Geometrické transformace obrazu

Ondřej Drbohlav

6. prosince 2002

1 Úvod

Obrázek je reprezentován spojitou funkcí $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Zde $M \in \mathbb{R}_2$ je definiční obor funkce a $\mathbb{R}$ je obor hodnot. Množina M je obvykle parametrizována vektorem $\mathbf{x}$, jehož složky jsou souřadnice dvourozměrného kartézského systému. Geometrické transformace obrazu nejsou ničím jiným než změnou parametrizace nosiče M a vyjádřením funkce f v tomto novém souřadném systému.

Transformace je popsána funkcí T, která váže souřadnice $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ v původním obrázku a souřadnice $\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T$ v novém obrázku:

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{u})\,. \tag{1}$$

Obrazovou funkci původního obrázku již máme značenou f. Označíme-li obrazovou funkci nového obrázku g, pak platí:

$$g(\mathbf{u}) = f(T(\mathbf{u}))\,, \tag{2}$$

$$g(T^{-1}(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x})\,, \tag{3}$$

kde T^{-1} je inverzní zobrazení k zobrazení T.

1.1 Příklad

V minulém cvičení jsme prováděli zvětšení obrázku. To odpovídá transformaci

$$\mathbf{x} = T(\mathbf{u}) = s\mathbf{u}\,, \qquad s < 1\,. \tag{4}$$

Pro úplnost si uveďme ještě výraz pro T^{-1}:

$$\mathbf{u} = T^{-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{s}\mathbf{x}\,. \tag{5}$$

2 Projektivní transformace

Projektivní transformace je taková, která váže souřadné systémy vztahy

$$x_1 = \frac{a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}}{a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}}\,, \tag{6}$$

$$x_2 = \frac{a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}}{a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}}\,. \tag{7}$$

Tyto vztahy můžeme přepsat do kompaktnějšího tvaru:

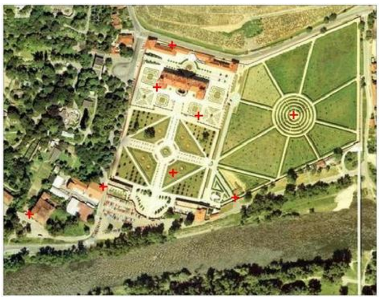
$$x_1 = \frac{\mathbf{A}_1[\mathbf{u}^T 1]^T}{\mathbf{A}_3[\mathbf{u}^T 1]^T}\,, \quad x_2 = \frac{\mathbf{A}_2[\mathbf{u}^T 1]^T}{\mathbf{A}_3[\mathbf{u}^T 1]^T}\,, \tag{8}$$

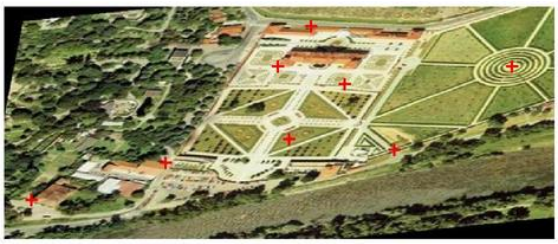
kde $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ a $\mathbf{A}_3$ jsou řádky matice $\mathbf{A}$ tvořené koeficienty ze vztahů (6) a (7):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{9}$$

3 Výpočet projektivní transformace

V této části si ukážeme, jak vypočítat matici $\mathbf{A}$, která reprezentuje projektivní transformaci mezi dvěma obrazy. V těchto dvou obrazech mějme tzv. lícovací body, tj. body které si v obrazech vzájemně korespondují (označeny červeným křížkem):





Lícovacích dvojic nechť je n. Pro každou dvojici lícovacích bodů $(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i)$ mají platit vztahy (8), kam za $\mathbf{x}$ dosadíme $\mathbf{x}^i$ a za $\mathbf{u}$ dosadíme $\mathbf{u}^i$. Pak hledáme matici $\mathbf{A}$ takovou, aby (8) byla splněna pro všechny lícovací dvojice.

