

Otázky ke zkoušce z OTS

Základy

1. Kolik systémů lze definovat na nějakém konkrétním fyzikálním objektu? Na čem přitom záleží?
2. Jsou dány objekty M , X a pozorovatel P . Jaká je nejdůležitější vlastnost, kterou musí mít objekt M , aby byl modelem objektu X ?
3. Jaké hlavní problémy formalizuje a řeší Klirova obecná teorie systémů? Jaká je, stručně řečeno, hlavní myšlenka řešení každého problému?
4. Jakou roli hraje experimentátor (pozorovatel) při definování systému na objektu?
5. Co formálně rozumíme pod pojmem systém? Jaké množiny ve formální definici vystupují? Jakého typu mohou tyto množiny být?
6. Co tím rozumíme, když říkáme, že Klirovská obecná teorie systémů je obecná?
7. Jaké tři hlavní důvody máme k tomu, že pro analýzu struktury systémů v OTS používáme entropii (má entropie nějaké vhodné vlastnosti)?
8. Co je to funkce přípustnosti stavu (pravděpodobnostní, posibilistická) pro systém daný množinou svých proměnných, včetně jejich oborů hodnot?
9. Co je to zobecněný dynamický systém? Čím je popsán? Vysvětlete všechny použité symboly.
10. Jaký je rozdíl mezi zobecněným dynamickým systémem a generativním systémem? Předpokládejte pro jednoduchost jen jeden parametr, a to čas.
11. Co je třeba vše udělat, když chceme z datového systému vytvořit generativní dynamický model systému? Na co je při tom třeba dbát?
12. Na objektu o neznámé struktuře sledujeme stav pěti základních proměnných v_1, \dots, v_5 v čase, který kvantujeme po 1 sec. Z dat odhadneme sdružené rozdělení pravděpodobnosti $p(v_1, v_2, \dots, v_5)$. To ovšem nepopisuje dynamiku chování systému v čase. Jak do pravděpodobnostního modelu zavedeme schopnost modelovat dynamiku? Jak potom takový model vybavíme schopností generovat budoucí stavy?
13. Co je to generativní nejistota systému? Jak se vypočte? Vysvětlete všechny použité symboly.
14. Je dán datový systém, který má tři základní proměnné, jejichž společnou parametrickou množinou je čas. Co musíte udělat, abyste nad tímto systémem definovali generativní systém? Jak to musíte udělat? Jaké podmínky musí platit?
15. Kdy můžeme místo translačních pravidel použít při definici zobecněného dynamického systému masku?
16. Jakou neparametrickou reprezentací nejobecněji popisujeme dynamiku diskrétního systému za neurčitosti? Jak ji popisujeme u systému, ve kterém jsou všechny proměnné parametrizovány časem?

17. Kdy je generativní dynamický systém deterministický? Lze deterministický dynamický systém popsat funkcí přípustnosti stavu?

Podsystém, identifikace struktury

18. Jaké podmínky musí platit, aby zobecněný dynamický systém ${}^1\mathbf{S}$ byl podsystémem systému \mathbf{S} ? Čím je pak popsán podsystém ${}^1\mathbf{S}$?

19. Nakreslete blokové schéma systému \mathbf{S} , jehož rekonstrukční hypotéza (dekompozice na podsystémy) je $G(\mathbf{S}) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}\}$ neboli ve zkrácené notaci, kterou jsme používali na přednáškách $G(\mathbf{S}) = 12|234|41$. Které proměnné jsou vazební proměnné mezi prvním a druhým podsystémem?

20. Nakreslete blokové (nikoliv množinové) schéma systému \mathbf{S} , jehož rekonstrukční hypotéza (dekompozice na podsystémy) je $G(\mathbf{S}) = \{\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_4, v_1, v_5\}\}$ neboli ve zkrácené notaci, kterou jsme používali na přednáškách $G(\mathbf{S}) = 123|234|415$. Které proměnné jsou vazební proměnné mezi prvním a druhým podsystémem?

21. Nakreslete všechny přípustné masky pro generativní dynamický systém se dvěma základními proměnnými a hloubkou historie dva (tzn. masky budou mít rozměr 2×2). Co musí pro přípustné masky platit?

22. Dva dílčí systémy ${}^1\mathbf{S}$ a ${}^2\mathbf{S}$ jsou dány množinami proměnných a funkcemi přípustnosti stavu. Jaké jsou nutné podmínky pro to, aby existovala rekonstrukce celkového systému z množiny $\{{}^1\mathbf{S}, {}^2\mathbf{S}\}$?

23. Tři dílčí systémy ${}^1\mathbf{S}$, ${}^2\mathbf{S}$ a ${}^3\mathbf{S}$ jsou dány množinami proměnných a funkcemi přípustnosti stavu. Jaké jsou nutné podmínky pro to, aby existovala rekonstrukce celkového systému z množiny $\{{}^1\mathbf{S}, {}^2\mathbf{S}, {}^3\mathbf{S}\}$?

