MASTRKYB 2007/2008

1. Funkcionálně–analytické a topologické struktury

1.1. Skalární součin. Normy a metriky na lineárních prostorech

V tomto odstavci shrneme základní pojmy a konstrukce z teorie normovaných lineárních prostorů. Podrobnější výklad lze najít v knize W. Rudina [1] a J. Kelleyho [3].

Definice (prostor se skalárním součinem): Lineární (= vektorový) prostor H (nad reálnými čísly R či komplexními čísly C jež se nazývají *skaláry*) se nazývá *prostor se skalárním součinem*, jestliže ke každé dvojici vektorů $x, y \in H$ je přiřazen skalár (x, y) tak, že platí

(i) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ ($\overline{z}$ značí číslo komplexně sdružené k z, pokud je H nad C. Když je H nad R, požadujeme $(x, y) = (y, x)$.)

(ii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

(iii) $(x, x) \geq 0$

(iv) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = o$ (o je nulový vektor)

(v) $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y)$ pro každý skalár $\lambda \in R$ (či $\lambda \in C$).

Příklady:

1. Nechť R^n resp. C^n je příslušný n-dimensionální eukleidovský prostor, nechť $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Pak $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ (resp. $(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \cdots + x_n \bar{y}_n$) je skalární součin na R^n (resp. C^n).

2. Nechť N značí množinu přirozených čísel. Nechť ℓ^2 je prostor všech posloupností (reálných či komplexních) $x = (x_1, x_2, \ldots,)$ takových, že $\sum_1^\infty |x_n|^2 < \infty$. Pak

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \ \text{(resp. } (x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i)$$

je skalární součin na ℓ^2. V tomto smyslu můžeme prostor ℓ^2 chápat jako nejjednodušší nekonečně dimenzionální prostor se skalárním součinem (nejbližší rozšíření R^n, “nekonečně dimenzionální eukleidovský prostor”).

Jak uvidíme, v prostoru se skalárním součinem bude zobrazení $\| \quad \| \colon H \to \langle 0, \infty)$, $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ definovat "normu"; "metrika" na H indukovaná skalárním součinem pak bude funkce $\rho\colon H \times H \to \langle 0, +\infty)$, $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Připomeňme, že metrický prostor (X,d) se nazývá *úplný*, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost je konvergentní. (Cauchyovská posloupnost v metrickém prostoru (M,d) je definována takto: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0, m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Konvergentní posloupnost $x_n \to x$ v metrickém prostoru je definována takto: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0,\ n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$. Je zřejmé, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.) Tímto pojmem se budeme později ještě podrobněji zabývat v kapitole o metrických prostorech.

Intuitivní obsah úplnosti je zhruba tento: Posloupnosti, jejichž prvky se "nekonečně přibližují", jsou jen ty, které konvergují (k něčemu z toho prostoru!). Pojem úplnosti je jeden z nejdůležitějších pojmů moderní (čisté i aplikované) matematiky. V dalším textu ho budeme poměrně podrobně rozebírat.

Poznamenejme konečně, že každý prostor se skalárním součinem se dá zúplnit, což je již hlubší výsledek z teorie metrických prostorů a prostorů se skalárním součinem. Zúplňování se budeme rovněž věnovat později.

Definice (Hilbertův prostor): Nechť H je prostor se skalárním součinem. Prostor H se nazývá *Hilbertův*, jestliže při metrice $\rho(x,y) = \|x-y\| = (x-y, x-y)^{\frac{1}{2}}$ je H úplný metrický prostor.

Příklady:

1. Prostor R^n (resp. C^n) je Hilbertův prostor (R^n je úplný – to je nám známá Bolzano–Cauchyova podmínka).

2. Lze snadno dokázat (užitím Bolzanovy–Cauchyovy podmínky "po složkách"), že prostor ℓ^2 je Hilbertův prostor.

3. Prostor c_{00} všech posloupností, které jsou "skoro všude" 0 (tj. jsou 0 až na konečně mnoho souřadnic) je prostor se skalárním součinem (je to lineární podprostor ℓ^2, takže skalární součin na c_{00} se shoduje se skalárním součinem na ℓ^2), ale není úplný. Skutečně, např. posloupnost $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\}$ je cauchyovské v c_{00}, ale není v c_{00} konvergentní (prvek $x = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ mající n-tou souřadnici rovnu $\frac{1}{n}$ do c_{00} nepatří, ale to by mohl být jediný kandidát na $\lim\limits_{x \to \infty} x_n$). Prostor c_{00} je "hustý" v l^2 (tj. každý prvek z l^2 je možné chápat jako $\lim\limits_{x \to \infty} x_n$ pro nějaké $x_n \in c_{00}$).

Následující tvrzení má základní důležitost v teorii Hilbertova prostoru.

Tvrzení (Cauchyova nerovnost): Nechť H je prostor se skalárním součinem. Pak $\forall x, y \in H$

$$|(x,y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

V poslední nerovnosti nastane rovnost právě když vektory x, y jsou lineárně závislé.

Důkaz: Vychutnejme si eleganci tohoto důkazu. Nechť např. $y \neq 0$. Pak dostáváme postupně

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\|y\|x - \frac{(x,y)}{\|y\|}y, \|y\|x - \frac{(x,y)}{\|y\|}y \right) \\ &= \|y\|^2\|x\|^2 - |(x,y)|^2 \ . \end{aligned}$$

Tím získáme Cauchyovu nerovnost. Pokud v ní nastává rovnost, musí být

$$\left(\|y\|x - \frac{(x,y)}{\|y\|}y, \|y\|x - \frac{(x,y)}{\|y\|}y \right)$$

rovno nule a tedy $\|y\|x - \frac{(x,y)}{\|y\|}y = 0$. Z toho plyne, že $x = \frac{(x,y)}{\|y\|^2}y$, takže vektory x, y jsou lineárně závislé. **QED.**

"**QED.**" je zkratka pro latinské "Quod errat demonstrandum" a volně přeloženo znamená "což bylo dokázati".

Důsledek: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in H$.

Důkaz: Trojúhelníková nerovnost se získá snadno z Cauchyovy nerovnosti (uvažte kvadrát trojúhelníkové nerovnosti). **QED.**

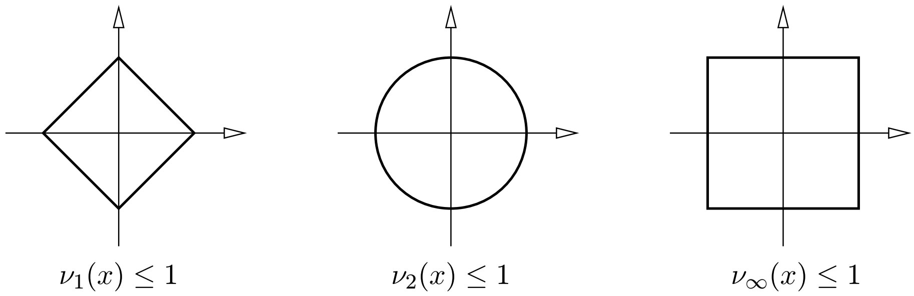
Hilbertovy prostory jsou v jistém smyslu nejhezčí lineární prostory s metrikou. Představují nejpřirozenější zobecnění euklidovských prostorů. Mají pozoruhodnou teorii, jejíž řada výsledků je aplikovatelná ve fyzice a inženýrských vědách. Základy teorie Hilbertova prostoru uvádíme v kapitole **??**. Pokračujme v přehledu prostorů s metrikou.

Definice (normovaný prostor): Nechť X je vektorový prostor (nad R či C). X se nazývá se *normovaný*, jestliže každému $x \in X$ je přiřazeno *nezáporné* číslo (jeho norma) $\|x\|$ tak, že platí ($\forall x, y \in X$, $\forall \alpha$ skalár):

a) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

c) $\|x\| > 0$ pokud $x \neq o$.



Obrázek 1.1.: Jednotkové koule několika důležitých norem.

Ukázali jsme, že každý prostor se skalárním součinem lze chápat jako prostor normovaný (skalární součin (x, y) indukuje normu $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$). Je zřejmé, že norma určuje metriku. Stačí položit $d(x, y) = \|x - y\|$. Normované prostory je tedy možno automaticky chápat jako prostory metrické.

Definice (Banachův prostor): *Banachův prostor* je normovaný prostor $(X, \|.\|)$, kde $\|.\|$ indukuje metriku, v níž je X úplný.

Poznámka: Každý prostor se skalárním součinem je normovaný, každý Hilbertův prostor je Banachův.

Příklady (maticové normy): Důležité normy v R^n (resp. C^n), $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ (resp. C^n):

a) $\nu_1(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$

b) $\nu_2(x) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ eukleidovská norma

c) $\nu_p(x) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ $p \geq 1$ (pro $p = 2$ dostáváme eukleidovskou normu)

d) $\nu_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Lehce se zjistí, že ν_ℓ je skutečně norma pro každé $\ell, 1 \leq \ell \leq \infty$. Obrázek 1.1 ukazuje jednotkové koule výše zmíněných norem.

Dá se snadno ukázat, že Hilbertův prostor má "kulatá jednotková okolí" (tj. jejich koule jsou tzv. striktně konvexní, což znamená, že kdykoliv vezmeme dva body na sféře a spojíme je úsečkou, tato úsečka proniká tuto sféru *jenom* v oněch dvou bodech). Tudíž prostory normované, jejichž normy jsou indukované skalárním součinem, mají jednotková okolí kulatá. Vidíme, že např. ν_1, ν_∞ nejsou indukovatelné skalárním součinem.

V řadě oborů kybernetiky se uvažují normy na daném prostoru matic. Následující tvrzení je základní důležitosti a je třeba ho dobře pochopit. Vyslovme ho pro R^n (pro C^n platí analogicky).

Tvrzení: Nechť ν je norma v R^n. Definujme ohodnocení $\|.\|_\nu$ na prostoru $M^{n,n}$ ($M^{n,n}$ je lineární prostor matic typu n, n) tak, že

$$\|A\|_\nu = \sup_{x \neq 0, x \in R^n} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$$

(vektor x může být chápán jako "sloupcová matice"). Pak $\| \ \|_\nu$ je norma na $M^{n,n}$. Navíc platí, že $\|A\|_\nu = \max\limits_{x \neq 0, x \in R^n} \dfrac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$, a tedy $\|A\|_\nu = \nu(Ax_0)$ pro nějaký vektor x_0 z jednotkové sféry, tj. matice svou normu někde nabývá.

Důkaz: Nejdříve je třeba nahlédnout, že $\| \quad \|_\nu$ je dobře definována, tj. je potřeba ověřit, že $\sup_{x \neq 0, x \in R^n} \dfrac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$ existuje. Nejprve si všimneme, že

$$\sup_{x \neq 0,\, x \in R^n} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} = \sup_{x \in R^n,\, \nu(x)=1} \nu(Ax).$$

To je ale zřejmé: Je-li $p = \dfrac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$ a je-li $x \neq 0$, pak z linearity platí, že $p = \dfrac{\nu(A\alpha x)}{\nu(\alpha x)}$. Položíme-li $\alpha = \dfrac{1}{\nu(x)}$, dostaneme $\nu(\alpha \cdot x) = \nu\left(\dfrac{x}{\nu(x)}\right) = 1$ a přitom $p = \dfrac{\nu(A\alpha x)}{\nu(\alpha x)} = \nu\left(A\dfrac{x}{\nu(x)}\right)$.

V dalším kroku potvrdíme, že $\sup\limits_{x \in R^n,\, \nu(x)=1} \nu(Ax)$ je konečné. Důkaz provedeme sporem (uvědomíme si přitom, že zobrazení $A\colon R^n \to R^n$ dané přirozeným způsobem maticí A, tak že $A\colon A(x) = Ax$ je zřejmě spojité (vzhledem k metrice na R^n dané ν).

Nechť $\sup\limits_{x \in R^n,\, \nu(x)=1} \nu(Ax) = +\infty$. Pak lze najít posloupnost vektorů $x_n \in R^n$, $\nu(x_n) = 1$ ($n \in N$) takovou, že $\nu(Ax_n) \geq n$. Jelikož uzavřená jednotková koule v R^n je omezená a uzavřená, můžeme z posloupnosti x_n vybrat posloupnost konvergentní (to plyne z "kompaktnosti" uzavřené jednotkové koule; pokud čtenář o kompaktnosti dosud nic neslyšel, může to pro tento okamžik vzít jako fakt a pak si prostudovat část o kompaktních metrických prostorech probíranou později v tomto textu). Označme tuto vybranou posloupnost x_{n_k} $(k \in N)$. Pak $x_{n_k} \to x$, a tedy $A(x_{n_k}) \to A(x)$ (neboť A je spojité). Ale to je spor, neboť $A(x)$ by muselo být "nekonečně velké". Ukázali jsme, že $\sup\limits_{x \neq 0,\, x \in R^n} \dfrac{\nu(Ax)}{\nu(x)}$ existuje (tj. toto supremum je vlastní číslo).

Úplně stejně se ukáže, že místo sup můžeme psát max. Skutečně, nechť

$$\|A\|_\nu = \sup_{x \neq 0} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} = \sup_{x \in R^n,\, \nu(x)=1} \nu(Ax)$$

(poslední rovnost už známe). Pak lze najít posloupnost y_n takovou, že $\nu(y_n) = 1$ $(n \in N)$ a $\sup \nu(Ay_n) = \|A\|_\nu$. Buď y_{n_k} posloupnost konvergentní vybraná z y_n. Nechť $y_{n_k} \to y$. Pak $\nu(y) = 1$ (to plyne ze spojitosti normy) a $Ay_{n_k} \to Ay$. Je zřejmé, že $\|A\|_\nu = A(y)$ a tedy *velikost normy* $\|A\|_\nu$ *se nabývá v prvku* $y \in R^n$. Můžeme tudíž sup nahradit, což jsme měli ukázat.

