

Numerické metody — numerické řešení soustav lineárních rovnic

Zkrácená verze 2025

Mirko Navara

<http://cmp.felk.cvut.cz/~navara/>

katedra kybernetiky FEL ČVUT

Karlovo náměstí, budova G, místnost 104a

<https://moodle.fel.cvut.cz/courses/B4B01NUM>

12. prosince 2025

Obsah

1	APROXIMACE FUNKCÍ	11
1.1	Typické úlohy	11
1.1.1	Aproximace funkcí v ekonomii	11
1.1.2	Aproximace funkcí v teorii pravděpodobnosti a matematické analýze	11
1.1.3	Aproximace funkcí v elektrotechnice	11
1.1.4	Základní úloha aproximace	12
1.2	Interpolace	13
1.2.1	Prostá interpolace	13
1.3	Interpolace polynomem	15
1.3.1	Lagrangeova konstrukce interpolačního polynomu	16
1.3.2	Newtonova konstrukce interpolačního polynomu	17
1.3.3	Nevillův algoritmus	18
1.3.4	Chyba aproximace interpolačním polynomem	20
1.3.5	Čebyševovy polynomy	24
1.3.6	Příklad použití interpolačního polynomu na reálných datech	26
1.3.7	Hermitův interpolační polynom	27
1.3.8	Aproximace Taylorovou řadou	29
1.4	Interpolace spliny	30
1.4.1	Kubický spline	31
1.4.2	Příklad použití splinu na reálných datech	34
1.5	Metoda nejmenších čtverců	35
1.5.1	Řešení aproximace podle kritéria nejmenších čtverců	36
1.5.2	Ortogonalizace	39
1.5.3	Aproximace goniometrickým polynomem	40
1.5.4	Čebyševova aproximace polynomem	42
1.6	Richardsonova extrapolace	43
2	NUMERICKÁ DERIVACE	46
2.1	Formulace problému	46
2.2	Chyba metody u numerické derivace	47
2.2.1	Řád metod numerické derivace	47
2.3	Odhady chyb metody u numerické derivace	48
2.4	Doporučená délka kroku	48
2.5	Využití Richardsonovy extrapolace v numerické derivaci	50
2.6	Odhad derivace z reálných dat	51

3	NUMERICKÁ INTEGRACE	62
3.1	Newtonovy-Cotesovy vzorce	63
3.1.1	Metoda levých obdélníků	64
3.1.2	Obdélníková metoda	64
3.1.3	Lichoběžníková metoda	65
3.1.4	Simpsonova metoda	65
3.1.5	Obecné Newtonovy-Cotesovy vzorce	66
3.2	Odhad chyby numerické integrace	66
3.3	Řád metod integrace	67
3.4	Numerická integrace reálných dat	68
3.5	Gaussova metoda integrace	69
3.6	Richardsonova extrapolace při integraci	70
3.6.1	Rombergova metoda	72
3.7	Praktické stanovení počtu intervalů	73
3.8	Řešení obtížnějších úloh úpravou zadání	74
3.8.1	Integrace přes nekonečný interval	74
3.8.2	Omezení intervalu	75
3.8.3	Pomalu konvergentní integrály	75
4	NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC	79
4.1	Formulace problému	79
4.2	Metoda půlení intervalu neboli bisekce	79
4.3	Metoda regula falsi	79
4.4	Univerzální odhad chyby	80
4.5	Metoda sečen	81
4.6	Newtonova metoda (metoda tečen)	82
4.6.1	Odhad chyby Newtonovy metody	83
4.6.2	Konvergence Newtonovy metody	84
4.6.3	Náhrada derivace numerickým odhadem	85
4.7	Konvergence a její rychlost (řád metody)	86
4.7.1	Řád Newtonovy metody	88
4.7.2	Řád metody regula falsi	88
4.8	Kombinace startovacích a zpřesňujících metod	90
4.9	Metoda prosté iterace (MPI)	91
4.9.1	Kontraktivní funkce	92
4.9.2	Věta o pevném bodě	92
4.9.3	Optimalizace MPI	93
4.9.4	Řád metody prosté iterace	93
4.9.5	Kritéria pro výběr metody řešení rovnic	95
4.10	Podobné úlohy	95
4.10.1	Hledání násobných kořenů	95
4.10.2	Řešení algebraických rovnic neboli hledání kořenů polynomů	96
4.10.3	Řešení rovnic v komplexním oboru	97
4.10.4	Řešení soustav rovnic	97
5	NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC	99
5.1	Formulace úlohy a její obtíže	99
5.1.1	Druhy problémů	99
5.1.2	Špatná podmíněnost	99
5.1.3	Zdroje chyb	100
5.2	Přímé metody	100
5.2.1	Gaussova eliminace (GEM)	100
5.2.2	Výběr hlavního prvku	100
5.2.3	Gaussova-Jordanova redukce	101
5.2.4	LU-rozklad	101
5.2.5	Výpočet inverzní matice	102
5.2.6	Výpočet determinantu	102