24. Kdy nemusíme při rekonstrukci systému z podsystémů použít iterativní spojovací proceduru?

25. Nechť ${}^1\mathbf{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ a ${}^2\mathbf{S} = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ jsou kompatibilní a lokálně konzistentní podsystémy nějakého systému \mathbf{S} , popsané pravděpodobnostní funkcí přípustnosti stavu. Za jakých podmínek musíme použít iterativní spojovací proceduru pro spojení ${}^1\mathbf{S}$ a ${}^2\mathbf{S}$?

26. Co musí platit pro tři podsystémy ${}^1\mathbf{S} = \{v_1, v_2, v_3\}$, ${}^2\mathbf{S} = \{v_3, v_4\}$ a ${}^3\mathbf{S} = \{v_1, v_4\}$ nějakého systému \mathbf{S} , aby byly lokálně konzistentní?

27. Nechť ${}^1\mathbf{S} = \{v_1, v_2, v_6\}$, ${}^2\mathbf{S} = \{v_2, v_3, v_4\}$, ${}^3\mathbf{S} = \{v_3, v_7\}$ a ${}^4\mathbf{S} = \{v_4, v_5\}$ jsou kompatibilní a lokálně konzistentní podsystémy nějakého systému. Musíme pro jejich spojení použít iterativní spojovací proceduru?

28. Nechť ${}^1\mathbf{S} = \{v_1, v_2\}$, ${}^2\mathbf{S} = \{v_2, v_3\}$ a ${}^3\mathbf{S} = \{v_3, v_1\}$ jsou tři lokálně konzistentní posibilistické systémy. Za jakých podmínek musíme použít iterativní spojovací proceduru?

29. Nechť ${}^1\mathbf{S}$ a ${}^2\mathbf{S}$ jsou podsystémy, které vznikly rozkladem téhož systému \mathbf{S} . Jak ověříme, že ${}^1\mathbf{S}$ a ${}^2\mathbf{S}$ jsou lokálně konzistentní?

30. Nechť ${}^1\mathbf{S}$, ${}^2\mathbf{S}$ a ${}^3\mathbf{S}$ jsou podsystémy, které vznikly rozkladem téhož systému \mathbf{S} . Může se stát, že ${}^1\mathbf{S}$, ${}^2\mathbf{S}$ a ${}^3\mathbf{S}$ jsou globálně nekonzistentní?