Nyní je už snadné ověřit, že $\| \quad \|_\nu$ je skutečně norma na $M^{n,n}$. Zřejmě stačí ověřit jen trojúhelníkovou nerovnost, ostatní je evidentní. Platí

$$\|A + B\|_\nu = \max_{x \neq 0,\, x \in R^n} \frac{\nu((A+B)x)}{\nu(x)} \leq \max_{x \neq 0,\, x \in R^n} \frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} + \max_{x \neq 0,\, x \in R^n} \frac{\nu(Bx)}{\nu(x)}.$$

QED.

Poznámka: Je zajímavé, že někdy lze $\| \quad \|_\nu$ určit ryze algebraickými metodami. Platí např. pro ν_2 následujcíí rovnosti:

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sqrt{\lambda_{\max}}, \quad \lambda_{\max} \text{ je největší vlastní číslo matice } A^T A, \\ \|A^{-1}\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}}, \quad \lambda_{\min} \text{ je nejmenší vlastní číslo matice } A^T A. \end{aligned}$$

Více lze najít ve skriptu E. Krajníka [4] a ještě více pak v knize G. Goluba, Ch. Van Loana [5] či v knize M. Fiedlera [6].

Poznámka (topologický lineární prostor): V některých aplikacích je potřeba pracovat s lineárními prostory, které mají "topologii", ale nelze je normovat. Teorie těchto prostorů je poněkud obtížnější (viz např. [7]).

Definice: Lineární (tj. vektorový) prostor se "systémem okolí o" (uniformně pak pro každý bod) se nazývá topologický lineární prostor, jestliže obě operace

$$\begin{aligned} &(x, y) \to x + y \\ &(\alpha, x) \to \alpha x \end{aligned}$$

jsou spojité.

Tvrzení: Každý normovaný prostor je topologický lineární prostor.

Naopak to obecně neplatí – např. prostor $C(R)$ spojitých funkcí na R s topologií bodové konvergence není normovatelný. V některých technických vědách se pracuje i s prostory distribucí, které lze studovat ze specializované literatury, viz. např. kniha W. Rudina [2].

Poznamenejme konečně, že existují i lineární prostory, které jsou metrizovatelné, ale ne normovatelné. Takový je např. prostor L_p pro $p < 1$. Tento prostor nemá konvexní okolí nuly. Podrobněji viz. kniha W. Rudina [2].

1.2. Metrické prostory

Někdy je třeba zkoumat metriku (resp. systémy okolí bodů) na množinách, které nejsou opatřeny lineární (či jinou) algebraickou strukturou. Pak studujeme metrické či obecněji topologické prostory. Projděme si nejprve základní pojmy a některé výsledky. Speciálním otázkám se budeme věnovat v dalších částech textu.

Definice (metrický prostor): Nechť X je množina, $X \neq \emptyset$. Pak (X, d) se nazývá *metrický prostor*, pokud d je metrika, tj. pokud $\forall x, y, z \in X$ platí ($d\colon X \times X \to R^+$):

(i) $0 \leq d(x, y) < \infty$,

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (když požadujeme jen $\Leftarrow$, pak prostor nazýváme *pseudometrický*, rozdíl v teorii metrických a pseudometrických prostorů je nepatrný),

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

V předchozí části jsme dokázali následující tvrzení.

Tvrzení: Každý normovaný prostor je metrický.

Připomeňme základní pojmy metrických prostorů (některé už známe):

Posloupnost x_n je *cauchyovská* $\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0, \forall m, n \geq n_0\colon d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$.

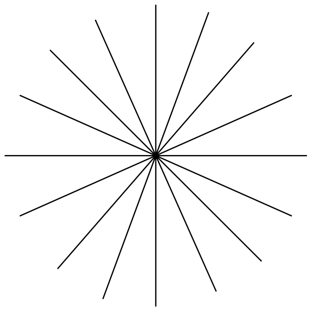
Posloupnost x_n je *konvergentní k bodu $x \in X$* $\iff \forall \varepsilon$–okolí $O_\varepsilon(x)$ bodu $x \in X$ $\exists\ n_0, \forall m \geq n_0 : x_m \in O_\varepsilon(x)$. (Připomeňme, že ε-okolí bodu x v metrickém prostoru (X, d) je množina $O_\varepsilon(x)$, $O_\varepsilon(x) = \{y | d(x, y) < \varepsilon\}$.)

Definice (úplný metrický prostor, kompaktní metrický prostor, totálně omezený metrický prostor):

Metrický prostor (X, d) se nazývá *úplný* (complete), jestliže každá cauchyovská posloupnost v X je konvergentní (rozumí se *konvergentní v tom prostoru X*).

Metrický prostor se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků toho prostoru lze vybrat posloupnost v tom prostoru konvergentní.

Metrický prostor se nazývá *totálně omezený* (někdy též nazývaný prekompaktní), jestliže z každé posloupnosti prvků toho prostoru lze vybrat posloupnost cauchyovskou.



Obrázek 1.2.: Ježek.

Příklady:

1. Prostor R reálných čísel s obvyklou metrikou $d(x, y) = |x - y|$ je prostor úplný (Bolzano – Cauchy podmínka). Tento prostor ovšem *není* kompaktní. (Z posloupnosti $x_n = n$ nelze vybrat posloupnost v R konvergentní.)
2. Interval $\langle 0, 1\rangle$ je kompaktní prostor. Rovněž $\langle 0, 1\rangle^n$ je kompaktní prostor. (Podrobný důkaz podáme později.)
3. Prostor $\langle 0, 1)$ není kompaktní (posloupnost $x_n = \dfrac{1}{n}$ je v $\langle 0, 1)$, ale není tam konvergentní), ale je totálně omezený.

Ukážeme si, že kompaktní prostory mají řadu užitečných vlastností. Uvidíme například, že v R^n je množina (chápaná jako metrický podprostor) kompaktní právě když je uzavřená a omezená. Také nahlédneme, že kompaktní $\Longleftrightarrow$ úplný + totálně omezený.

Příklady (některé jednoduché konstrukce s metrickými prostory):

1. Zajímavý příklad je tzv. ježek (viz obráze 1.2): Interval $\langle 0, 1\rangle$ vezmeme nekonečněkrát a pak "slepíme" tyto invervaly v bodě 0. Vzniklý metrický prostor, zvaný zlidověle ježek, je úplný metrický prostor (není ovšem kompaktní).

   Metrika d na ježku: $d(x, y)$ = obyčejná vzdálenost na $\langle 0, 1\rangle$, pokud x, y jsou body na jedné "bodlině", jinak
   $$d(x, y) = d(x, 0) + d(y, 0) \ .$$
   Můžeme uvažovat i ježka s jinou metrikou, například tzv. "ruského ježka": Množinově je stejný s předchozím, je ale uvažována jiná metrika: $d(x, y) =$

$d(x,0) + d(y,0)$ pro všechny body x, y (tj. i na stejné bodlině musíme měřit vzdálenost "přes" 0; ovšem $d(x,y) = 0$ pokud $x = y$). Název, pracovně používaný (zejména ruskými) topology, je odvozen od způsobu cestování v bývalém SSSR: Možnost stěhování musí být potvrzena "bumážkou" v Moskvě ...

2. Buď X množina všech železničních stanic a $d(x,y)$ cena jízdenky z místa x do místa y. Dostaneme (konečný) metrický prostor.

3. Nechť $X \subset R^2$, $X = \{(m,n) |\ m,n \text{ jsou celá čísla}\}$. Pro $A, B \in X$ definujeme $d(A,B)$ jako minimální délku "řetízku" v X spojujícího A s B. Pak $d(A,B)$ je metrika.

4. Není nezajímavé si povšimnout, že pokud R chápeme jako metrický prostor (s obvyklou metrikou), dostáváme automaticky, že R je nespočetná. Kdybychom totiž předpokládali, že $R = (r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots)$ je posloupnost a kolem každého bodu r_i udělali okolí o poloměru $\frac{1}{2^i}$, dostali bychom ve výsledku, že "délka" R je konečná (uvažte i přesnou formulaci tohoto výsledku).

Dále budeme dvojice v zápisu (X,d), (M,d), (Y,q), atd. automaticky chápat jako metrické prostory. Uveďme některé důležité výsledky z teorie metrických prostorů. Připomeňme, že v metrickém prostoru (M,d) se posloupnost x_n $(n \in N)$ nazývá *metricky diskrétní*, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, $\forall i, j, i \neq j$. Posloupnost, která je metricky diskrétní pro jisté ε, se nazývá *metricky diskrétní řádu* ε.

Věta (posloupnostní princip v metrických prostorech): Z každé nekonečné posloupnosti v metrickém prostoru lze vybrat buď nekonečnou posloupnost cauchyovskou, nebo nekonečnou posloupnost metriky diskrétní ("nebo" je zde užito v nevylučovacím smyslu).

Důkaz: Vezměme jednotkovou kouli (v metrice d) kolem každého bodu x_n, tj. uvažujme množiny $O(x_n, 1) = \{y \in M \mid d(x_n, y) < 1\}$. Pokud každá z těchto množin obsahuje jen konečně mnoho bodů, lehce najdeme (nekonečnou) metricky diskrétní posloupnost řádu 1. Pokud ne, máme okolí $O(x_p, 1)$, které obsahuje nekonečně mnoho bodů z posloupnosti x_n. Označme tyto body y_n $(n \in N)$ a utvořme soustavu všech $\frac{1}{2}$-koulí v metrice d kolem y_n, tj. uvažujme množiny $O(y_n, \frac{1}{2})$. Jestliže každá z těchto množin obsahuje jen konečně mnoho bodů z posloupnosti y_n, pak lehce najdeme (nekonečnou) metricky diskrétní posloupnost řádu $\frac{1}{2}$. Jestliže ne, pokračujeme dál stejně pro $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, atd.

Je zřejmé, že buď pro nějaké $\frac{1}{n}$ dostaneme posloupnost $\frac{1}{n}$-diskrétní, anebo nám zmenšující se koule obsahující pořád nekonečně mnoho bodů lehce umožní najít cauchyovskou podposloupnost. **QED.**

Tvrzení: Metrický prostor (M, d) je totálně omezený $\iff$ každá metricky diskrétní posloupnost v M je konečná.

Důkaz: Ihned plyne z předchozí věty – pokud se z posloupnosti nedá vybrat cauchyovská, dá se vybrat metricky diskrétní. **QED.**

Všimeme si, že totálně omezený prostor nemůže být "příliš velký". Vyjádřeno formálně, každý totálně omezený metrický prostor M je tzv. *separabilní*, tj. lze najít spočetnou podmnožinu S v M takovou, že uzávěr $\bar{S}$ množiny S je roven celému M ($\bar{S} = M$, kde $\bar{S} = \{x \in M \,\|\, \forall \epsilon > 0,\ o(x, \epsilon) \cap S = \emptyset\} = \{x \in M \mid d(x, S) = 0\}$; říkáme, že S *je hustá* v M).

Požadopvaná množina S se sestrojí snadno: Pro každé $n \in N$ buď S_n maximální $\frac{1}{n}$-diskrétní podmnožina v M. Jelikož M je totálně omezený, musí být každé S_n konečné. Nyní stačí položit $S = \cup_{n \in N} S_n$. Je zřejmé, že S je hustá v M.

Věta: Metrický prostor(M, d) je kompaktní $\iff$ úplný a totálně omezený.

Důkaz: Pokud je M kompaktní, pak je zřejmě úplný i totálně omezený (z metricky diskrétní posloupnosti nelze samozřejmě vybrat konvergentní). Předpokládejme naopak, že M je úplný a totálně omezený. Mějme dánu posloupnost x_n $(n \in N)$. Jelikož M je totálně omezený, nedá se z ní vybrat posloupnost metricky diskrétní. Pak se z ní musí podle posloupnostního principu dát vybrat posloupnost cauchyovská. Jelikož M je úplný, musí tato posloupnost konvergovat. Vidíme, že z každé posloupnosti v M se dá vybrat posloupnost konvergentní. **QED.**

Následující věta představuje jeden z nejdůležitějších "principů" moderní matematiky. Připomeňme, že zobrazení $f\colon M \to K$ mezi dvěma metrickými prostory se nazývá *spojité*, jestliže $x_n \to x$ v M implikuje $f(x_n) \to f(x)$ v K.

Věta: Nechť $f\colon M \to R$ je spojitá funkce na kompaktním metrickém prostoru M. Pak f nabývá svého maxima (resp. minima) v nějakém bodě z M.

Důkaz: Dokažme to pro maximum (důkaz pro minimum obdržíme přechodem k funkci $-f$). Techniku už známe: Nejprve ukážeme, že f je omezená. Je-li totiž $f(x_n) \geq n$ pro nějakou posloupnost $x_n \in M$, pak vybereme podposloupnost x_{n_k}, která konverguje. Tedy $x_{n_k} \to x$ a tudíž (f je spojitá) $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Ale pak $f(x) = +\infty$, což je spor.

Pokud tedy f je omezená, existuje $\sup\limits_{x \in M} f$. Máme tudíž posloupnost y_n takovou, že $\sup f = \lim f(y_n)$. Ale M je kompaktní, takže y_n má konvergentní podposloupnost, řekněme nějakou posloupnost y_{n_k}. Nechť $y_{n_k} \to y$. Pak nutně $\sup\limits_{x \in M} f = f(y)$. **QED.**

Nyní budeme formulovat důležitou větu, která charakterizuje kompaktní podmnožiny v R^n (později ukážeme ještě i jiný způsob). Použijeme přitom známou Weierstrassovu větu, která říká, že z každé omezené posloupnosti v R^n se dá vybrat posloupnost konvergentní (důkaz Weierstrassovy věty v R^2, který lze nalézt ve skriptu P. Pták, Calculus II; v R^n se důkaz provede stejně). Připomeňme, že množina S v R^n se nazývá *omezená*, jestliže $S \subset < a, b >^n$ pro nějaké $a, b \in R$.

Věta: $M \subset R^n$ je kompaktní (jakožto metrický prostor s metrikou získanou zúžením Eukleidovské metriky z R^n) $\iff$ M je množina uzavřená v R^n a omezená v R^n.