5.2.7	Vlastní čísla	103
5.2.8	Výpočet vlastních čísel	103
5.3	Iterační metody	103
5.3.1	Normy vektorů a matic	103
5.3.2	Kontraktivní vektorové funkce	104
5.3.3	Maticové iterační metody	107
5.3.4	Jacobiova iterační metoda (JIM)	108
5.3.5	Gaussova-Seidelova iterační metoda (GSM)	109
5.3.6	Superrelaxační metoda (SOR – Successive OverRelaxation method)	110

5 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

5.1 Formulace úlohy a její obtíž

Úloha: Hledáme řešení soustavy n lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n &= b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n} x_n &= b_n \end{aligned}$$

Maticový tvar:

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b},$$

kde $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ je (regulární) matice soustavy,

$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^\top$ vektor pravých stran,

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ vektor neznámých.

Cramerovo pravidlo má velkou výpočetní složitost a numerické chyby.

5.1.1 Druhy problémů

Matice soustavy:

- plné, ne příliš velké,
- řídké, často velmi velké (mj. u kubického splinu).

5.1.2 Špatná podmíněnost

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{b}$$

Malá změna koeficientů soustavy nebo pravé strany může způsobit velkou změnu řešení.

Zpětné dosazení (nepřesného) řešení $\vec{x}_c$ dá **reziduum řešení**:

$$\vec{r} = \vec{b} - \mathbf{A} \vec{x}_c,$$

Pokud matice $\mathbf{A}^{-1}$ má velké prvky, může být reziduum $\vec{r}$ malé, i když se vektor $\vec{x}_c$ podstatně liší od přesného řešení $\vec{x}$.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \mathbf{A} \vec{\bar{x}} - \mathbf{A} \vec{x}_c = \mathbf{A} (\vec{\bar{x}} - \vec{x}_c), \\ \vec{\bar{x}} - \vec{x}_c &= \mathbf{A}^{-1} \vec{r}. \end{aligned}$$

Jsou-li prvky matice $\mathbf{A}^{-1}$ velké, může i malá složka vektoru $\vec{r}$ způsobit velký rozdíl $\vec{\bar{x}} - \vec{x}_c$.

Malé reziduum nezaručuje malou chybu řešení!

Takové soustavy nazýváme **špatně podmíněné**.

Příklad 5.1 Soustava

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 6.00001y &= 8.00001 \end{aligned}$$

má řešení $x = 1, y = 1$;

minimální změna koeficientů na soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 8 \\ 2x + 5.99999y &= 8.00002 \end{aligned}$$

změní řešení na $x = 10, y = -2$.

Inverzní matice k oběma soustavám mají prvky řádově 10^5 , což ukazuje na jejich špatnou podmíněnost.

Rovnice v soustavách jsou „skoro lineárně závislé“.

5.1.3 Zdroje chyb

- nepřesnost koeficientů soustavy a pravé strany,
- zaokrouhlovací chyby při výpočtu,
- chyby metody – nekonečný proces je nahrazen konečným počtem kroků (u iteračních metod).

5.2 Přímé metody

Po konečném počtu kroků vedou (teoreticky) k přesnému řešení.

5.2.1 Gaussova eliminace (GEM)

Postupné úpravy matice soustavy pomocí ekvivalentních úprav (nemění řešení soustavy) na horní trojúhelníkovou matici, ze které lze zpětným dosazením snadno získat řešení.

