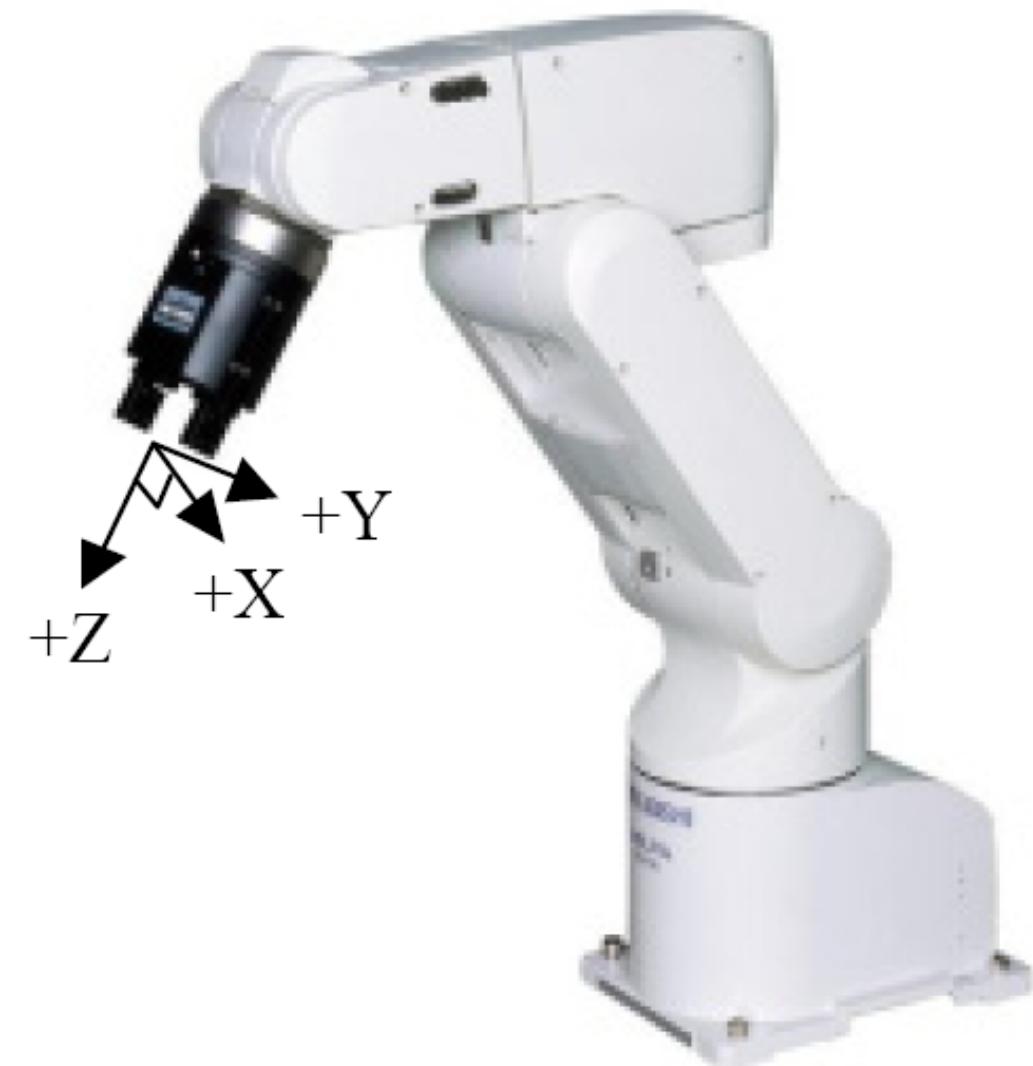
working space, $\theta_1 \rightarrow -3^\circ$, $\theta_2 \rightarrow +3^\circ$, max(error)= 0.026177



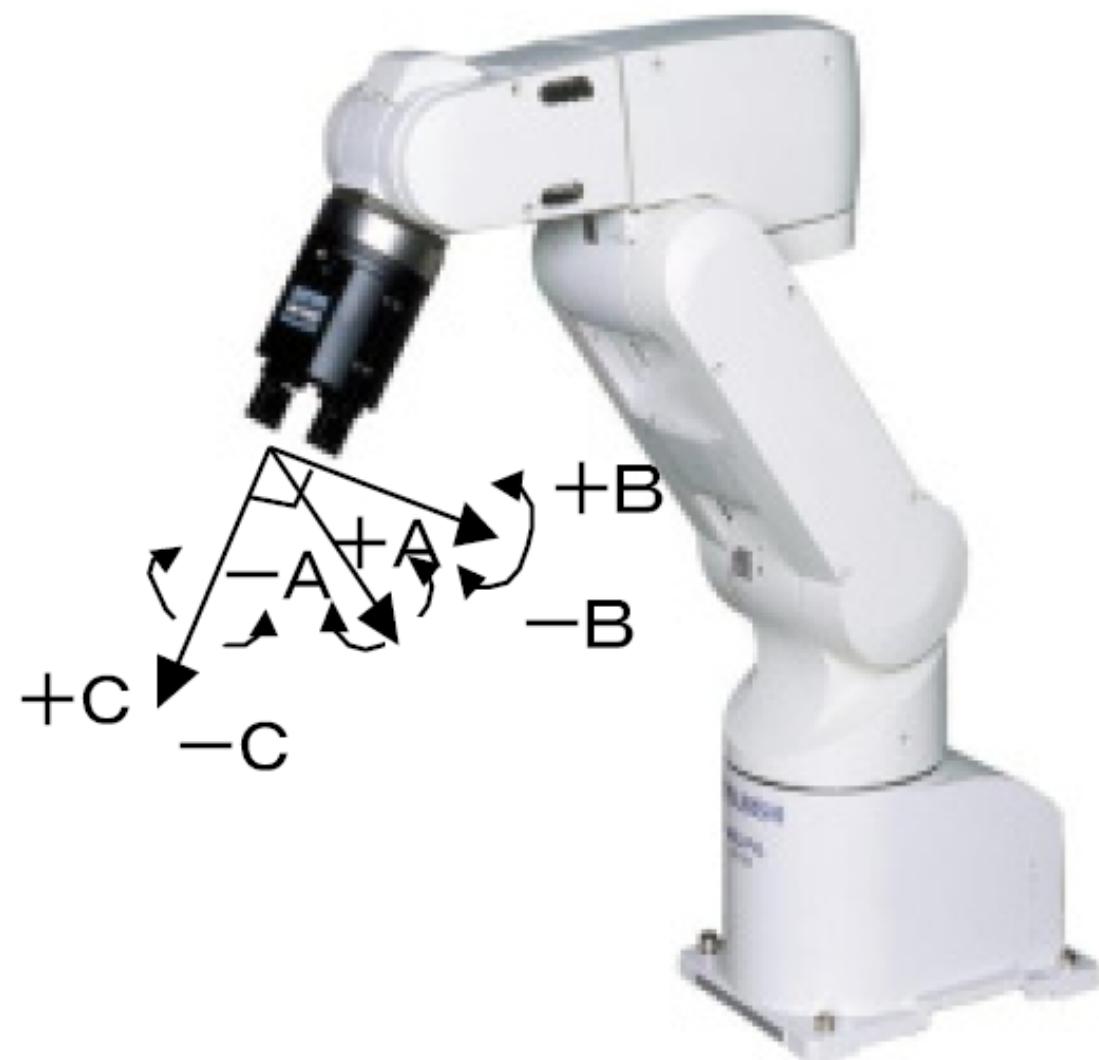








+Z
+Y
+X



+C
-C
-A
+A
+B
-B