Důkaz: Víme už, že prostor je kompaktní $\iff$ je úplný a totálně omezený. M je úplný, protože (dokažte!) každý uzavřený podprostor úplného prostoru je úplný (R^n je úplný prostor jak plyne z klasické Weierstrassovy věty – každá cauchyovská posloupnost v R^n je omezená množina). Zbývá ukázat, že v R^n je každá omezená množina totálně omezená. To také ihned plyne z Weierstrassovy věty, ježto z každé omezené posloupnosti lze vybrat cauchyovskou. **QED.**

Další důležitou vlastností kompaktních metrických prostorů je to, že spojité funkce na nich jsou automaticky stejnoměrně spojité.

Věta: Nechť (M, d) je kompaktní metrický prostor a nechť $f \colon M \to R$ je spojitá funkce na M. Pak f je stejnoměrně spojitá, tj. pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ tak, že pokud $d(x, y) < \delta, x, y \in M$, pak $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Důkaz: Nechť f není stejnoměrně spojitá. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $n \in N$ lze najít body $x_n, y_n \in M$ s vlastností $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Vezměme posloupnost (x_n) v M. Jelikož M je kompaktní, pak se dá najít podposloupnost x_{n_k}, která v M konverguje. Nechť tedy $x_{n_k} \to x \in M$. Ale funkce f je v bodě x spojitá. Tedy vezmeme-li $\dfrac{\varepsilon}{2}$, můžeme najít n_0 tak, že pokud $d(x, y) < \dfrac{1}{n_0}$, pak $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Vezměme nyní m tak velké, aby $m \geq 2n_0$ a aby platilo $d(x, x_m) < \frac{1}{m}$. Máme ovšem i $d(x_m, y_m) < \frac{1}{m}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $d(x, y_m) < \dfrac{1}{n_0}$, ale $|f(x_m) - f(y_m)| \geq \varepsilon$ a tedy $|f(x) - f(y_m)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$. To je spor. **QED.**

V nekonečnědimenzionálních prostorech není tak snadné charakterizovat kompaktnost podprostorů (viz Ascoliho věty, dokazovaná později). Omezenost a uzavřenost nestačí jak ukazuje následující věta.

Věta: Nechť $(L, \|.\|)$ je normovaný prostor. Pak $\dim L < +\infty$ právě když uzavřená jednotková koule v L (tj. množina $\{x \in L \mid \|x\| \leq 1\}$) je kompaktní.

Důkaz: Pokud $\dim L < +\infty$, pak L je samozřejmě ekvivalentní (ve smyslu lineárním i ve smyslu ekvivalence norem) Euklidovskému prostoru R^n. Jak jsme ukázali, uzavřená jednotková koule je zde kompaktní.

Důkaz druhé implikace je složitější. Nechť $\dim L = \infty$. Dokažme si nejprve následující pomocné tvrzení (v trochu obecnější formě, než budeme potřebovat): Nechť Q je vlastní uzavřený lineární podprostor L. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak lze najít $y \in L, \|y\| = 1$ tak, že pro všechna $x \in Q$ platí $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$. Dokazujme toto pomocné tvrzení. Buď $y_0 \in L - Q$. Položme $d = \inf_{x \in Q} \|x - y_0\|$. Pak $d > 0$, neboť Q je uzavřený. Předpokládejme, že je dáno $\varepsilon > 0$. Podle definice infima pak platí, že existuje $x_0 \in Q$ s vlastností $d \leq \|x_0 - y_0\| < d + d\varepsilon$. Nechť $y = \dfrac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Pak $y \notin Q$ a $\|y\| = 1$. Navíc platí

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|\frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - x\| = \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\|(x_0 - x\|x_0 - y_0\| - y_0)\| \\
&> \frac{1}{d + d\varepsilon}\|(x_0 - x\|x_0 - y_0\| - y_0)\| \\
&\geq \frac{d}{d + d\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali pomocné tvrzení. Pomocí něho (při volbě $\varepsilon = \frac{1}{2}$) už snadno ukončíme důkaz. Stačí ukázat, že jednotková koule v L není totálně omezená. Za tím účelem najdeme v L nekonečnou metricky diskretní posloupnost v jednotkové kouli. Vezměme libovolně $x_1 \in L$ tak, že $\|x_1\| = 1$. Uvažujme lineární obal $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x}_1\}$, což je vlastní uzavřený podprostor v L. Podle předchozího pomocného tvrzení lze najít vektor $x_2 \in L \setminus \mathrm{Span}\,\{\mathrm{x}_1\}$ takový, že $\|x_2\| = 1$ a $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Uvažujme teď $\mathrm{Span}\,\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$. To je vlastní uzavřený podprostor v L. Tedy lze najít $x_3 \in L \setminus \mathrm{Span}\,\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$ takový, že $\|x_3\| = 1$ a $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}, \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Takto postupujeme dále a zkonstruujeme $\frac{1}{2}$-diskretní posloupnost v jednotkové kouli $\{x \mid \|x\| \leq 1\}$. Pak tedy jednotková koule nemůže být kompaktní a důkaz je proveden.

QED.

1.3. Ascoli

V tomto odstavci dokážeme jeden z velmi důležitých výsledků (aplikované) funkcionální analýzy. Nejprve odvodíme pomocné tvrzení.

Tvrzení: Metrický prostor (M, d) je totálně omezený $\Leftrightarrow$ z každého pokrytí prostoru M všemi otevřenými ε-koulemi lze vybrat pokrytí konečné.

Důkaz: Nechť $o(m, \varepsilon) = \{x \in M \mid d(x, m) < \varepsilon\}$ a nechť $P = \{o(m, \varepsilon) \mid m \in M\}$. Pokud z P nelze vybrat konečnou množinu, která pokrývá M, pak snadno zkonstruujeme ε-diskrétní posloupnost v M. To ale není možné, neboť (M, d) je totálně omezený. Naopak, nechť je dána posloupnost $p_n \in M$. Pokud z ní nelze vybrat posloupnost Cauchyovskou, dá se z ní vybrat posloupnost ε-diskrétní (posloupnostní princip). Pak ale z pokrytí $\frac{\varepsilon}{2}$-koulemi nelze vybrat pokrytí konečné a důkaz je hotov. **QED.**

Věta (Ascoli): Nechť X je kompaktní prostor a nechť $C(X)$ je prostor spojitých funkcí na X s metrikou stejnoměrné konvergence $(d(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|$. Nechť $P \subset C(X)$ je bodově omezená a "stejně" spojitá soustava funkcí, tj. nechť

(i) $\sup\{|f(x)|; f \in P\} < +\infty$ pro každé $x \in X$,

(ii) jestliže $\varepsilon > 0$, pak každé $x \in X$ má takové okolí V_x, že platí $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pro všechny funkce $f \in P$ a všechna $y \in V_x$.

Pak P je totálně omezený metrický prostor (P chápáno jako metrický podprostor $C(X)$).

Poznámka: Někdy se říká, že P je totálně omezená v $C(X)$. Jelikož $C(X)$ je úplný metrický prostor, uzávěr P v $C(X)$ je prostor kompaktní a tudíž každá posloupnost v P obsahuje konvergentní podposloupnost (s limitou v $C(X)$). Takto bývá někdy Ascoliho věta formulována. – Podmínky (i), (ii) jsou ovšem nejen postačující, ale i nutné; Ascoliho věta tedy charakterizuje totální omezenost v $C(X)$.

Důkaz: Předpokládejme, že je dáno ε, $\varepsilon > 0$. Jelikož X je kompaktní prostor a okolí V_x $(x \in X)$ představují otevřené pokrytí prostoru X, lze z tohoto pokrytí vybrat pokrytí konečné. Tudíž existuje konečně mnoho okolí $V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}$ takových, že $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Přitom $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ pro každé $f \in P$ a každé $x \in V_{x_i}$ $(1 \leq i \leq n)$. Z podmínky (i) aplikované na body x_i $(1 \leq i \leq n)$ plyne, že P je *stejnoměrně* omezená: $\sup\{|f(x)| x \in X, f \in P\} = M < +\infty$. Položme $K = \{\lambda \in C \mid |\lambda| \leq M\}$ a uvažujme součin K^n jako metrický podprostor R^n. Uvažujme zobrazení $p \colon P \to K^n$ dané předpisem $p(f) = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$.

Jelikož K^n je totálně omezená, lze ji pokrýt konečně mnoha množinami s diametrem menším než ε. Tedy existuje konečně mnoho funkcí $f_1, f_2, \ldots, f_m$ tak, že $p(f)$ je blízko "řádu ε" nějakého $p(f_n)$.

Nyní se už důkaz snadno ukončí. Nechť $f \in P$. Pak existuje k $(1 \leq k \leq m)$ takové, že $|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon$ pro všechna x_i $(1 \leq i \leq n)$. Jelikož každé $x \in X$ leží v nějakém V_{x_i}, pro toto i $(1 \leq i \leq n)$ máme $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ a také $|f_k(x) - f_k(x_i)| < \varepsilon$. Jednoduchou aplikací trojúhelníkové nerovnosti pak dostáváme $|f(x) - f_k(x)| < 3\varepsilon$ pro každé $x \in X$. Jelikož ε bylo libovolné, P je totálně omezená a důkaz je hotov. **QED.**

Uveďme jednu velmi důležitou aplikaci Ascoliho–Arzelovy věty. Připomeňme, že zobrazení $f\colon M \to K$ mezi dvěma metrickými prostory se nazývá *totálně omezené*, jestliže pro každou (metricky) omezenou množinu $L \subset M$ je $f(L)$ totálně omezená. Je zřejmé, že každé lineární zobrazení $f\colon R^n \to R^m$ je totálně omezené (pro $R^m, m \in N$, ovšem omezené a totálně omezené množiny splývají), ale hlavní aplikace nalézáme pro některé operátory v nekonečně dimenzionálních prostorech. Zde je situace složitější, např. identické zobrazení z nekonečnědimenzionálního prostoru do sebe není *nikdy* totálně omezené (neboť jednotková koule tam nikdy není totálně omezená, jak jsme již ukázali).

Věta: Nechť $C\langle 0,1\rangle$ je (Banachův) prostor spojitých funkcí na $\langle 0,1\rangle$ opatřený sup normou. Nechť $F\colon C\langle 0,1\rangle \to C\langle 0,1\rangle$ je zobrazení definované takto:

$$F(f)(s) = y(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt,$$

kde $K(s,t)$ je funkce spojitá v $\langle 0,1\rangle^2$. Pak F je totálně omezené zobrazení.

Důkaz: Nechť $L \subset C\langle 0,1\rangle$ je omezená množina v $C\langle 0,1\rangle$, tj. nechť existuje konstanta $R > 0$ taková, že pro každé $f \in L$ platí $\|f\| \le R$. Podle Ascoliho věty máme ověřit, že množina $F(L)$ je stejně omezená a stejně spojitá. Funkce z množiny $F(L)$ jsou stejně omezené:

$$\|y(s)\| = \|F(f)\| = |\int_0^1 K(s,t)f(t)dt| \le \int_0^1 |K(s,t)||x(t)|dt \le R \cdot \max_{(s,t)\in\langle 0,1\rangle^2} |K(s,t)|.$$

Funkce z množiny $F(L)$ jsou stejně spojité: Nechť $\varepsilon > 0$. Z kompaktnosti $\langle 0,1\rangle^2$ a spojitosti $K(s,t)$ plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $s', s'' \in \langle 0,1\rangle$, $|s' - s''| < \delta$ a pro všechna $t \in \langle 0,1\rangle$ platí $|K(s',t) - K(s'',t)| < \dfrac{\varepsilon}{R}$. Z toho dostáváme, že $|y(s') - t(s'')| \le \int_0^1 |K(s',t) - K(s'',t)||f(t)|dt \le \dfrac{\varepsilon}{R}\|f\| \le \varepsilon$ a tedy funkce $y \in F(L)$ jsou stejně spojité. Podle Ascoliho věty je $F(L)$ totálně omezená množina v $C\langle 0,1\rangle$.

QED.

1.4. Pojem souvislosti (křivkové souvislosti) v metrických prostorech

Pojem souvislosti byl studován od začátku teorie metrických prostorů. Objevila se otázka, jak rigorózně vyjádřit okolnost, že prostor "nemá díry". V aplikacích se jako nejdůležitější ukázal následující pojem souvislosti a v některých situacích i pojem "křivkové souvislosti", který zavedeme později.

Definice (souvislost): Nechť (X, d) je metrický prostor. Nazveme jej *nesouvislý* (disconnected), pokud lze najít dvě disjunktní otevřené a neprázdné podmnožiny U, V množiny X takové, že $X = U \cup V$. Prostor X nazveme souvislý (connected), jestliže není nesouvislý.

Všimněme si, že množiny U a V ve výše uvedené definici musejí být také uzavřené v X ($U = X \setminus V$, kde V je otevřená v X). Je-li Y podprostor X, a zkoumáme-li jeho souvislost, pak samozřejmě Y chápeme jako prostor s metrikou zděděnou z X.

Příklad: Nechť $P = \langle\, 0, 2\,) \cup (\, 2, 4 \rangle$ je metrický prostor s obvyklou metrikou na R (tedy P je chápán jako podprostor R). Pak P je nesouvislý. Skutečně, $\langle 0, 2)$ i $(2, 4\rangle$ jsou množiny otevřené v P.

Příklad: Nechť X je množina a d je diskrétní metrika na X (tj. $d(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \neq y$, $d(x, y) = 0$ jinak). Pak jediné souvislé podoprostory X jsou jednobodové množiny (stačí uvážit, že jednobodové množiny jsou otevřené v X). Takové prostory se nazývají *totálně nesouvislé* a kupodivu mají značnou důležitost v analýze i jinde (prominentní příklad totálně nesouvislého prostoru je známé Cantorovo discontinuum, zavedené zde v souvislosti s teorií fraktálů).

Příklad: Nechť Q značí protor všech racionálních čísel (opět samozřejmě chápán s metrikou vzatou z R). Pak Q je nesouvislý. Skutečně, můžeme psát $Q = \big((-\infty, \sqrt{2}) \cap Q\big) \cup \big((\sqrt{2}, +\infty) \cap Q\big)$. Dá se ukázat, že Q je dokonce totálně nesouvislá.