Rozšířená matice soustavy má prvky

$$\begin{aligned}a_{i,j}^{(0)} &= a_{i,j}, & \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n; \\a_{i,n+1}^{(0)} &= b_i, & \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}$$

Soustavu

$$\begin{aligned}a_{1,1}^{(0)} x_1 + a_{1,2}^{(0)} x_2 + \dots + a_{1,n}^{(0)} x_n &= a_{1,n+1}^{(0)} \\a_{2,1}^{(0)} x_1 + a_{2,2}^{(0)} x_2 + \dots + a_{2,n}^{(0)} x_n &= a_{2,n+1}^{(0)} \\&\vdots \\a_{n,1}^{(0)} x_1 + a_{n,2}^{(0)} x_2 + \dots + a_{n,n}^{(0)} x_n &= a_{n,n+1}^{(0)}\end{aligned}$$

převědeme povolenými úpravami na tvar

$$\begin{aligned}a_{1,1}^{(0)} x_1 + a_{1,2}^{(0)} x_2 + \dots + a_{1,n}^{(0)} x_n &= a_{1,n+1}^{(0)} \\a_{2,2}^{(1)} x_2 + \dots + a_{2,n}^{(1)} x_n &= a_{2,n+1}^{(1)} \\&\vdots \\a_{n,n}^{(n-1)} x_n &= a_{n,n+1}^{(n-1)},\end{aligned}$$

ze kterého zpětnou substitucí vypočítáme vektor řešení.

Pokud vyjde na diagonále nulový prvek, stačí provést záměnu řádků (resp. sloupců – v tom případě musíme **zaměnit i odpovídající složky vektoru řešení!**).

To lze, pokud je matice soustavy regulární.

Algoritmus 5.1 Pro $k = 1, 2, \dots, n-1$, pro $i = k+1, k+2, \dots, n$, $j = k+1, k+2, \dots, n+1$

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} a_{k,j}^{(k-1)}.$$

Pokud po provedení **přímého chodu** je nějaký diagonální prvek $a_{i,i}^{(i-1)} = 0$ (resp. $|a_{i,i}^{(i-1)}| < \varepsilon$), matice soustavy je (resp. může být) singulární.

V opačném případě použijeme **zpětnou substituci**

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}^{(i-1)}} \left(a_{i,n+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}^{(i-1)} x_j \right), \quad \text{pro } i = n, n-1, \dots, 1.$$

5.2.2 Výběr hlavního prvku

Pokud číslo na diagonále je v absolutní hodnotě malé, jeho malá změna vyvolá velkou změnu výsledku při dělení a rostou zaokrouhlovací chyby.

Proto v každém kroku eliminace vybereme na diagonálu koeficient s co největší absolutní hodnotou = **hlavní prvek (pivot)**.

GEM s výběrem hlavního prvku

- **úplným** – vybíráme z $(n-k)^2$ prvků zbylé čtvercové podmatice (výpočetně složité),
- **sloupcovým** – vybíráme v rámci sloupce a pouze vyměníme řádky,
- **řádkový** – vybíráme v rámci řádku a vyměníme sloupce (**i pořadí neznámých!**).

5.2.3 Gaussova-Jordanova redukce

GEM může pokračovat eliminací prvků nad diagonálou.

Diagonální prvky lze převést na jedničky.

Sloupec pravých stran je pak vektor řešení.

Pro jedno použití je větší složitost, ale vyplatí se, pokud máme mnoho úloh lišících se pouze pravou stranou (např. výpočet inverzní matice, kdy řešíme soustavu lineárních rovnic současně pro n pravých stran, kde vycházíme z jednotkové matice).

5.2.4 LU-rozklad

Označme

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a vynásobíme $\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{A}$. Dostaneme první přidruženou soustavu z GEM s vynulovaným prvním sloupцем pod diagonálou. Pokračujeme:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{L}_{i+1} \cdot \mathbf{A}_i \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, n-2,$$

kde

$$\mathbf{L}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ & & -\frac{a_{i+2,i+1}^{(i)}}{a_{i+1,i+1}^{(i)}} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{a_{n,i+1}^{(i)}}{a_{i+1,i+1}^{(i)}} & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po provedení $n-1$ maticových násobení máme

$$\mathbf{L}_{n-1} \cdot \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{U},$$

kde matice $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková (=výsledek přímého chodu GEM) a $\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L}_{n-1} \cdot \mathbf{L}_{n-2} \dots \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{L}_1$ dolní trojúhelníková s jednotkami na diagonále. Inverzní matice $\bar{\mathbf{L}}^{-1} = \mathbf{L}$ existuje a je rovněž dolní trojúhelníková s jednotkami na diagonále.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{U}, \\ \mathbf{A} &= \bar{\mathbf{L}}^{-1} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Původní soustavu $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$ nahradíme dvěma soustavami s trojúhelníkovými maticemi

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \vec{y} &= \vec{b}, \\ \mathbf{U} \vec{x} &= \vec{y}, \end{aligned}$$

(neboť $\mathbf{A} \vec{x} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \vec{x} = \mathbf{L} \vec{y} = \vec{b}$),

které řešíme zpětnou substitucí.