31. Co rozumíme pod pojmem identifikace struktury zobecněného dynamického systému? Z jakých základních bloků se skládá?
32. Z jakých podprocedur se skládá procedura identifikace struktury probabilistického systému? Jaké problémy jednotlivé podprocedury řeší? Musí výsledky těchto podprocedur respektovat nějaké požadavky? Pokud ta která procedura vede na problém řešitelný nějakým známým algoritmem, uveďte ho.
33. Nechť \mathbf{S} je množina proměnných nějakého systému a \mathbf{T} je množina proměnných jeho podsystemu. Co můžete říci o podmíněné entropii $H(\mathbf{S} | \mathbf{T})$?
34. Nechť \mathbf{S} je množina proměnných nějakého systému a \mathbf{T} je množina proměnných jeho podsystemu. Co můžete říci o podmíněné entropii $H(\mathbf{T} | \mathbf{S})$? Proč tomu tak je (použijte vlastnosti rozkladu prostoru elementárních jevů)?
35. Svými proměnnými je dán systém $\mathbf{S} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Dále jsou nad stejnými proměnnými definovány systémy ${}^1\mathbf{S} = \{v_1, v_2, v_3\}$, ${}^2\mathbf{S} = \{v_1, v_2\}$ a ${}^3\mathbf{S} = \{v_4, v_5\}$. Je množina $\{{}^1\mathbf{S}, {}^2\mathbf{S}, {}^3\mathbf{S}\}$ neredundantní dekompozicí systému \mathbf{S} ? Proč?
36. Svými proměnnými jsou dány dva dílčí systémy ${}^1\mathbf{S} = \{v_1, v_2\}$ a ${}^2\mathbf{S} = \{v_2, v_3\}$. Předpokládejme, že existuje celá množina možných rekonstrukcí systému $\mathbf{R} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Podle jakého kritéria vybereme nejlepší z nich? Jak ověříme, že nějaké řešení vůbec existuje?
37. Co je to spojení dvou podsystemů s funkcemi přípustnosti stavu $p(a, b)$ a $p(b, c)$? Proč je definováno předpisem $p(a, b) \cdot p(c | b)$? Má takto definované spojení nějaké zajímavé vlastnosti?
38. Nechť ${}^1\mathbf{S} = \{v_1, v_2, v_3\}$ a ${}^2\mathbf{S} = \{v_2, v_3, v_4\}$ jsou dva kompatibilní systémy s funkcemi přípustnosti stavu ${}^1p(v_1, v_2, v_3)$ a ${}^2p(v_2, v_3, v_4)$. Které proměnné jsou vazební? Jakou vlastnost musí mít ${}^1p(v_1, v_2, v_3)$ a ${}^2p(v_2, v_3, v_4)$, aby systémy byly kompatibilní (napište formou vzorce)? Uveďte vzorec pro sdružené funkce přípustnosti stavu ${}^{12}p^*(v_1, v_2, v_3, v_4)$ nestranného spojení ${}^1\mathbf{S} * {}^2\mathbf{S}$ a ${}^{21}p^*(v_1, v_2, v_3, v_4)$ nestranného spojení ${}^2\mathbf{S} * {}^1\mathbf{S}$ (nestranné znamená o maximální entropii). Co pro ${}^{12}p$ a ${}^{21}p$ musí platit?
39. Mějme tři dílčí systémy ${}^1\mathbf{S} = \{v_1, v_3\}$, ${}^2\mathbf{S} = \{v_1, v_2\}$ a ${}^3\mathbf{S} = \{v_3, v_2\}$, každý daný svou funkcí přípustnosti stavu. Nechť jsou všechny dvojice těchto dílčích systémů lokálně konzistentní. Uveďte jednoduchý příklad konkrétních funkcí přípustnosti stavu pro ${}^1\mathbf{S}$, ${}^2\mathbf{S}$, ${}^3\mathbf{S}$ pro případ, kdy tyto tři dílčí systémy nejsou globálně konzistentní. Proč nejsou globálně konzistentní?
40. Popište spojovací proceduru pro spojení podsystemů do celkového systému. Kdy je nutno použít její iterativní variantu? Kdy konverguje? Jak se z jejího výsledku pozná, že systém je globálně konzistentní?
41. Vyjmenujte všechna bezprostřední zjemnění rozkladu systému na podsystemy $G = 123 | 234$
42. Vyjmenujte všechna bezprostřední zjemnění rozkladu systému $G = 12 | 234$ na podsystemy.
43. Je rozklad $G_2 = 23 | 13 | 12 | 34 | 24$ zjemněním rozkladu $G_1 = 123 | 234$? Proč? Je zjemněním bezprostředním? Proč?
44. Vyjmenujte všechna zjemnění rozkladu systému $G = 1 | 23$ na podsystemy.
45. Je dán generativní zobecněný dynamický systém \mathbf{S} definovaný množinou základních proměnných $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a maskou. Uveďte tři způsoby, kterými ho můžete zjednodušit při zachování všech

základních proměnných (tj. zmenšit velikost jeho popisu při co nejlepším zachování generativní neurčitosti). U každého způsobu uveďte kritéria optimality a jmenujte výpočetní problém, na který každý z těchto způsobů vede. Přesné znění algoritmů není nutno uvádět.

46. Jak můžeme zjistit, jestli hypotéza G_i o struktuře systému \mathbf{S} je lepší než hypotéza G_j ? Jak ověříme, že data postačují k takovému závěru?

47. Napište vztah pro Kullback-Leiblerovu vzdálenost mezi systémem s pravděpodobnostní funkcí přípustnosti stavu $p(v_1, v_2, v_3, v_4)$ jeho rekonstrukcí ze dvou podsystémů ${}^1p(v_1, v_2, v_3)$ a ${}^2p(v_2, v_3, v_4)$.

Entropie, kontingenční analýza, odhadování

48. Jak byste definovali pojem entropie diskrétní a spojité náhodné proměnné?

49. Co je to zjemnění rozkladu množiny elementárních jevů? Vysvětlete všechny použité symboly.

50. Co je to součin rozkladů množiny elementárních jevů? Vyjmenujte alespoň tři vlastnosti, které má.

51. Které rozdělení nad danou množinou hodnot spojité náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a daným rozptylem má maximální entropii? Jak byste postupovali při důkazu?

52. Které rozdělení nad daným konečným oborem hodnot diskrétní náhodné veličiny má maximální entropii? O rozdělení nemáme žádnou dodatečnou informaci. Naznačte důkaz.

53. Napište vzorec pro výpočet podmíněné entropie $H(X | Y)$ tak, aby jste v něm použili pouze pravděpodobnost $p(X, Y)$, případně marginální pravděpodobnosti $p(X)$ a $p(Y)$ spočitatelné z $p(X, Y)$.

54. Mějme diskrétní náhodné veličiny X, Y takové, že $Y = f(X)$, kde f je bijektivní zobrazení (což znamená, že je „prosté a na“ čili vzájemně jednoznačné). Co můžeme říci o podmíněné entropii $H(Y | X)$? Naznačte důkaz.