Následující věta, která může znít téměř samozřejmě, je parafrází “věty o supremu” (každá shora omezená množina v R má supremum) a představuje základní stavební kámen matematické analýzy v reálném oboru.

Věta: Uzavřený interval $\langle\, 0, 1 \rangle$ je souvislý.

Důkaz: Předpokládejme opak. Pak $\langle\, 0, 1 \rangle = U \cup V$ v duchu definice nesouvislosti. Nechť $u \in U$ a $v \in V$ a přitom $u < v$ (to lze předpokládat bez újmy na obecnosti, jinak bychom přejmenovali U a V). Ježto U, V jsou otevřené v $\langle 0, 1 \rangle$, musí být tvaru sjednocení intervalů, které jsou otevřené či které jsou tvaru $\langle 0, a)$ či $(b, 1\rangle$ – to plyne z toho, že každá otevřená množina v $\langle 0, 1 \rangle$ musí být průnikem nějaké otevřené množiny v R s $\langle 0, 1 \rangle$. Definujme nyní množinu S, $S \subset \langle 0, 1 \rangle$ následujícím předpisem:

$$S = \{x \,|\, u < x \text{ a } \langle u, x \rangle \subset U\}$$

Nechť m je supremum množiny S. Pak $u < m \leq 1$ a buď $m \in U$ nebo $m \in V$. Nyní oba tyto případy dovedeme ke sporu. Nechť $m \in U$. Pak existuje ϵ, $\epsilon > 0$ takové, že platí $\langle m - \epsilon, m + \epsilon \rangle \subset U$. Vezměme ϵ tak malé, že $u < m - \epsilon$ (to je možné, neboť

$u < m$). Jelikož $\langle u, m-\epsilon\rangle \subset U$, neboť $m = \sup S$, vidíme, že $\langle m, m+\epsilon\rangle \subset U$. Tudíž dostáváme, že $m+\epsilon \in S$. To je ve sporu s tím, že $m = \sup S$. Předpokládejme tedy naopak, že $m \in V$. Jelikož V je otevřená množina v $\langle 0,1\rangle$, dostáváme pro vhodné δ, $\delta > 0$ inkluzi $\langle m-\delta, m+\delta\rangle \subset V$. Tedy $m-\epsilon \notin U$ a tudíž $m \notin U$. Ale to je ve sporu s tím, že $m = \sup S$. **QED.**

Teď ukážeme, že další známé prostory jsou také (ve smyslu naší definice) souvislé. Při konvenci, že pokud je X nesouvislý v důsledku existence otevřených množin U, V takových, že $X = U \cup V$, budeme říkat, že U, V rozkládají X.

Tvrzení: Nechť X je nesouvislý a U, V rozkládají X. Nechť A je souvislý podprostor X. Pak buď $A \subset U$ nebo $A \subset V$.

Důkaz je zřejmý (kdyby ne, psali bychom $A = (A\cap U) \cup (A \cap V)$).

Následující jednoduché tvrzení lze aplikovat při mnoha důkazech souvislosti prostoru.

Tvrzení: Nechť X je sjednocením souvislých prostorů a nechť všechny tyto prostory mají společný bod. Pak X je také souvislý.

Důkaz: Nechť $X = \cup_{\lambda\in I} A_\lambda$. Nechť $x \in \cap_{\lambda \in I} A_\lambda$. Předpokládejme, že X není souvislý. Nechť tedy $X = U \cup V$, kde U, V rozkládají X. Podle předchozího tvrzení pak pro každé $\lambda \in I$ máme buď $A_\lambda \in U$ nebo $A_\lambda \in V$. Jestliže tedy platí $A_{\lambda_0} \subset U$ pro nějaké λ_0, $\lambda_0 \in I$, pak $x \in U$, a tudíž $A_\lambda \subset U$ pro *každé* $\lambda \in I$. Takže $X = \cup_{\lambda\in I} A_\lambda$ musí být podmnožinou U. To je ale nemožné, neboť U, V rozkládá X. Podobný spor dostáváme, pokud $A_{\lambda_0} \subset V$ pro nějaké $\lambda_0 \in I$ a důkaz je hotov. **QED.**

Důsledek:

1. Prostor R reálných čísel je souvislý (můžeme psát $R = \cup_{n\in N}\langle -n, n\rangle$).
2. Prostor R^n je souvislý pro každé $n \in N$. Skutečně, R^n lze chápat jako sjednocení všech přímek jdoucích počátkem.
3. "Ježek" je souvislý prostor (lze ho chápat jako sjednocení úseček s jedním společným bodem).
4. Jako cvičení lze nahlédnout následující tvrzení: Jediné souvislé podprostory v R jsou celé R a všechny intervaly v R.

Velmi důležitou vlastností souvislosti je to, že je zachovávána spojitými zobrazeními.

Věta: Spojitý obraz souvislého prostoru je souvislý prostor.

Důkaz: Nechť $f\colon X \to Y$ je spojité zobrazení metrického prostoru X na metrický prostor Y. Předpokládejme, že X je souvislý a Y není. Nechť U, V rozkládají Y. Pak $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. Zde užíváme obvyklé značení: $f^{-1}(Y) = \{y \,|\, f(y) \in Y\}$. Přitom $f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(V)$ jsou otevřené v X (dokažte!) a rozkládají X. Tedy X není souvislý a to je spor. **QED.**

Příklad: Sféra S_n koule v R^n je souvislá. Skutečně, při zobrazení $s(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2} = \frac{\vec{x}}{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ je S_n spojitým obrazem (souvislého) prostoru $R^n \setminus \{\vec{o}\}$.

Následující výsledek je základním instrumentem při budování teorie reálných funkcí.

Věta (věta o střední hodnotě, "Darboux property"): Nechť $f\colon X \to R$ je spojitá funkce ze souvislého metrického prostoru X. Nechť $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$ jsou nějaké prvky $a, b \in X$. Pak existuje $c \in X$ takové, že $f(c) = 0$. Důsledek: Každá reálná spojitá funkce nabývá při $f(a) \leq f(b)$ všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Důkaz: Obraz $f(X)$ je spojitý podprostor R a tudíž musí být interval. Ten ale obsahuje $f(a)$ i $f(b)$ a tedy musí obsahovat i 0. Tedy $f(c) = 0$ pro nějaké $c \in X$. **QED.**

Následující definice uvádí pojem největšího souvislého podprostoru v nějakém prostoru.

Definice: Nechť X je metrický prostor. Jeho maximální souvislý podprostor se nazývá *komponenta* X. Jinými slovy, Y je komponenta X, pokud je Y souvislý podprostor a jestliže Z je souvislý podprostor X takový, že $Y \subset Z$, pak $Z = Y$.

Tvrzení: Každý bod $x \in X$ leží v přesně jedné komponentě. Dále, je-li $f\colon X \to Y$ spojité zobrazení, pak každá komponenta X se zobrazuje do komponenty Y.

Důkaz je zřejmý.

Příklad: Vyjmeme-li z roviny x-ovou osu, vzniklý prostor má dvě komponenty, horní a dolní polorovinu. Vyjmeme-li z roviny jednotkovou kružnici, vzniklý prostor má dvě komponenty, vnitřek kruhu (omezená komponenta) a vnějšek kruhu (neomezená komponenta).

Naší snahou bude teď ukázat, že komponenty jsou uzavřené. Následující tvrzení je zřejmé.

Tvrzení: Výroky 1), 2), 3) jsou ekvivalentní

1. X je souvislý.
2. X není disjunktním sjednocením dvou neprázdných uzavřených množin.
3. Jediné podprostory X, které jsou jak uzavřené tak i otevřené ("clopen"), jsou X a $\emptyset$.

Tvrzení: Podprostory U, V rozkládají X právě když $U \cup \bar{V} = \emptyset = \bar{U} \cup V$ ($\bar{U}$ značí uzávěr U v X, tj. $\bar{U} = \{x \in X \,|\, d(x, U) = 0\} = \{x \in X \,|\, \text{pro každé } \epsilon > 0 \text{ platí, že } \{y \in X \,|\, d(x,y) < \epsilon\} \cup U \neq \emptyset\}$).

Opět jednoduché cvičení.

Tvrzení: Nechť A je souvislý podprostor v X. Nechť pro Y platí $A \subset Y \subset \bar{A}$. Pak Y je souvislý. Důsledek: Je-li A souvislý, je i $\bar{A}$ souvislý.

Důkaz: Předpokládejme, že A je souvislý a uvažujme inkluzi $A \subset Y \subset \bar{A}$. Předpokládejme, že Y je nesouvislý a pokusme se odvodit spor. Předpokládejme, že S, T rozkládá Y, tj. $Y = S \cup T$ pro dva disjunktní otevřené a neprázdné podprostory S, T. Jelikož A je souvislá, platí buď $A \subset S$ nebo $A \subset T$. Pokud $A \subset T$, pak $T \subset Y \subset \bar{A} \subset \bar{S}$ a to je ve sporu s tím, že $T \cap \bar{S} = \emptyset$. Případ $A \subset T$ se uvažuje podobně. Tím jsme ukázali, že Y je souvislý prostor. **QED.**

Věta (o uzavřenosti komponent): Nechť X je metrický prostor. Pak každá jeho komponenta je uzavřený podprostor v X.

Důkaz: Nechť A je komponenta v X. Pak $\bar{A}$ je také souvislý prostor, ale jelikož A je maximální, platí $A = \bar{A}$. To znamená, že A je uzavřený podprostor prostoru X. **QED.**

Dalším důležitým pojmeme při studiu "intuitivní souvislosti" je pojem *křivkové souvislosti* (path-connectedness). Tento pojem je důležitý v aplikacích. Jelikož (jak se ukazuje) je trochu silnější než pojem souvislosti a někdy se dobře ověřuje, může někdy pomoci i při důkazu souvislosti daného prostoru.

Definice (křivková souvislost): Nechť X je metrický prostor a nechť $a, b \in X$.

Křivkou v X spojující body a, b nazveme obraz spojité funkce $f\colon \langle 0,1\rangle \to X$ takové, že $f(0)=a$ a $f(1)=b$. Prostor X se nazývá *křivkově souvislý*, jestliže pro každé dva body $a,b \in X$ lze najít křivku v X, která je spojujue.

Uvědomíme si opět, že pokud A je podprostor X, pak obratem "A je křivkově souvislý" míníme to, že A je křivkově souvislý při chápání A jako nového prostoru (podprostoru X).

Věta: Každý křivkově souvislý prostor je souvislý.

Důkaz: Předpokládejme, že X je křivkově souvislý. Ve snaze o získání sporu předpokládejme, že U,V rozkládají X. Vezměme bod $a \in U$ a bod $b \in V$ a spojme je křivkou $f\colon \langle 0,1\rangle \to X$, $f(0)=1$ a $f(1)=b$. Pak množiny $S = U \cap \langle 0,1\rangle$, $T = V \cap \langle 0,1\rangle$ rozkládají $f(\langle 0,1\rangle)$, ale $f(\langle 0,1\rangle)$ je souvislá množina. Tím máme spor a důkaz je hotov.
QED.

Následující klasická konstrukce posílila intuici generací matematiků a nalezla uplatnění i v jiných oborech, např. v geometrii či počítačové grafice.

Tvrzení: Existuje podprostor v R^2 , který je souvislý, ale není křivkově souvislý.

Důkaz (Konstrukce): Uvažujme funkci $f\colon R \to R$ definovanou takto:

$$f(x) = 0 \text{ pro } x \le 0,$$

$$f(x) = \sin(\tfrac{1}{x}) \text{ pro } x > 0.$$

Nechť X je graf této funkce, tj. $X = \{(x, f(x)) \,|\, x \in R\}$. Budeme dokazovat, že X je souvislý, ale není křivkově souvislý.

X je souvislý. Položme $X_1 = \{(x, f(x)) \,|\, x \le 0\}$ a $X_2 = \{(x, f(x)) \,|\, x > 0\}$. Je zřejmé, že $X = X_1 \cup X_2$ a také je zřejmé, že X_1 i X_2 jsou souvislé. Není hned vidět, že také $X_1 \cup X_2$ je také souvislý, neboť $(0,0) \notin X_2$. Ale $(0,0) \in \bar{X}_2$ ($\bar{X}_2$ je jako obvykle uzávěr X_2 v X)! Skutečně je vidět, že každé okolí bodu $(0,0)$ proniká X_2 (stačí ověřit pro okolí typu $B(0,\epsilon) = \{(x_1,x_2) \,|\, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \epsilon\}$). Tedy $X_2 \cup \{(0,0)\} \subset \bar{X}_2$ a tudíž $X_2 \cup \{(0,0)\}$ je souvislý prostor. Pak můžeme psát $X = X_1 \cup (X_2 \cup \{(0,0)\})$, což je sjednocením dvou souvislých prostorů se společným bodem. Odtud plyne, že X je souvislý.

X není křivkově souvislý. Dokažme to sporem. Nechť X je křivkově souvislý. Nechť $f\colon \langle 0,1\rangle \to X$ je křivka spojující bod $(0,0)$ s bodem $(1, \sin(1))$. Pak $f(\langle 0,1\rangle)$ je kompakt (jakožto obraz kompaktu). Vezměme posloupnost $x_n = \frac{2}{(2\,n+1)\,\pi}$ a uvažujme posloupnost $\Big(x_n, \sin(\frac{1}{x_n})\Big)$. Pak $\Big(x_n, \sin(\frac{1}{x_n})\Big) \subset f(\langle 0,1\rangle)$ a přitom $x_n \to 0, \sin(\frac{1}{x_n}) =$

1. Tudíž $\lim_{n\to\infty}\left(x_n, \sin\frac{1}{x_n}\right) = (0,1)$. Ale tento bod neleží v X, a tedy ani neleží v $f(\langle 0,1\rangle)$. To je spor s kompaktností $f(\langle 0,1\rangle)$. **QED.**

1.5. Věta o pevném bodě pro kontrahující zobrazení v úplném metrickém prostoru

Nyní zformulujeme a dokážeme slavnou Banachovu větu o pevném bodě. Znak $\exists!$ je matematická konvence používaná namísto “existuje přesně jeden”.