Rozepsáním součinu $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ dostáváme

Algoritmus 5.2 Pro $r = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} u_{i,r} &= a_{i,r} - \sum_{s=1}^{i-1} l_{i,s} a_{s,r} \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, r, \\ l_{i,r} &= \frac{1}{u_{r,r}} \left(a_{i,r} - \sum_{s=1}^{r-1} l_{i,s} u_{s,r} \right) \quad \text{pro } i = r+1, r+2, \dots, n, \\ y_i &= b_i - \sum_{s=1}^{i-1} l_{i,s} y_s \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \\ x_i &= \frac{1}{u_{i,i}} \left(y_i - \sum_{s=i+1}^n u_{i,s} x_s \right) \quad \text{pro } i = n, \dots, 2, 1. \end{aligned}$$

Potřebujeme všechny prvky $u_{r,r} \neq 0$ (i během výpočtu) nenulové $\implies$ výběr hlavního prvku (částečný); zmenší se tím i zaokrouhlovací chyby.

Poznámka: Celý algoritmus můžeme realizovat „na místě“, v jediné čtvercové matici. Pro překrývající se diagonální prvky použijeme $u_{r,r}$, protože na diagonále matice $\mathbf{L}$ jsou jedničky, které nepočítáme ani neukládáme.

Poznámka: Tato metoda je zvláště vhodná pro řadu úloh lišících se pouze pravými stranami.

Lze použít i výpočet inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ (ovšem s větší složitostí).

5.2.5 Výpočet inverzní matice

$\mathbf{E}$ = jednotková matice

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \implies \mathbf{A}$ vynásobená j -tým sloupcem matice $\mathbf{A}^{-1}$ je rovna j -tému sloupci jednotkové matice $\mathbf{E}$.

$\vec{x}_j = j$ -tý sloupec $\mathbf{A}^{-1}$

$\vec{e}_j = j$ -tý sloupec $\mathbf{E}$

$$\mathbf{A} \vec{x}_j = \vec{e}_j$$

Máme soustavu rovnic, kde $\vec{x}_j$ je vektor neznámých.

Jednotlivé sloupce inverzní matice $\mathbf{A}^{-1}$ dostaneme jako řešení soustavy pro různé pravé strany – sloupce matice $\mathbf{E}$.

Můžeme využít GEM pro jednu matici soustavy a několik pravých stran současně; stačí „prodloužit“ cyklus pro řádky rozšířené matice soustavy typu $(n \times 2n)$, tedy $j = k+1, k+2, \dots, 2n$ (viz Gaussova-Jordanova redukce).

Použití LU-rozkladu: $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$:

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U})^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-1}.$$

Výpočet $\mathbf{U}^{-1}$ a $\mathbf{L}^{-1}$ je snadný, inverzní matice k trojúhelníkové je opět trojúhelníková.

5.2.6 Výpočet determinantu

Podle definice pouze pro velmi malé řádky matic.

n	2	3	4	5	10	20	30
počet operací	4	18	96	600	36 288 000	$4.8 \cdot 10^{19}$	$7.9 \cdot 10^{33}$

GEM: po eliminaci jako součin prvků na diagonále:

$$\det \mathbf{A} = \pm a_{1,1}^{(0)} a_{2,2}^{(1)} a_{3,3}^{(2)} \dots a_{n,n}^{(n-1)}.$$

POZOR! Výměna řádků či sloupců (při výběru hlavního prvku) **mění znaménko** determinantu. (Stačí si pamatovat, zda počet výměn byl sudý nebo lichý.)

LU-rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$:

$$\det \mathbf{A} = \det (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) = \det \mathbf{L} \cdot \det \mathbf{U} = u_{1,1} u_{2,2} u_{3,3} \dots u_{n,n}.$$

(Jedná se o trojúhelníkové matice a $\mathbf{L}$ má navíc na diagonále jednotky.)

Opět **nutno ošetřit znaménko** při výměnách řádků nebo sloupců.

5.2.7 Vlastní čísla

Definice 5.1 Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní (charakteristické) číslo matice** $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, též **vlastní číslo lineárního zobrazení** $\vec{x} \mapsto \mathbf{B}\vec{x}$, jestliže existuje nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ (**vlastní (charakteristický) vektor**) splňující $\vec{x} \mapsto \lambda \vec{x}$, tj. $\mathbf{B}\vec{x} = \lambda \vec{x}$.