55. Nechť X a Y jsou diskrétní nezávislé náhodné veličiny. Můžeme něco říci o podmíněné entropii $H(X | Y)$? Dokažte z definice podmíněné entropie.

56. Jaký je vztah mezi entropií definovanou na rozkladu množiny elementárních jevů a entropií diskrétní proměnné?

57. Popište kontingenční test, který testuje nezávislost dvou diskrétních náhodných proměnných x a y , kde x je vektorová proměnná s oborem hodnot $R_x = \{[1, 2]^\top, [2, 3]^\top, [1, 3]^\top\}$ a y je celočíselná proměnná s oborem hodnot $R_y = \{1, 3, 4, 6\}$. Vysvětlete všechny symboly, které použijete. Nezapomeňte určit počet stupňů volnosti.

58. Jaký rozměr má kontingenční tabulka pro kontingenční test, který testuje nezávislost dvou diskrétních náhodných proměnných x a y , kde x je vektorová proměnná s oborem hodnot $R_x = \{[1, 2]^\top, [2, 3]^\top, [1, 3]^\top\}$ a y je celočíselná proměnná s oborem hodnot $R_y = \{1, 3, 4, 6\}$? Kolik stupňů volnosti má tento test? Předpokládejte, že četnosti zjištěné pro všechny možné stavy jsou nenulové.

59. A/D převodník měří napětí U v rozsahu $0-100\mu\text{V}$. K dispozici je posloupnost 10 000 měření. Jak byste ze změřených hodnot vypočítali entropii $H(U)$?
60. 16-bitový převodníkem jsme naměřili $n = 1000$ hodnot teploty T v kelvinech. Jak z hodnot vypočteme entropii $H(T)$?
61. 32-bitový převodník měří nějakou spojitou veličinu \mathbf{x} o dimenzi 2. K dispozici je posloupnost n měření. Jak byste ze změřených hodnot vypočítali entropii $H(\mathbf{x})$?
62. Uveďte Scottovo pravidlo pro optimální volbu šířky příhrádky histogramu náhodné proměnné s normálním rozdělením $N(0, \sigma)$. Vysvětlete všechny použité symboly. V jakém smyslu je výsledný histogram optimální?
63. Napište vzorec pro výpočet odhadu entropie reálné skalární proměnné x z histogramu, který je získán po optimální kvantizaci x (například podle Scottova pravidla). Celkem je k dispozici n kvantizovaných měření proměnné x .
64. Jak byste odhadli entropii $H(x, y)$ dvou skalárních proměnných, aniž byste z měření nejprve konstruovali histogram? K dispozici je soubor n měření ve tvaru dvojic (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$. Přesný tvar toho členu ve vzorci pro výpočet entropie, ve kterém se vyskytuje jen dimenze d a velikost datového souboru n , není nutno uvádět. Hodnotu konstantního členu není nutno uvádět. Stručně vysvětlete, jakým postupem je nutno zpracovat vstupní data, aby ze získalo vše potřebné k výpočtu entropie.
65. K čemu slouží metoda *jackknife*? Popište stručně postup pro odhad entropie $H(x)$ a jejího rozptylu z datového souboru $\mathcal{D} = \{x_i\}_{i=1}^n$.
66. Uveďte vzorec pro Kullback-Leiblerovu vzdálenost mezi dvěma rozděleními $p(x)$ a $q(x)$. Vysvětlete všechny použité symboly.
67. Napište alespoň tři obecné vlastnosti, které má Kullback-Leiblerova vzdálenost mezi dvěma rozděleními $p(s)$ a $p^*(s)$.
68. Z čeho plyne, že Kullbackova-Leiblerova vzdálenost je nezáporná?

Rozklad na komponenty

69. Jakou hlavní statistickou vlastnost mají jednotlivé průměty na hlavní komponenty $\mathbf{y}_i = \mathbf{w}^\top \mathbf{X}$ po redukcí dimenze pomocí PCA (Principal Component Analysis)? \mathbf{X} je matice $d \times k$, ve které jsou po sloupcích jednotlivé vstupní vektory $\mathbf{x}_j \in R^d$ a dále $\mathbf{y}_i \in R^k$ a $\|\mathbf{w}\| = 1$.

70. Jaké kritérium optimalizuje Fisherova lineární diskriminační analýza pro dvě třídy? Vysvětlete všechny symboly.

71. Jaké kritérium optimalizuje PCA (Principal Component Analysis) při použití k redukcí dimenze dat z dimenze 10 na dimenzi 1? Vysvětlete použité symboly.

72. Jak vypočtete hlavní komponenty stereofonního audiosignálu pomocí PCA (Principal Component Analysis)? K dispozici je 12 sekund záznamu. Jak získáme jednokanálový signál o maximální průměrné energii?