Věta (Banachova věta o pevném bodě): Nechť (X,d) je úplný metrický prostor a nechť $f\colon (X,d) \to (X,d)$ je *kontrahující zobrazení* (tj. nechť $\exists K, 0 < K < 1$ tak, že $d(f(x), f(y) < K \cdot d(x,y))$. Pak f má přesně jeden pevný bod, tj.

$$\exists!\, x \in X \text{ tak, že } f(x) = x.$$

Důkaz (náznak, detaily si doplní čtenář snadno sám): Vezměme *libovolný* bod $x_0 \in X$ a utvořme posloupnost $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f^2(x_0), \ldots$, etc. Pak posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská v M neboť

$$d(x_m, x_n) \leq K^n \cdot d(x_1, x_n) \text{ pro } n \geq m.$$

Jelikož M je úplný, platí $x_n \to x$. Pak ale nutně $f(x) = x$. Jednoznačnost tohoto pevného bodu je zřejmá (nicméně dokažte přesně!). **QED.**

Výše uvedená věta je stejně jednoduchá jako geniální. Důkaz má navíc konstruktivní charakter a vlastně také udává přesnost aproximace pevného bodu. Dá se totiž snadno ukázat (proveďte!), že při začátku procedury v bodě x_0 platí následující vztahy určující dosaženou přesnost v n-tém kroku aproximace:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq \tfrac{K}{1-K}\, d(x_{n-1}, x_n), \\ d(x_n, x) &\leq \tfrac{K^n}{1-K}\, d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Možnosti aplikace věty o pevném bodě se ukázaly být značné. Některé jsou již tak “folkloristické”, že si je ani neuvědomujeme (například přibližné metody řešení soustav lineárních rovnic jako Jacobiho metoda či Gaussova–Seidelova metoda mají teoretický základ ve větě o pevném bodě). Naznačme dvě další typické aplikace, třetí (konstrukci fraktálu) věnujeme speciální sekci.

Příklad: Řešme přibližně rovnici $x^3 + 2x - 1 = 0$. Řešení: Pišme $g(x) = x - \lambda f(x)$, kde $\lambda \in R$, $0 < \lambda \leq 1$ (vhodné číslo λ bude určeno později). Je jasné, že $f(x) = 0$ právě když $g(x) = x$. Jelikož $f(0) = -1$ a $f(1) = 2$, je vidět, že $f(x)$ má v $\langle 0, 1\rangle$ kořen. Volbou vhodného $\lambda \in R$ připravíme situaci pro aplikaci Banachovy věty o pevném bodě. Uplatníme větu o střední hodnotě z diferenciálního počtu:

$$\frac{g(x) - g(y)}{x - y} = g'(c) \text{ v nějakém bodě } c \in (0, 1).$$

Odtud dostaneme $|g(x) - g(y)| = |g'(c)| \cdot |x - y|$. Jelikož $g'(x) = 1 - \lambda f'(x) = 1 - \lambda(3x^2 + 2)$ a jelikož $2 \leq f'(x) \leq 5$ na $\langle 0, 1\rangle$, dostáváme $1 - 5\lambda \leq g'(x) \leq 1 - 2\lambda$. Můžeme volit například $\lambda = \frac{1}{5}$ a pak máme $|g(x) - g(y)| \leq \frac{3}{5}|x - y|$. Je zřejmé, že $g\colon \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ je kontrahující a tudíž můžeme použít konvergenční proceduru věty o pevném bodě. Jestliže například položíme $x_0 = 0$, dostáváme

$$x_1 = 0,2,\ x_2 = 0,318,\ x_3 = 0,385,\ x_4 = 0,419, x_5 = 0,437, \text{ atd.}$$

Jak dobrou aproximaci jsme již získali? Použijme porovnání uvedené v předchozím odstavci:

$$\begin{aligned} (\tfrac{3}{5})^5 \cdot (\tfrac{5}{2}) \cdot 0,2 \quad &= 0,039 \\ (\tfrac{3}{5}) \cdot (\tfrac{5}{2}) \cdot 0,018 \quad &= 0,027. \end{aligned}$$

To druhé kritérium je zde lepší a vídíme tedy, že máme řešení s přesností 0,027. (Skutečné řešení je 0,453.)

Příklad (Picardova věta o existenci lokálního řešení obyčejné diferenciální rovnice):

Uvažujme diferenciální rovnici $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Hledejme řešení v obdélníčku D: $|x - x_0| \leq a$, $|y - y_0| \leq b$ (kladná čísla a a b jsou zatím neznámá). Předpokládejme, že $f(x, y)$ je spojité a Lipschitzovské zobrazení v druhé proměnné, tj. předpokládejme, že

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \text{ při } (x, y_1) \in D, (x, y_2) \in D.$$

Tato podmínka je většinou splněna v úlohách "ze života".

Uvažujme prostor $C(\langle x_0 - a, x_0 + a\rangle)$ všech reálných spojitých funkcí na intervalu $\langle x_0 - a, x_0 + a\rangle$. Opatřeme $C(< x_0 - a, x_0 + a >)$ tzv. metriku stejnoměrné konvergence (někdy též nazývanou Čebyševovou metrikou) $d\colon C(\langle x_0 - a, x_0 + a\rangle) \to R^+$ definovanou tak, že

$$d(g, h) = \max_{x \in < x_0 - a, x_0 + a >} |g(x) - h(x)|.$$

Dá se relativně snadno ukázat, že $C(< x_0 - a, x_0 + a >)$ je v této metrice úplný metrický prostor. (Poznamenejme zde, že jak asi čtenář nahlédl, je tato metrika indukovaná normou $\|f\| = \max_{x\in\langle x_0-a,x_0+a\rangle} |f(x)|$. Tedy $C\langle x_0 - a, x_0 + a\rangle$ je vlastně Banachův prostor, ale v naší úloze je důležitá jenom úplnost příslušné metriky.)

Přepišme nyní diferenciální rovnici, s kterou jsme začali, do integrálního tvaru. Dostáváme

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Jsouce motivováni tímto vztahem, uvažujme zobrazení

$$T\colon C(< x_0 - a, x_0 + a >) \to C(< x_0 - a, x_0 + a >)$$

takové, že

$$T(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Pak najít řešení naší integrální rovnice znamená najít pevný bod zobrazení T, tj. najít $y(x)$ tak, aby $y(x) = T(y(x))$. Potřebujeme, aby T bylo kontrahující.To zajistíme tak, že T zúžíme na vhodný (úplný metrický) podprostor prostoru $C(< x_0 - a, x_0 + a >)$. Jelikož D je kompaktní v R^2 a $f(x, y)$ je spojitá, $f(x, y)$ je omezená na D. Existuje tedy konstanta c taková, že $|f(x, y)| \leq c$ pro každé $(x, y) \in D$. Nechť r je jakékoliv číslo takové, že platí $0 < r < \min(\frac{1}{M}, a, \frac{b}{c})$. Pak lze shora uvedenou diskusi uplatnit i pro interval $|x - x_0| \leq r < a$. Uvažujme konstantní funkci $y_0(x) = y_0$ (pro všechna x taková, že $|x - x_0| \leq r$) a položme

$$B = \{y(x) \in C(\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle) \mid d(y(x), y_0(x)) \leq cr\}.$$

Pak zřejmě B je uzavřený (metrický) podprostor prostoru $C(\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle)$ a tudíž S je také úplný. Navíc platí, že T zobrazuje $C(\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle)$ do $C(\langle x_0 - r, x_0 + r\rangle)$. To je zřejmé, neboť

$$|T(y(x)) - y_0(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|\, dt \leq c|x - x_0| \leq cr.$$

Ještě ověříme, že T je kontrahující. Platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned}
|T(y_1(x)) - T(y_2(x))| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|\, dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} M|y_1(t) - y_2(t)|\, dt \\
&\leq M|x - x_0| \max_{t\in\langle x_0-r,x_0+r\rangle} |y_1(t) - y_2(t)| \\
&\leq Mr \cdot d(y_1(x), y_2(x)).
\end{aligned}$$

Ale $Mr < 1$ vzhledem k tomu, jak jsme definovali r. Dokázali jsme, že naše diferenciální rovnice má *lokálně* jednoznačné řešení, splňující danou počáteční podmínku.

1.6. Elementární důkaz základní věty algebry

Jako jeden z důsledků provedených topologických úvah dokažme jedno hlubší algebraické tvrzení. Pro svou důležitost je tento výsledek v klasické literatuře uváděn jako tzv. *základní věta algebry*. Poznamenejme, že první důkaz podal K. F. Gauss (1777 - 1855) v roce 1799.

Lemma: Buď $p \in \mathbf{C}[x]$ polynom stupně aspoň jedna. Pak

$$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$$

(tj. formálně $\forall K \geq 0 \exists r > 0 \forall z \in \mathbf{C}\colon |z| > r \Rightarrow |p(z)| > K$).

Důkaz: Nechť $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0$. Pak

$$a_n z^n = p(z) - (a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0),$$

tj.

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= |p(z) - (a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0)| \\ &\leq |p(z)| + |a_{n-1} z^{n-1}| + \cdots + |a_1 z| + |a_0)|. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - \cdots - |a_1 z| - |a_0| \\ &= |z|^n \left[|a_n| - |a_{n-1}| \cdot \frac{1}{|z|} - \cdots - |a_1| \cdot \frac{1}{|z|^{n-1}} - |a_0| \cdot \frac{1}{|z|^n} \right]. \end{aligned}$$

Nyní pro $|z| \to +\infty$ je $|z|^n \to +\infty$,

$$\left[|a_n| - |a_{n-1}| \cdot \frac{1}{|z|} - \cdots - |a_0| \cdot \frac{1}{|z|^n} \right] \to |a_n|.$$

Odtud již tvrzení plyne. **QED.**

Věta: Buď $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ polynom stupně aspoň jedna. Pak funkce $z \mapsto |p(z)|$ má na množině $\mathbf{C}$ absolutní minimum.

Důkaz: Nechť $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,\ n \geq 1, a_n \neq 0$. Vezměme hodnotu $K = |p(0)| = |a_0|$. Pak dle Lemma 1 existuje $r > 0$ tak, že pro $z \in \mathbf{C}$, $|z| > r$ platí $|p(z)| > |p(0)|$. Označme $S_r = \{z \in \mathbf{C}; |z| \leq r\}$. Pak S_r je kompaktní množina, a tudéž funkce $z \mapsto |p(z)|$ (která je spojitá na $\mathbf{C}$, a tudíž i na S_r) na ní nabývá svého minima. Nechť je to v bodě z_0. Pak v bodě z_0 má funkce $|p|$ absolutní minimum:

(i) je-li $z \in S_r$, pak samozřejmě $|p(z_0)| \leq |p(z)|$,

(ii) je-li $z \in \mathbf{C} \backslash S_r$, pak $|z| > r$, a tudíž $|p(z)| > |p(0)| \geq |p(z_0)|$, neboť $0 \in S_r$.

QED.

Věta: Buď $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ polynom stupně aspoň jedna a nechť v bodě $z_0 \in \mathbf{C}$ platí $p(z_0) \neq 0$. Pak funkce $z \mapsto |p(z)|$ nemá v bodě z_0 lokální minimum.

Podrobněji: Existuje $\xi \in \mathbf{C}$ (směr klesání) tak, že pro každé dostatečně malé $t > 0$ platí:

$$|p(z_0 + t\xi)| < |p(z_0)|$$

(to jest $\exists \xi \in \mathbf{C},\ \varepsilon > 0 \forall t \in (0, \varepsilon)\colon |p(z_0 + t\xi)| < |p(z_0)|$).

Důkaz: Označme $b_0 = p(z_0) \neq 0$. Polynom $p(z) - b_0$ má kořen z_0. Označme $m \geq 1$ jeho násobnost. Existuje tedy polynom $q(x) \in \mathbf{C}[x]$, tak, že $p(z) - b_0 = (z - z_0)^m q(z)$, kde $\deg(q) \geq 0,\ q(z_0) \neq 0$. Označme $b_1 = q(z_0)$. Zvolme $\xi \in \mathbf{C},\ t \in \mathbf{R}$, a počítejme hodnotu $p(z_0 + t\xi)$:

$$\begin{aligned} p(z_0 + t\xi) &= b_0 + (t\xi)^m q(z_0 + t\xi) = b_0 + t^m \xi^m [q(z_0 + t\xi) - b_1 + b_1] \\ &= b_0 + t^m \xi^m b_1 + t^m \xi^m [q(z_0 + t\xi) - b_1]. \end{aligned}$$

Označme $r(t) = q(z_0 + t\xi) - b_1$. Pak $r(t)$ je polynom bez absolutního členu. Existuje tedy $K > 0$ tak, že

$$\forall t \in < 0, 1 >\colon |r(t)| \leq Kt.$$

(Důkaz: Nechť $r(t) = b_s t^s + \cdots + b_1 t = t(b_s t^{s-1} + \cdots + b_1)$. Pak pro $t \in < 0, 1 >$ platí $|r(t)| = |t||b_s t^{s-1} + \ldots |b_1| \leq |t|(|b_s| + \cdots + |b_1|)$. Nyní stačí položit $K = |b_s| + \cdots + |b_1|$.)

Pro libovolné $t \in \mathbf{R}$ nyní platí:

$$p(z_0 + t\xi) = b_0 + t^m \xi^m b_1 + t^m \xi^m r(t) = b_0 [1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0} + t^m \xi^m \frac{1}{b_0} r(t)],$$

tj. $|p(z_0 + t\xi)| = |b_0||1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0} + t^m \xi^m \frac{1}{b_0} r(t)|$.