Věta 5.1 Číslo λ je vlastní číslo matice $\mathbf{B}$, právě když $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = 0$.

5.2.8 Výpočet vlastních čísel

Pro matice malých řádů:

- Vypočteme $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E})$, což je polynom v proměnné λ stupně n (**charakteristický polynom matice** $\mathbf{B}$).
- Vlastní čísla λ_i jsou kořeny charakteristického polynomu matice $\mathbf{B}$ (rovnice $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = 0$ je **charakteristická rovnice**).

Speciální metody dovolují určit *největší* vlastní číslo a jemu příslušný vlastní vektor.

Poznámka: Za vlastní čísla nadále považujeme všechny kořeny charakteristické rovnice včetně komplexních. (O těch bychom měli správně hovořit jen v komplexním vektorovém prostoru; v reálném není násobení komplexním číslem definováno.)

5.3 Iterační metody

Snaží se konstruovat posloupnosti vektorů, konvergující k přesnému řešení soustavy.

5.3.1 Normy vektorů a matic

$\mathbb{R}^n$... n -rozměrný aritmetický vektorový prostor

$\mathbb{R}^{n,n}$... prostor čtvercových matic řádu n

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$... nulový vektor

$\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n,n}$... nulová matice

$\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n,n}$... jednotková matice

Definice 5.2 (Vektorová) **norma** je zobrazení $\|\cdot\|_v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

- $\|\vec{x}\|_v \geq 0$, přičemž $\|\vec{x}\|_v = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
- $\|c\vec{x}\|_v = |c| \|\vec{x}\|_v$,
- $\|\vec{x} + \vec{y}\|_v \leq \|\vec{x}\|_v + \|\vec{y}\|_v$ (trojúhelníková nerovnost).

Příklad 5.3

$$\begin{aligned} \|\vec{x}\|_e &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, & q &= 2, & \text{euklidovská,} \\ \|\vec{x}\|_s &= \sum_{i=1}^n |x_i|, & q &= 1, & \text{součtová, „manhattanská“,} \\ \|\vec{x}\|_r &= \max_{i=1,\dots,n} |x_i|, & q &\rightarrow \infty, & \text{maximová, Čebyševova,} \\ \|\vec{x}\|_q &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}, & q &\geq 1, & \text{společné zobecnění předchozích.} \end{aligned}$$

Co není norma: Pro $q = 1/2$ bychom dostali

$$\|\vec{x}\|_{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{|x_i|} \right)^2.$$

Porušuje trojúhelníkovou nerovnost:

$$\begin{aligned} (1, 1) &= (1, 0) + (0, 1), \\ \|(1, 1)\|_{1/2} &= 2^2 = 4 > \|(1, 0)\|_{1/2} + \|(0, 1)\|_{1/2} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Změna měřítka: Je-li $\|\cdot\|_v$ vektorová norma a $r > 0$, pak $\|\vec{x}\|_u = r \|\vec{x}\|_v$ je také vektorová norma.

Tvrzení 5.1 Norma je **konvexní** funkce.

Důkaz. Pro $c \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\|c\vec{x} + (1-c)\vec{y}\|_v \leq \|c\vec{x}\|_v + \|(1-c)\vec{y}\|_v = c\|\vec{x}\|_v + (1-c)\|\vec{y}\|_v$$

□

Definice 5.3 Posloupnost vektorů $\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots$ **konverguje k vektoru** $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n.$$

Věta 5.2 Posloupnost vektorů $\vec{x}^{(0)}, \vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}, \dots$ konverguje k vektoru $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, právě když

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_v = 0,$$

kde za normu můžeme zvolit libovolnou z výše uvedených vektorových norem.

(Konvergence nezáleží na volbě normy.)

Stejně můžeme i pro matice (ty také tvoří vektorový prostor) definovat normu $\|\cdot\|_M$, ale má to háček: Chceme, aby „malý vektor“ násobený „malou maticí“ nemohl dát „velký výsledek“.