Nalezení $\mathbf{A}$ je obzvláště jednoduché, neboť vztahy (8) jsou v prvcích $\mathbf{A}$ lineární. Úpravou vztahů totiž dostaneme:

$$\mathbf{A}_3\left[\mathbf{u}^T 1\right]^T x_1 - \mathbf{A}_1\left[\mathbf{u}^T 1\right]^T = 0\,, \tag{10}$$

$$\mathbf{A}_3\left[\mathbf{u}^T 1\right]^T x_2 - \mathbf{A}_2\left[\mathbf{u}^T 1\right]^T = 0\,. \tag{11}$$

Utvoříme z prvků matice $\mathbf{A}$ vektor $\mathbf{a} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3] = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}]^T$ a zapíšeme lineární soustavu rovnic pro tento vektor:

$$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1^1 u_1^1 & -x_1^1 u_2^1 & -x_1^1 \\ 0 & 0 & 0 & u_1^1 & u_2^1 & 1 & -x_2^1 u_1^1 & -x_2^1 u_2^1 & -x_2^1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ u_1^n & u_2^n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1^n u_1^n & -x_1^n u_2^n & -x_1^n \\ 0 & 0 & 0 & u_1^n & u_2^n & 1 & -x_2^n u_1^n & -x_2^n u_2^n & -x_2^n \end{pmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{12}$$

Soustavu vyřešíme a tím dostaneme vektor $\mathbf{a}$, který pak jen přeskládáme do matice $\mathbf{A}$ a tím jsme hotovi.

3.1 Praktické poznámky

- Všimněte si, že když si z vektorů $\mathbf{u}^i$ zkonstruujete vektory $\mathbf{U}^i = \left[\ \mathbf{u}^i 1\ \right]$, a když přeskládáte řádky, dá se soustava (12) napsat ve velice kompaktním tvaru:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}^{1T} & 0\ 0\ 0 & -x_1^1 \mathbf{U}^{1T} \\ \mathbf{U}^{2T} & 0\ 0\ 0 & -x_1^2 \mathbf{U}^{2T} \\ \mathbf{U}^{3T} & 0\ 0\ 0 & -x_1^3 \mathbf{U}^{3T} \\ .\ .\ . & .\ .\ . & . \\ \mathbf{U}^{nT} & 0\ 0\ 0 & -x_1^n \mathbf{U}^{nT} \\ & & \\ 0\ 0\ 0 & \mathbf{U}^{1T} & -x_2^1 \mathbf{U}^{1T} \\ 0\ 0\ 0 & \mathbf{U}^{2T} & -x_2^2 \mathbf{U}^{2T} \\ 0\ 0\ 0 & \mathbf{U}^{3T} & -x_2^3 \mathbf{U}^{3T} \\ .\ .\ . & .\ .\ . & . \\ 0\ 0\ 0 & \mathbf{U}^{nT} & -x_2^n \mathbf{U}^{nT} \end{pmatrix} \mathbf{a} = \mathbf{C}\mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{13}$$

  Matici vlevo, která se konstruuje z korespondencí, jsme označili $\mathbf{C}$.

- Soustava (13) je lineární homogenní soustava rovnic pro 9 neznámých. Z toho plyne, že stačí, když matice $[\mathbf{C}]$ obsahuje 8 lineárně nezávislých řádků; řešení pak dostaneme jako nulový prostor této matice. Minimálně tedy potřebujeme 4 korespondence v obecné (nedegerované) poloze.

V praxi se používá korespondencí více než 4, aby se zmenšil vliv chyby při určení korespondujících bodů. Kvůli chybám je však také nulový prostor matice [**C**] prázdný a vektor [**a**] se hledá ve smyslu nejmenších čtverců, tj. určí se jako

$$\mathbf{a} = \underset{||\mathbf{a}^*||=1}{\operatorname{argmin}} ||\mathbf{C}\mathbf{a}^*||^2 \tag{14}$$

kde $||\mathbf{Y}||$ je Euklidovská norma ($\sqrt{\sum Y_i^2}$).

Nalezení vektoru **a** se v takovém případě udělá pomocí SVD (Singular Value Decomposition). Lze použít následující MATLAB kód:

```
% znormuj radky v matici tak, aby jejich delka byla 1:
foo=1./sqrt(sum(C.^2,2));
C=C.*(foo*ones(1,size(C,2)));
% vypocitej vektor a
[u,d,v]=svd(C'*C);
a=u(:,end);
```