O poslední absolutní hodnotě chceme dokázat, že pro dostatečně malá $t > 0$ je < 1. Kdybychom použili vzorec $|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c|$, tak to nedokážeme. Musíme tedy aspoň dva členy "nechat pohromadě" a zbývající člen "separovat". Protože již máme odhad pro $|r(t)|$, budeme "separovat" člen $t^m \xi^m \frac{1}{b_0} r(t)$. Pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

$$\begin{aligned} |p(z_0 + t\xi)| &\leq |b_0| [|1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}| + |t^m \xi^m \frac{1}{b_0} r(t)|] \\ &\leq |b_0| [|1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}| + t^m |\xi^m \frac{1}{b_0}| tK]. \end{aligned}$$

Jestliže nyní součin $\xi^m \frac{b_1}{b_0}$ bude reálné číslo, pak pro t dostatečně malé bude

$$|1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}| = 1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}.$$

Pak bude

$$|p(z_0 + t\xi)| \leq |b_0|[|1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0}| + t^{m+1}|\xi^m|\frac{1}{|b_0|}K].$$

Chceme nyní, aby pro každé dostatečně malé $t > 0$ bylo

$$1 + t^m \xi^m \frac{b_1}{b_0} + t^{m+1}|\xi^m|\frac{1}{|b_0|}K < 1,$$

tj. aby

$$\xi^m \frac{b_1}{b_0} + t|\xi^m|\frac{1}{|b_0|}K < 0.$$

To nastane tehdy, bude-li $\xi^m \frac{b_1}{b_o} < 0$; například když $\xi^m \frac{b_1}{b_0} = -1$, tj. když $\xi^m = -\frac{b_0}{b_1}$.
QED.

Důsledek (základní věta algebry): Buď $p(x) \in \mathbf{C}[x]$ polynom stupně aspoň jedna. Pek p má v tělese $\mathbf{C}$ aspoň jeden kořen.

Důkaz: Podle Věty 1 nabývá funkce $|p|$ absolutního minima v nějakém bodě $z_0 \in \mathbf{C}$. V tomto bodě z_0 pak dle Věty 2 musí být $p(z_0) = 0$. **QED.**

Důsledek (důsledku): Každý polynom stupně n má (včetně násobnosti) přesně n kořenů.

Důkaz: Jednoduchý indukční argument užívající předchozí důsledek. **QED.**

1.7. Věta Stoneova–Weierstrassova (o polynomiální "aproximaci" spojitých funkcí)

V tomto odstavci vyslovíme a dokážeme jednu z velmi důležitých vět o spojitých funkcích na kompaktním topologickém prostoru. Věta má bohaté aplikace, zejména pak její "polynomiální" verze pro kompakty v R^n. Tvrdí se toto: Má-li množina F spojitých funkcí na kompaktu K "vhodnou" algebraickou strukturu, pak musí být F (topologicky) hustá v množině $C(K)$ *všech* spojitých funkcí. Jinými slovy věta říká, že každá funkce z $C(K)$ je "libovolně přesně" aproximovatelná funkcí z F .

Nejprve provedeme několik předběžných úvah o tom, jak nalézat (s využitím úplnosti) "odmocniny" prvků v lineárních algebrách.

Jak odmocňujeme prvky v Banachových algebrách?

Následující serie pozorování trochu přesahuje to, co bude ve skutečnosti aplikováno v následujícím důkazu Stoneovy–Weierstrassovy věty, má však svou cenu pro plné pochopení pojmu úplnosti v metrických prostorech. Předpokládejme, že A je *normovaná* algebra, tj. A je lineární prostor, na kterém je dále definována operace násobení $x \cdot y$ pro jakoukoliv dvojici vektorů z A a tato operace násobení je asociativní a taková, že $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ pro každé x, y z A; navíc v A existuje jednotka vzhledem k násobení. Pokud A tvoří úplný metrický prostor v metrice $(x, y) = \|x - y\|$, nazýváme ji *Banachova algebra*. Typickým příkladem Banachovy algebry je algebra $C(K)$ všech spojitých funkcí na kompaktním prostoru (operace $\cdot$ je obyčejné násobení funkcí a norma je definována tak, že $\|f\| = \max\{|f(x)| \mid x \in K\}$). Tato Banachova algebra nás bude nejvíc zajímat. Dalším důležitým příkladem z kategorie "nekomutativních" Banachových algeber jsou algebry čtvercových matic daného řádu (operace $\cdot$ je tam maticové násobení a za normu vezmeme normu indukovanou normou ν_2 na R^n – viz úvodní kapitola tohoto textu).

Nejprve si uvědomme, že s řadami "absolutně konvergentními v Banachových algebrách" lze zacházet stejně, jako s reálnými absolutně konvergentními řadami. Buď x_n $(n \in N)$ posloupnost prvků v Banachově algebře A. Nazveme ji *absolutně sčitatelnou* pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ konverguje. Dá se snadno ukázat (využije se úplnost), že každá absolutně sčitatelná posloupnost prvků z A je v A sčitatelná, tj. posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{n=1}^{k} x_n$ konverguje v A k nějakému prvku x (značíme $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$). Dále platí tvrzení:

Pokud jsou posloupnosti x_n, y_n $(n \in N)$ absolutně sčitatelné, pak je i posloupnost $x_n \cdot y_m$ $(n, m \in N)$ absolutně sčitatelná. Přitom můžeme posloupnost $x_n \cdot y_m$ sčítat v jakémkoliv pořadí. Navíc platí, že $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{p=1, n+m=p}^{\infty} x_n y_m$.

Uvažujme nyní funkci $\sqrt{1-t}$ na intervalu $\langle 0, 1)$. Nechť a_n $(n \in N)$ jsou koeficienty Taylorovy řady funkce $\sqrt{1-t}$, kterou jsme rozvinuli v bodě 0. Pak $a_0 = 1$, všechny koeficienty a_n pro $n > 1$ jsou záporné a platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. Jelikož $\sqrt{1-t} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ v $\langle 0, 1)$ a jelikož $(\sqrt{1-t})^2 = 1 - t = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t_n\right)$, vidíme, že $\sum_{n=0}^{p} a_n a_{p-n}$ je buď 1 (při $p = 0$), nebo -1 (při $p = 1$) a nebo 0 (při jakémkoliv $p > 1$).

Předchozí úvahy nyní použijeme pro Banachovu algebru A. Nechť e je jednotka v A. Pak tvrdíme, že v A existuje "odmocnina" pro každý prvek x, který splňuje nerovnost $\|x - e\| < 1$. Jinými slovy, tvrdíme, že k takovému $x \in A$ existuje $y \in A$

tak, že $y^2 = x$. Skutečně, položíme-li $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(e-x)^n$ kde chápeme $(e-x)^0 = e$, snadno ukážeme s využitím poznatků předchozího odstavce, že $y^2 = e$. Jelikož lze rovněž psát $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[(e-x)^n - e]$, vidíme, že y lze vždy vyjádřit jako limitu polynomů (v x) bez absolutního členu. (Všimněme si, že provedenými úvahami rovněž dostaneme následující výsledek často používaný například pro maticové Banachovy algebry: Pokud $\|y\| < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ konverguje k elementu, který je inverzní k $e - y$.)

Po předchozích pomocných úvahách přejděme k vlastní větě Stoneově–Weierstrassově. Tato věta tvrdí, že pro obecný (i nemetrizovatelný) kompaktní topologický prostory K je každá oddělující algebra funkcí hustá v $C(K)$. Hlavní aplikace v technických vědách se ovšem objevují převážně pro kompaktní prostory metrizovatelné, zvláště pak pro podprostory R^n.

Věta (Stoneova–Weierstrassova): Buď K kompaktní topologický prostor a buď $C(K)$ Banachova algebra všech spojitých reálných funkcí na K s normou $\|f\| = \max\{|f(x)| x \in K\}$. Nechť A je podalgebra $C(K)$ (tj. nechť A je lineární podprostor $C(K)$, který je uzavřen na operaci násobení (tj. pokud $x, y \in A$, pak $x \cdot y \in A$), a nechť jednotková konstantní funkce z $C(K)$ patří do A.). Pokud A odděluje body, tj. pokud pro každé dva body $p, q \in K$ existuje $f \in A$ taková, že $f(p) \neq f(q)$, pak A je hustá v $C(K)$, tj. $\bar{A} = C(K)$ (uzávěr ovšem bereme vzhledem k topologii dané normou na $C(K)$).

Než přejdeme k důkazu této věty, naformulujeme ten její důsledek, který se nejčastěji aplikuje.

Věta (Weierstrassova o aproximaci spojitých funkcí): Nechť K je uzavřená a omezená podmnožina v R^n. Nechť A je algebra všech polynomů n-proměnných definovaných na A. Pak pro každou spojitou funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ na K a každé $\varepsilon > 0$ existuje polynom $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ takový, že

$$\max_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in K} \{|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - p(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\} \leq \varepsilon.$$

Důsledek: Každá spojitá funkce na kompaktu v R^n je stejnoměrnou limitou polynomů.

Dokažme nyní Stoneovu–Weierstrassovu větu. Důkaz provedeme v několika krocích.

Důkaz (Stoneovy–Weierstrassovy věty):

1. Pokud $f \in A$, pak $|f|$ patří do uzávěru algebry A v $C(K)$ (tj. $|f| \in \bar{A}$). Skutečně, jak se snadno ukáže, $\bar{A}$ je Banachova algebra a je-li $f \in A$, pak $f^2 \in A$ a tedy $f^2 \in \bar{A}$. Nechť $r \in R$ je takové, že $r > \|f^2\|$. Nechť e značí konstantní jednotkovou funkci v A. Pak $\left\| \frac{f^2}{r} - e \right\| < 1$, a tedy $g = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(e - \frac{f}{r} \right)^n$ má tu vlastnost, že $g \in \bar{A}$ a přitom $g^2 = \frac{f^2}{r}$. Navíc $g \geq 0$ na celém K a tedy $g = \left| \frac{f}{r} \right|$. Odtud dostáváme, že $r \cdot g = |f|$ a tudíž $|f| \in \bar{A}$.

2. Pokud $f, g \in A$, pak funkce $h = \max(f, g)$ a $k = \min(f, g)$ také patří do A. To je zřejmé, neboť $h = \frac{1}{2}(|f+g| + |f-g|)$ a $k = \frac{1}{2}(|f+g| - |f-g|)$.

3. Pokud A odděluje body, pak pro každé $\varepsilon > 0$, každé $f \in C(K)$ a každý bod $p \in K$ lze najít takovou funkci $g \in \bar{A}$ s vlastnostmi $g(p) = f(p)$ a $g(s) < f(s) + \varepsilon$ pro každé $s \subset K$. Skutečně, pro každé dva body $p, q \in K$ můžeme najít funkci $f_q \in A$ takovou, že $f(p) = f_q(p)$ a $f_q(q) < f(q) + \varepsilon$. Vezměme otevřené pokrytí $\mathtt{P} = \bigcup P_q$, kde $P_q = \{u \in K \mid f_q(u) < f(u) + \varepsilon\}$. Buď $\mathtt{R} = \bigcup_{j=1}^{n} P_{q_j}$ konečná otevřená podpokrytá pokrytí $\mathtt{P}$ (takové existuje, neboť K je kompakt). Pak stačí položit $g = \min_{1,2,\ldots,m} f_{q_j}$.

4. K ukončení důkazu stačí vzít maximum (konečně mnoha) funkcí, získaných výše (čtenář, který se dostal až sem, to jistě snadno udělá, opět se využije kompaktnost prostoru K)).

QED.

Pojednání o Stoneově–Weierstrassově větě doplňme ještě dvěma poznámkami.

Poznámka (Stoneova–Weierstrassově věta pro obecné topologické prostory): Buď X topologický prostor a buď $C(X)$ množina všech reálných spojitých funkcí na X. Nechť $C(X)$ je opatřeno tzv. “compact-open” topologií, tj. topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podprostorech prostoru X. Pak každá podalgebra algebry $C(X)$, která odděluje body, je hustá v $C(X)$.

Důkaz této věty lze provést způsobem ukázaným výše – na kompaktním podprostoru K, $K \subset X$ je samozřejmě “compact-open” topologie shodná s výše uvažovanou topologií danou normou $\|f\| = \max\{|f(x)| x \in K\}$.

Poznámka: Je dobré si být vědom toho, že při analogické formulaci Stoneova–Weierstrassova věta neplatí pro komplexní funkce (viz W. Rudin: Principles ...). Zde je protipříklad. Nechť K je jednotková kružnice v komplexní rovině. Nechť A je algebra všech funkcí $f(\varphi)$ tvaru $f(e^{i\varphi}) = \sum_{n=0}^{k} c_n e^{in\varphi}$ $(\varphi \in < 0, 2\pi))$. Pak A odděluje body a obsahuje identickou funkci, ale přesto lze najít spojitou funkci na K, která není stejnoměrnou limitou funkcí z A. (Plyne to z toho, že pro každou funkci $f \in A$ platí $\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})e^{i\varphi} d\varphi = 0$. Totéž pak nutně platí i pro funkce z uzávěru algebry A, ale ne pro všechny spojité funkce na K — stačí vzít například funkci $f(z) = \bar{z}$.) Nicméně lze snadno dokázat, že Stoneova-Weierstrassova věta *platí pro samoadjungované algebry*: Je-li A algebra komplexněhodnotových funkcí na kompaktu K, která odděluje body a obsahuje identickou funkci a která je navíc samoadjungovaná (to jest pokud $f \in A$, pak také $\bar{f} \in A$), pak A je hustá v $C(K)$.

1.8. Fraktál jakožto pevný bod

Ukážeme si, že na fraktál lze pohlížet jako na pevný bod jistého kontraktivního zobrazení na jistém úplném metrickém prostoru. Představme nejprve onen úplný metrický prostor. Bude to jistý "hyperprostor" (tj. prostor podmnožin nějakého prostoru) a opatříme ho tzv. Hausdorfovou metrikou. I když při studiu existence (a jednoznačnosti) fraktálu se soustředíme jen na Hausdorfovu metriku v R^n, je užitečné zaujmout nejprve trochu obecnější pozici vzhledem k značné důležitosti Hausdorfovy metriky i v jiných oblastech aplikované matematiky.