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\vec{x}\|_v \leq \|\mathbf{A}\|_M \|\mathbf{B}\vec{x}\|_v \leq \overbrace{\|\mathbf{A}\|_M \|\mathbf{B}\|_M}^{\|\mathbf{A}\mathbf{B}\|_M} \|\vec{x}\|_v.$$

Maximová norma (vektorů i matic) to nespĺňuje:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & \cdots & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & \cdots & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ \vdots \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \cdots & 1/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2 & \cdots & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n/4 \\ \vdots \\ n/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^2/8 \\ \vdots \\ n^2/8 \end{pmatrix}.$$

Proto budeme požadovat

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\|_M \leq \|\mathbf{A}\|_M \|\mathbf{B}\|_M, \quad (\text{Schwarzova nerovnost}) \quad (11)$$

$$\|\mathbf{B}\vec{x}\|_v \leq \|\mathbf{B}\|_M \|\vec{x}\|_v. \quad (\text{maticová norma souhlasná s vektorovou}) \quad (12)$$

Definice 5.4 **Maticová norma** je zobrazení $\|\cdot\|_M: \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

- $\|\mathbf{B}\|_M \geq 0$, přičemž $\|\mathbf{B}\|_M = 0 \Leftrightarrow \mathbf{B} = \mathbf{O}$
- $\|c\mathbf{B}\|_M = |c| \|\mathbf{B}\|_M$,
- $\|\mathbf{B} + \mathbf{C}\|_M \leq \|\mathbf{B}\|_M + \|\mathbf{C}\|_M$ (trojúhelníková nerovnost),
- $\|\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}\|_M \leq \|\mathbf{B}\|_M \|\mathbf{C}\|_M$ (Schwarzova nerovnost).

Důsledek 5.1 $\|\mathbf{E}\|_M \geq 1$.

5.3.2 Kontraktivní vektorové funkce

Definice 5.5 Vektorová funkce $\varphi: I \rightarrow J$ je **kontraktivní** (s koeficientem q), jestliže

$$\exists q < 1 \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in I: \|\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{y})\|_v \leq q \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|_v.$$

kontraktivita $\Rightarrow$ spojitost

Věta 5.3 (Banachova věta o pevném bodě pro vektorové funkce) Necht $I \subset \mathbb{R}^n$ je **uzavřená omezená** množina a funkce $\varphi: I \rightarrow I$ je **kontraktivní** s koeficientem q . Pak rovnice $\varphi(x) = x$ má na I právě jedno řešení $\bar{x}$ (**pevný bod**).

Speciálně pro **lineární** zobrazení $\phi(\vec{x}) = \mathbf{B} \vec{x}$ kontraktivita znamená

$$\exists q < 1 \forall \vec{x}, \vec{y} \in I : \|\mathbf{B} \vec{x} - \mathbf{B} \vec{y}\|_v = \|\mathbf{B} \underbrace{(\vec{x} - \vec{y})}_{\vec{z}}\|_v \leq q \cdot \underbrace{\|\vec{x} - \vec{y}\|_v}_{\vec{z}},$$

tj. $\forall \vec{z} : \|\mathbf{B} \vec{z}\|_v \leq q \cdot \|\vec{z}\|_v$, a **postačující podmínka** je $\|\mathbf{B}\|_M \leq q$, kde maticová norma $\|\cdot\|_M$ je **souhlasná** s vektorovou normou $\|\cdot\|_v$.

Věta 5.4 Ke každé vektorové normě $\|\cdot\|_v$ lze najít souhlasnou maticovou normu $\|\cdot\|_V$. Stačí pro každou matici $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ definovat $\|\mathbf{B}\|_V$ jako **nejmenší** číslo, které splňuje (12). Takto definovaná funkce $\|\cdot\|_V: \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$ je maticová norma a nazývá se **operátorová norma indukovaná** (vektorovou) normou $\|\cdot\|_v$. Ekvivalentně ji lze zavést předpisem

$$\|\mathbf{B}\|_V = \sup_{\vec{z} \neq \vec{0}} \frac{\|\mathbf{B} \vec{z}\|_v}{\|\vec{z}\|_v} = \sup_{\|\vec{x}\|_v=1} \|\mathbf{B} \vec{x}\|_v, \quad \left(\vec{x} = \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|_v} \right).$$

(To je poloměr obrazu jednotkové koule v zobrazení $\phi(\vec{x}) = \mathbf{B} \vec{x}$. Každá **větší maticová norma** je rovněž souhlasná s $\|\cdot\|_v$.

Důsledek 5.2 $\|\mathbf{E}\|_V = 1$.

Poznámka: Zde máme prostor konečné dimenze, kde $\sup$ je $\max$.