Definice (Hausdorfova metrika): Nechť X je metrický prostor s metrikou d. Nechť $H(X)$ je množina všech neprázdných kompaktních podmnožin prostoru X. Nechť $A, B \in H(X)$. Položme

$$d(A, B) = \max(\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)),$$

kde jako obvykle $d(a, B)$ značí $\min_{b \in B} d(a, b)$.

Příklad: Nechť X je metrický prostor reálných čísel a nechť d je Hausdorfova metrika na $H(X)$. Pak $d([0, 2], [1, 5]) = 3$ a $d([2, 4], [1.6]) = 2$.

Postupně ukážeme, že funkce d definuje metriku na $H(X)$ a že je-li X úplný metrický prostor, pak $H(X)$ tvoří s metrikou d také úplný metrický prostor.

Nejprve proveďme verifikaci toho, že d je metrika na $H(X)$.

Tvrzení: Jestliže $a \in X$ a B je kompaktní podprostor prostoru X, pak vzdálenost $d(a, B)$ bodu $a \in X$ od B definovaná vztahem $d(a, B) = \min_{b \in B} d(a, b)$ existuje (tj. tato hodnota je korektně definovaná). Navíc platí, že $d(a, B) = 0$ právě když $a \in B$.

Důkaz: Z trojúhelníkové nerovnosti pro metriku d se snadno dokáže, že funkce $v(x) = d(a, x)$ je funkce spojitá na X. Zúžení této funkce na B je funkce spojitá na (kompaktním) prostoru B (b je metrický podprostor prostoru X). Tudíž funkce $v(x)\colon B \to R$ musí nabývat svého minima v nějakém bodě $b_0 \in B$. Tudíž $\min_{b \in B} d(a, b) = d(a, b_0)$.

Předpokládejme, že $d(a, B) = 0$. Pak $d(a, B) = d(a, b_0)$ pro nějaké $b_0 \in B$ a tudíž $b_0 = a$ podle vlastnosti metriky. Tudíž $a \in B$. Naopak, nechť $a \in B$. Pak platí

$$0 \leq d(a, B) = \min_{b \in B} d(a, b) \leq d(a, a) = 0,$$

a tedy $d(a, B) = 0$. **QED.**

Nejprve musíme potvrdit, že Hausdorfova metrika je metrika.

Tvrzení: Nechť A, B jsou neprázdné kompaktní podmnožiny metrického prostoru X (tj. $A, B \in H(X)$). Pak platí:

(1) Definice $d_A(B) = \max_{a \in A} d(a, B)$ je korektní; navíc platí, že $d_A(B) = d(a_0, b_0)$ pro nějaké $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$.

(2) $d_A(B) = 0 \Leftrightarrow A \subset B$,

(3) $d(A, B) = d(a_0, b_0)$ pro nějaké $a_0 \in A$ a $b_0 \in B$.

Důkaz:

(1) Ukážeme-li, že funkce $v\colon A \to R$ daná vztahem $v(a) = d(a, B)$ je spojitá na A, existence hodnoty $d_A(B)$ jako maxima je dána kompaktností množiny A (Věta ??). Tedy $d_A(B) = d(a_0, B)$ pro nějaké $a_0 \in A$, ale $d(a_0, B) = d(a_0, b_0)$ pro nějaké $b_0 \in B$. Zbývá tedy ukázat spojitost funkce v na A. Stačí ověřit, že pro každé $x, y \in A$ platí $|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y)$. Ale pro každé $b \in B$ máme z trojúhelníkové nerovnosti vztah $d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)$ a tudíž dostáváme $d(x, b) - d(y, b) \leq d(x, y)$. Podobně při záměně $d(x, b)$ za $d(y, b)$. Odtud $|d(x, b) - d(y, b)| \leq d(x, y)$. Ježto tato nerovnost platí pro každé $b \in B$, dostáváme konečně $|d(x, B) - d(y, B)| \leq d(x, y)$.

(2) Nechť $d_A(B) = 0$ a nechť $a \in A$. Pak $d(a,B) \leq d_A(B)$ a tedy $d(a,B) = 0$. To znamená, že $a \in B$ a tedy $A \subset B$. Naopak, pokud $A \subset B$, platí zřejmě $d_A(B) = 0$.

(3) To plyne ihned z (1).

QED.

Věta: Hausdorfova metrika na $H(X)$ je metrika.

Důkaz: Musíme dokázat tři vlastnosti z definice metriky. Nechť $A, B, C \in H(X)$. Pak

$$\begin{aligned} d(A,B) = 0 \;&\Leftrightarrow\; (d_A(B) = 0 = d_B(A)) \\ &\Leftrightarrow\; (A \subset B \text{ a současně } B \subset A) \Leftrightarrow A = B. \end{aligned}$$

Dále je zřejmé, že $d(A,B) = d(B,A)$. Zbývá dokázat trojúhelníkovou nerovnost. Nechť a, b, c jsou po řadě body z A, B, C. Pak platí $d(c,A) \leq d(c,a) \leq d(c,b) + d(b,a)$, a tedy pro všechna b, c z B, C platí

$$d(c,A) \leq d(c,b) + d(b,A) \leq d(c,b) + d_B(A).$$

Odtud plyne, že pro všechna $c \in C$ platí

$$d(c,A) \leq d(c,B) + d(A,B) \leq d_C(B) + d(A,B) \leq d(A,B) + d(B,C).$$

Odtud dostáváme, že $d_C(A) \leq d(A,B) + d(B,C)$. Podobně odvodíme nerovnost $d_A(C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. Ale $d(A,C) = \max(d_A(C), d_C(A))$ a tudíž $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. **QED.**

Od tohoto okamžiku se vzhledem k možnosti aplikace soustředíme jen na Eukleidovský prostor R^n (přestože většina úvah a výsledků, které následují, platí nejen pro R^n, ale i pro libovolný úplný metrický prostor). Jak víme, R^n tvoří (s obvykou Eukleidovskou metrikou) *úplný* metrický prostor. Jedním z hlavních výsledků, které teď dokážeme, bude to, že i $H(X)$ s Hausdorfovou metrikou je úplný metrický prostor.

Nejprve učiníme jednu konvenci.

Konvence: Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost v $H(R^n)$. Pak označíme $\{x_n \in A_n\}$ posloupnost $\{x_n\}$ v R^n tak, že $x_n \in A_n$. Dále, pokud $A \in H(R^n)$ a číslo $\delta \in R$ je nezáporné, označíme symbolem $A + \delta$ či A_δ množinu definovanou takto:

$$A + \delta = \{x \in R^n \mid d(x,A) \leq \delta\}.$$

Před dalšími dvěma pomocnými tvrzeními si uvědomíme, že $A \subset A + \delta$ pro každé $\delta \geq 0$ a že vzhledem ke kompaktnosti A lze použít alternativní vyjádření $A + \delta = \{x \in X \mid d(x, a) \leq \delta \text{ pro nějaké } a \in A\}$.

Tvrzení: Pokud $A, B \in H(R^n)$ a pokud $\varepsilon > 0$, pak

1. $d_A(B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon$
2. $d(A, B) \leq \varepsilon \Leftrightarrow A \subset B + \varepsilon$ a také $B \subset A + \varepsilon$.

Důkaz: Nechť $d_A(B) \leq \varepsilon$ a nechť $a \in A$. Pak platí

$$d(a, B) \leq \max_{x \in A} (d(x, B),\ d_A(B)) \leq \varepsilon.$$

Odtud máme $a \in B + \varepsilon$ a tedy $A \subset B + \varepsilon$. Druhá část tvrzení plyne ihned z právě dokázané první vlastnosti. **QED.**

Před dalším tvrzením připomeňme, že posloupnost p_n v metrickém prostoru (M, d) se nazývá cauchyovská, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N$ tak, že $\forall n, m \geq n_0$ platí $d(p_n, p_m) \leq \varepsilon$.

Tvrzení: Nechť $\{A_n\}$ je cauchyovská posloupnost v prostoru $H(R^n)$. Nechť $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ je nějaký výběr přirozených čísel. Pak každá cauchyovská posloupnost $\{x_{n_i} \in A_{n_i}\}$ bodů v R^n se dá doplnit na cauchyovskou posloupnost $\{x_n \in A_n\}$. Tato rozšířená posloupnost $\{x_n \in A_n\}$ konverguje v R^n k témuž bodu, ke kterému konverguje posloupnost $\{x_{n_i} \in A_{n_i}\}$.

Důkaz: Nechť $n \in N$ je takové číslo, že $1 \leq n \leq n_1$. Pak podle shora uvedeného tvrzení lze psát $d(x_{n_1}, A_n) = d(x_{n_1}, x_n)$ pro nějaké $x_n \in A_n$. Pro $n = n_1$ vychází ovšem $x_n = x_{n_1}$ – pokud $d(x_{n_1}, y) = d(x_{n_1}, A_{n_1}) = 0$, pak $y = x_{n_1}$. Podobně postupujeme pro všechna $n \in N$ taková, že $n_1 < n \leq n_2$ – klademe $d(x_{n_2}, A_n) = d(x_{n_2}, x_n)$ atd. Tímto způsobem obdržíme celou posloupnost $\{x_n \in A_n\}$ a zbývá ukázat, že tato posloupnost je (stále) cauchyovská. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Ježto $\{x_{n_i}\}$ je cauchyovská v R^n a $\{A_n\}$ je cauchyovská v $H(R^n)$, lze najít čísla m_0, n_0 taková, že

$$d(A_r, A_s) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ pro každé } r \geq m_0, s \geq m$$

a také

$$d(x_{n_r}, x_{n_s}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ pro každé } r \geq n_0, s \geq n_0.$$

Nechť $m, n \geq m_0$. Pak pro nějaké $j \in N$ a $k \in N$ platí $n_{j-1} < m \leq n_j$, $n_{k-1} < n \leq n_k$. Pokud m, n zvolíme dost velké, zajistíme, aby $j \geq n_0, k \geq n_0$. Pak dostaneme

$$d(x_{n_j}, x_m) \leq d(x_{n_j}, A_m) \leq d(A_{n_j}, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

vidíme, že $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$ pro dostatečně velká $m, n \in N$. Tím je ukázáno, že $\{x_n\}$ je cauchyovská. Zbytek tvrzení je zřejmý. **QED.**

Teď již dokážeme hlavní větu.
Věta (úplnost Hausdorfovy metriky na hyperprostoru):
Metrický prostor $H(R^n)$ je úplný v Hausdorfově metrice. Navíc platí, že pokud $\{A_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $H(R^n)$, pak $A_n \to A$ v $H(R^n)$, kde

$$A = \{x \in R^n \mid x \text{ je limitou cauchyovské posloupnosti } (x_n \in A_n)\}.$$

Důkaz: Pro přehlednost provedeme důkaz v několika krocích.

1. Dokažme, že množina A definovaná ve Větě *je neprázdná*. Za tím účelem stačí najít alespoň jednu cauchyovskou posloupnost $(x_n \in A_n)$. Jelikož R^n je úplný prostor, tato posloupnost bude mít limitu a tedy $A \neq \emptyset$. Předpokládáme, že $\{A_n\}$ je cauchyovská v $H(R^n)$. Z toho plyne, že pro nějaká $m_1 \in N$ platí, že kdykoliv $r \geq m_1, s \geq m_1$, pak $d(A_r, A_s) < \frac{1}{2}$. Postupujeme-li analogicky pro $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, atd., získáme posloupnost $0 < m_1 < m_2 < \ldots$ přirozených čísel takovou, že $d(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}$ pro $m, n \geq m_i$.

   Nechť x_{m_1} je nějaký bod z A_{m_1}. Jelikož $d(A_{m_1}, A_{m_2}) < \frac{1}{2}$, lze najít bod $x_{m_2} \in A_{m_2}$ takový, že $d(x_{m_2}, x_{m_3}) \leq \frac{1}{4}$. Postupujeme-li analogicky dále, získáme posloupnost $\{x_{m_i} \in A_{m_i}\}$ takovou, že $d(x_{m_i}, x_{m_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$. Stačí ukázat, že tato posloupnost je cauchyovská, podle Tvrzení ji lze rozšířit na celou (cauchyovskou) posloupnost $\{x_n \in A_n\}$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Jelikož řada $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ je konvergentní, dá se snadno ukázat (cvičení ze základního kurzu matematické analýzy!), že pro dost velké $n_\varepsilon \in N$ platí $\displaystyle\sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Z toho plyne, že při $k, j \geq n_\varepsilon$ máme

$$\begin{aligned} d(x_{m_k}, x_{m_j}) &\leq d(x_{m_k}, x_{m_{k+1}}) + \cdots + d(x_{m_{j-1}}, x_{m_j}) < \\ &< \sum_{i=n_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tudíž posloupnost $\{x_{m_i} \in A_{m_i}\}$ je cauchyovská. Po jejím rozšíření dostaneme cauchyovskou posloupnost $\{x_n \in A_n\}$, která konverguje (neboť R^n je úplný prostor). Jestliže $x_n \to a$, pak $a \in A$ a tudíž $A \neq \emptyset$.