Základní maticové normy

Operátorová norma indukovaná součtovou normou vektorů:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\|_S &= \sup_{\|\vec{u}\|_s=1} \|\mathbf{B} \vec{u}\|_s = \max_j \|(b_{1,j}, \dots, b_{n,j})\|_s = \max_j \sum_{i=1}^n |b_{i,j}| = \\ &= \|(\|(b_{1,1}, \dots, b_{n,1})\|_s, \|(b_{1,2}, \dots, b_{n,2})\|_s, \dots, \|(b_{1,n}, \dots, b_{n,n})\|_s)\|_r \end{aligned}$$

se nazývá **sloupcová** maticová norma.

Operátorová norma indukovaná maximovou normou vektorů:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\|_R &= \sup_{\|\vec{u}\|_r=1} \|\mathbf{B} \vec{u}\|_r = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| = \max_{i=1, \dots, n} \|(b_{i,1}, \dots, b_{i,n})\|_s = \\ &= \|(\|(b_{1,1}, \dots, b_{1,n})\|_s, \|(b_{2,1}, \dots, b_{2,n})\|_s, \dots, \|(b_{n,1}, \dots, b_{n,n})\|_s)\|_r \end{aligned}$$

se nazývá **řádková** maticová norma.

Příklad 5.4

$$\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{i,j}^2}$$

je maticová norma zvaná **euklidovská** nebo **Frobeniova** a je **souhlasná** s euklidovskou normou vektorů. Ale **není** to operátorová norma indukovaná euklidovskou normou vektorů,

$$\sup_{\|\vec{x}\|_e=1} \|\mathbf{B} \vec{x}\|_e,$$

pro tu neexistuje jednoduchý vzorec, protože je např. zdola omezená vlastními čísly matice $\mathbf{B}$. Nemůže to být operátorová norma, neboť pro jednotkovou matici $\|E\|_F = \sqrt{n} \neq 1$.

Příklad 5.5 Pro libovolnou maticovou normu $\|\cdot\|_M$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k \right\|_M = 2^k \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_M \rightarrow \infty \text{ pro } k \rightarrow \infty,$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^k \right\|_M = \frac{1}{2^k} \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_M \rightarrow 0 \text{ pro } k \rightarrow \infty,$$

$$\|\mathbf{B}^k\|_M \leq \|\mathbf{B}\|_M^k \rightarrow 0 \text{ pro } \|\mathbf{B}\|_M \leq 1, k \rightarrow \infty.$$

Tvrzení 5.2 Operátorová norma je bezrozměrná, změna měřítka vektorové normy nemá vliv. Pokud vektorovou normu $\|\cdot\|_v$ vynásobíme $r > 0$, $\|\vec{x}\|_u := r \|\vec{x}\|_v$, operátorová norma se nezmění:

$$\max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|\mathbf{B} \vec{x}\|_u}{\|\vec{x}\|_u} = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{r \|\mathbf{B} \vec{x}\|_v}{r \|\vec{x}\|_v} = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|\mathbf{B} \vec{x}\|_v}{\|\vec{x}\|_v} = \|\mathbf{B}\|_V.$$

Věta 5.5 Ke každé maticové normě $\|\cdot\|_M$ existuje alespoň jedna souhlasná vektorová norma $\|\cdot\|_v$, a to $\|\vec{x}\|_v = \|\mathbf{X}\|_M$, kde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Důkaz.

$$\|\mathbf{B} \vec{x}\|_v = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1,j} x_j & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{j=1}^n b_{2,j} x_j & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ \sum_{j=1}^n b_{n,j} x_j & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\|_M = \|\mathbf{B} \cdot \mathbf{X}\|_M \leq \|\mathbf{B}\|_M \|\mathbf{X}\|_M = \|\mathbf{B}\|_M \|\vec{x}\|_v.$$

□

Důsledek 5.3 $\|\cdot\|_F$ je souhlasná s $\|\cdot\|_e$.

Důkaz.

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ x_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\|_F^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|\vec{x}\|_e^2.$$

□

Definice 5.6 **Posloupnost matic** $\mathbf{B}^{(0)} = (b_{i,j}^{(0)})_{i,j=1}^n$, $\mathbf{B}^{(1)} = (b_{i,j}^{(1)})_{i,j=1}^n$, $\mathbf{B}^{(2)} = (b_{i,j}^{(2)})_{i,j=1}^n, \dots$ **konverguje k matici** $\mathbf{B} = (b_{i,j})_{i,j=1}^n$, **jestliže**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_{i,j}^{(k)} = b_{i,j} \quad \text{pro každé } i, j = 1, 2, \dots, n.$$

($\mathbf{B}^{(k)}$... k -tý člen posloupnosti)

Věta 5.6 Posloupnost matic $\mathbf{B}^{(0)}, \mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}, \dots$ konverguje k matici $\mathbf{B}$, právě když

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{B}^{(k)} - \mathbf{B}\|_M = 0,$$

pro **nějakou** maticovou normu $\|\cdot\|_M$.