2. *Množina A je uzavřená množina v R^n.* Je třeba ukázat, že A obsahuje všechny limitní body posloupnosti bodů z A. Nechť tedy $\{a_n\}$ je posloupnost taková, že $a_n \in A$ pro každé $n \in N$ a nechť $a_n \to a$. Vzhledem k definici množiny A je každý bod a_n limitou nějaké cauchyovské (a tedy konvergentní) posloupnosti $\{x_{n_i} \in A_i\}$. Naše situace je znázornitelná následujícím schematem:

$$\begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & & A \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \to & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \to & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \to & a_3 \\ & & & & & \downarrow \\ & & & & & a \end{array}$$

Jelikož $a_n \to a$, můžeme najít podposloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ $(n_1 > 0)$ takovou, že $d(a, a_{n_i}) \leq \frac{1}{i}$. Jelikož $a_{n_i} \to a_n$, můžeme pro každé $n_i \in N$ najít $m_i \in N$ takové, že $d(a_{n_i}, a_{n_i m_i}) \leq \frac{1}{i}$. Užitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme $d(a, a_{n_i m_i}) \leq \frac{2}{i}$. Mohlo by se stát, že při nekonečně mnoha n_i máme totéž m_i. Proto učiníme ještě následující úvahu. Nechť pro pevné (ale libovolné) $m_i \in N$ je $n(i)$ *nejmenší* z těch indexů n_i, pro které platí $d(a, a_{n_i m_i}) \leq \frac{2}{i}$. Tento index ovšem existuje a i pro $n(i)$ platí $d(a, a_{n(i) m_i}) \leq \frac{2}{i}$. Položme $b_{m_i} = a_{n(i) m_i}$ $(i \in N)$. Pokud je množina $\{m_i \mid i \in N\}$ konečná, pak $d(b_{m_k}, a) \leq \frac{2}{s}$ pro nekonečně mnoho hodnot $s \in N$ a tedy $d(y_{m_k}, a) = 0$, tj. $y_{m_k} = a$. Pokud je konečné, máme posloupnost $b_{m_i} \in A_{m_i}$ takovou, že $b_{m_i} \to a$. Tuto posloupnost můžeme rozšířit do (cauchyovské) posloupnosti $\{b_n \in A_n\}$ a přitom ovšem $b_n \to a$. Podle definice množiny A dostáváme $a \in A$.

3. *Množina A je omezená v R^n.* Ukažme nejprve, že pro každé $\varepsilon > 0$ můžeme najít $n_0 \in N$ takové, že $A \subset A_n + \varepsilon$ pro každé $n \geq n_0$. Jelikož $\{A_n\}$ je cauchyovská posloupnost v $H(R^n)$, existuje $n_0 \in N$ tak, že $d(A_m, A_n) \leq \varepsilon$ pro každé $m, n \geq n_0$. Uvažujme $n \in N, n \geq n_0$ a vezměme $a \in A$. Ukažme, že $a \in A_n + \varepsilon$. Podle definice množiny A musí existovat cauchyovská posloupnost $\{a_n \in A_n\}$ taková, že $a_n \to a$. Pak máme při $m \geq n_0$ inkluzi $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Ale $a_m \in A_m$. Vidíme, že $a_m \in A_n + \varepsilon$. Jelikož A_n je kompaktní v R^n, je tudíž omezená a uzavřená. Snadno se ukáže, že množina $A_n + \varepsilon$ je také omezená a uzavřená. Jelikož $a_m \to a$, dostáváme $a \in A_n + \varepsilon$. Tím jsme ukázali, že $A \subset A_n + \varepsilon$, což implikuje, že A je omezená.

4. *Platí: $A_n \to A$ v Hausdorfově metrice $H(R^n)$.* Již jsme ukázali, že A je neprázdná a kompaktní. Tudíž $A \in H(R^n)$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Víme, že

$d(A, A_n) \leq \varepsilon$ platí právě tehdy, pokud $A \subset A_n + \varepsilon$ a současně $A_n \subset A + \varepsilon$. První inkluzi jsme (pro dost velká $n \in N$) právě ukázali. Musíme ověřit tu druhou, tj. $A_n \subset A + \varepsilon$ pro dost velká $n \in N$. Ježto $\{A_n\}$ je cauchyovská v $H(R^n)$, lze najít $n_0 \in N$ tak, že pokud $m, n \geq n_0$, pak $d(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Odtud dostáváme $A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$ $(m, n \geq n_0)$. Nechť $n \in N$ je takové číslo, že $n \geq n_0$ a nechť $b \in A_n$. Je třeba ukázat, že $b \in A + \varepsilon$. Jelikož $\{A_n\}$ je cauchyovská, lze najít čísla $n_i \in N$ taková, že $n < n_1 < n_2 < \ldots$ a pro každé $s \in N$ platí $A_m \subset A_k + \dfrac{\varepsilon}{2^{s+1}}$ $(m, k \geq n_s)$.

Nyní opět uplatníme standardní trik s konvergentní řadou. Jelikož $n, n_1 \geq n_0$, máme $A_{n_1} \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$. Ale $b \in A_n$ a tedy existuje $a_{n_1} \in A_{n_1}$ s vlastností $d(b, a_{n_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Teď využijeme vztah $A_m \subset A_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{s+1}}$ a nahlédneme, že pro $s = 1, m = n_1, k = n_2$ lze najít $a_{n_2} \in A_{n_2}$ s vlastností $d(a_{n_1}, a_{n_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$ (využili jsme toho, že $a_{n_1} \in A_{n_1}$). Dále postupujeme indukcí – analogická argumentace dává $a_{n_3} \in A_{n_3}$ s vlastností $d(a_{n_2}, a_{n_3}) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^3}$, atd. Užitím trojúhelníkové nerovnosti máme

$$d(b, a_{n_s}) \leq \varepsilon\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^s}\Big) < \varepsilon.$$

Podobně odvodíme, že $d(a_{n_i}, a_{n_j}) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^i}$ při $n_j \geq n_i$. Tudíž $\{a_{n_i}\}$ je cauchyovská posloupnost v R^n a tedy konverguje k nějakému bodu $a \in R^n$. Zřejmě $d(b, a) \leq \varepsilon$, a tedy $b \in A + \varepsilon$. Jelikož b byl libovolně vybraný prvek z A_n, vidíme, že $A_n \subset A + \varepsilon$. Tím je důkaz Věty ukončen.

QED.

Poznámka: Ukázali jsme, že $H(R^n)$ je úplný prostor. Vzhledem k inženýrským aplikacím jsme se omezili na R^n. Tato věta platí zcela obecně – $H(X)$ je úplný metrický prostor pokud X je úplný metrický prostor. Důkaz probíhý přesně tak, jak jsme ho prováděli pro R^n, jen v jednom bodě musíme být pozorní – obecně totiž neplatí, že je-li A množina totálně omezená v metrickém prostoru, pak i $A + \varepsilon$ je totálně omezená. Je-li však množina aproximovatelná "až na libovolné ε" množinami kompaktními,musí být totálně omezená (tento bod jedině vyžaduje trochu komplikovanější důkaz, lišící se od důkazu pro R^n). Takto i v obecném případě dokážeme, že A je uzavřená (stejný důkaz jako pro R^n) a totálně omezená i obecně a tedy musí být kompaktní. Důsledek: Je-li X Banachův prostor, pak $H(X)$ je úplný metrický prostor.

Ještě je namístě poznamenat, že místo $H(X)$ můžeme vzít množinu $K(X)$ všech uzavřených podmnožin X s konečným diametrem. Lze pak rovněž zavést Hausdorfovu metriku v $K(X)$, i když "vzdálenosti" množin se pak obecně nebudou realizovat v bodech. Prostor $K(X)$ bude nicméně opět úplný metrický prostor (ovšem $H(R^n) = K(R^n)$).

Poté co jsme dokázali, že hyperprostor $H(R^n)$ je úplný, můžeme provést konstrukci fraktálu jakožto pevného bodu jistého zobrazení. Toto zobrazení se nazývá *kolážové*. Připomeňme si obecnou definici kolážového zobrazení.

Definice: Nechť X je úplný metrický prostor a nechť $H(X)$ je prostor kompaktních podprostorů v X opatřený Hausdorfovou metrikou. Nechť $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ jsou spojitá zobrazení z X do X. Definujme $\psi\colon H(X) \to H(X)$ takto:

$$\psi(A) = \psi_1(A) \cup \psi_2(A) \cup \cdots \cup \psi_m(A).$$

Toto zobrazení ψ se nazývá kolážové zobrazení určené zobrazeními $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$.

Všimněme si, že ψ je korektně definované (spojitý obraz kompaktu je kompakt a konečné sjednocení kompaktů je kompakt!). Důležité pozorování přináší následující tvrzení: Kolážové zobrazení určené kontrakcemi je zase kontrakce. I když toto tvrzení platí obecně, vyslovme jej jen pro R^n, neboť jen v R^n plánujeme jeho aplikaci.

Tvrzení: Nechť $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ jsou kontraktivní zobrazení s koeficienty kontrakce $r_1, r_2, \ldots, r_m (r_i < 1$ pro každé i, $i \leq m)$. Pak příslušné kolážové zobrazení určené $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ je kontraktivní zobrazení z $H(R^n)$ do $H(R^n)$, jehož koeficient kontrakce je roven číslu $\max(r_1, r_2, \ldots, r_m)$.

Nejprve učiňme pozorování, které vyslovíme jako lemma vzhledem k jeho samostatnému významu.

Lemma: Nechť $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \in H(R^n)$ a nechť $A = A_1 \cup A_1$, $B = B_1 \cup B_2$. Pak

$$d(A, B) \leq \max(d(A_1, B_1), d(A_2, B_2)).$$

Důkaz: Vezměme $b_1 \in B_1$ a $b_2 \in B_2$. Pak dostáváme nerovnosti

$$d(b_1, A) = \min_{a \in A} d(b, a) \leq \min_{a \in A}(d(b_1, a) d(b_1, A_1))$$

a tudíž $d_{B_1}(A) \leq d_{B_1}(A_1)$. Dále vidíme, že

$$\begin{aligned} d_B(A) &= \max_{b \in B} d(b, A) = \max(d_{B_1}(A), d_{B_2}(A)) \\ &= \max(d_{B_1}(A_1), d_{B_2}(A_2)). \end{aligned}$$

Podobně odvodíme $d_A(B) \leq \max(d_{A_1}(B_1), d_{A_2}(B_2))$. Požadovaná nerovnost pak ihned plyne z definice $d(A, B)$. **QED.**

Nyní se vraťme k důkazu našeho tvrzení.
Důkaz (tvrzení): Dokažme ho pro $m = 2$ (obecně se důkaz vede analogicky). Vezměme dvě obecné množiny $K, L \in H(R^n)$ a použijme předchozí lemma na množiny $A = \psi_1(K) \cup \psi_2(K)$, $B = \psi_1(L) \cup \psi_2(L)$. Dostáváme

$$\begin{aligned} d(\psi(K), \psi(L)) &\leq \max(d(\psi_1(K), \psi_1(L)), d(\psi_2(K), \psi_2(L)) \\ &\leq \max(r_1 d(K, L), r_2 d(K, L)) \\ &\leq \max(r_1, r_2) \cdot d(K, L). \end{aligned}$$

QED.

Nyní můžeme vyslovit hlavní větu tohoto paragrafu.

Věta (existence a jednoznačnost fraktálu): Nechť $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ jsou kontraktivní zobrazení v R^n, jejichž koeficienty kontrakce jsou po řadě čísla $r_1, r_2, \ldots, r_m$. Nechť $\psi\colon H(R^n) \to H(R^n)$ je kolážové zobrazení určené zobrazeními $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, tj. nechť $\psi(A) = \psi_1(A) \cup \psi_2(A) \cup \cdots \cup \psi_m(A)$ pro každé $A \in H(R^n)$. Pak ψ je kontraktivní zobrazení na $H(R^n)$, jehož koeficient kontrakce r je roven $\max(r_1, r_2, \ldots, r_m)$. Dále platí, že pokud $P \in H(R^n)$, pak posloupnost množin $\{\psi^k(P)\}$ má v $H(R^n)$ limitu $Q \in H(R^n)$ a tato limita Q *nezávisí* na výběru iniciální množiny P. Konečně, Q je *jediný* prvek z $H(R^n)$, pro který platí $\psi(Q) = Q$.

Důkaz: Zobrazení $\psi\colon H(R^n) \to H(R^n)$ je kontraktivní zobrazení na úplném metrickém prostoru. Můžeme tedy na ψ aplikovat větu o pevném bodě. Z ní plyne, že $\psi^k(P) \to Q$, že $Q \in H(R^n)$ je pevný bod ψ (tj. $\psi(Q) = Q$) a že tento pevný bod nezávisí na startovací množině.
Pevný bod kolážového zobrazení $\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \cdots \cup \psi_n$ nazveme *fraktálem* určeným zobrazeními $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$. **QED.**

Uveďme nejdůležitější příklady fraktálů.

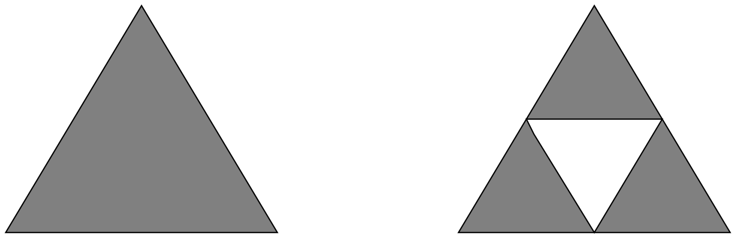
Příklady:

1. (Cantorovo diskontinuum): Nechť $\psi_1, \psi_2\colon R^1 \to R^1$ jsou (kontraktivní) zobrazení definovaná takto: $\psi_1(x) = \frac{1}{3}x, \psi_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Pak fraktál příslušný ke kolážovému zobrazení $\psi = \psi_1 \cup \psi_2$ je známé Cantorovo diskontinuum. (Všimněme si, že při $P = \langle 0, 1\rangle$ bude "akce" iterací tohoto kolážového zobrazení přesně "vyjímání" intervalů, známých z klasické konstrukce Cantorova diskontinua, viz obrázek dole).

2. (Sierpińského koberec): Nechť $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \colon R^2 \to R^2$ jsou (kontraktivní) zobrazení definovaná takto:

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}x, \quad \psi_2(x) = \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2}, 0), \quad \psi_3(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \cdot (1, \sqrt{3}).$$

Pak fraktál příslušný k $\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup \psi_3$ je známý Sierpińského koberec ("Sierpiński gasket"). (Všimněme si, že při P vzatém jako rovnostranný trojúhelník v R^n s počátkem v levém dolním rohu bude "akce" iterací tohoto kolážového zobrazení přesně "vyjímání" menších rovnostranných trojúhelníků známé z klasické konstrukce Sierpińského koberce, viz obrázek dole).



3. (Kochova křivka, sněhové vločky, kapradí, atd.): (Více o fraktálech lze najít v knize S. G. Hoggar Mathematics for Computer Graphics, Cambridge University Press, 1992.)