(Konvergence nezáleží na volbě normy.)

Definice 5.7 *Matice $\mathbf{B}$ je **konvergentní**, jestliže posloupnost matic $\mathbf{B}, \mathbf{B}^2, \mathbf{B}^3, \mathbf{B}^4, \dots$ konverguje k nulové matici. V opačném případě řekneme, že matice $\mathbf{B}$ je **divergentní**.*

Definice 5.8 *Spektrální poloměr matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je číslo*

$$\varrho(\mathbf{B}) = \max_{i=1,2,\dots,n} |\lambda_i|,$$

kde $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$, jsou vlastní čísla matice $\mathbf{B}$ (včetně komplexních).

Věta 5.7 *Každá maticová norma $\|\cdot\|_M$ splňuje*

$$\|\mathbf{B}\|_M \geq \varrho(\mathbf{B}).$$

Důkaz. (Jen pro případ, že vlastní číslo λ s největší absolutní hodnotou je reálné.)

Nechť $\vec{y}$ je vlastní vektor příslušný λ , $\mathbf{B}\vec{y} = \lambda\vec{y}$.

Maticová norma $\|\cdot\|_M$ je souhlasná s nějakou vektorovou normou $\|\cdot\|_v$, tedy větší nebo rovna příslušné operátorové normě $\|\cdot\|_v$, indukované $\|\cdot\|_v$, pro kterou platí

$$\|\mathbf{B}\|_M \geq \|\mathbf{B}\|_v = \max_{\vec{x} \neq \vec{0}} \frac{\|\mathbf{B}\vec{x}\|_v}{\|\vec{x}\|_v} \geq \frac{\|\mathbf{B}\vec{y}\|_v}{\|\vec{y}\|_v} = \frac{|\lambda| \|\vec{y}\|_v}{\|\vec{y}\|_v} = |\lambda| = \varrho(\mathbf{B}).$$

□

Věta 5.8 *Matice $\mathbf{B}$ je konvergentní $\iff \varrho(\mathbf{B}) < 1$.*

Věta 5.9 ***Postačující** podmínky konvergentnosti matice $\mathbf{B}$:*

- $\|\mathbf{B}\|_M < 1$ pro **nějakou** maticovou normu,
- lineární zobrazení $\vec{x} \mapsto \mathbf{B}\vec{x}$ je kontraktivní vzhledem k **nějaké** vektorové normě.

Příklad 5.6 *Matice*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.8 \\ 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$$

je konvergentní, $\|\mathbf{B}\|_S = 0.9 < 1$, ačkoli $\|\mathbf{B}\|_R = 1.6 > 1$, $\|\mathbf{B}\|_F = \sqrt{1.3} > 1$.

5.3.3 Maticové iterační metody

Hledáme posloupnost vektorů $\vec{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ splňující $\vec{x}^{(k)} \rightarrow \vec{x}$, tj. $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_v \rightarrow 0$.

Použijeme rekurentní vzorec

$$\vec{x}^{(k+1)} = F_k(\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(k-1)}, \dots, \vec{x}^{(k-m)}).$$

Omezíme se na **lineární jednobodové stacionární maticové iterační metody**, tj. F_k nezávisí na k , závisí jen na $\vec{x}^{(k)}$, a to „lineárně“ (správně **afinně**),

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}.$$

Např.

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \mathbf{A}\vec{x}, \\ \vec{x} + \vec{b} &= \vec{x} + \mathbf{A}\vec{x} = (\mathbf{E} + \mathbf{A})\vec{x}, \\ \vec{x} &= (\mathbf{E} + \mathbf{A})\vec{x} - \vec{b}, \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \underbrace{(\mathbf{E} + \mathbf{A})}_{\mathbf{B}} \vec{x}^{(k)} - \underbrace{\vec{b}}_{\vec{c}}. \end{aligned}$$

Vektor chyby:

$$\begin{aligned}
 \vec{\varepsilon}^{(k)} &= \vec{x}^{(k)} - \vec{x} \quad (\text{předpokládáme } \neq \vec{0}) \\
 \vec{x}^{(k)} &= \mathbf{B} \vec{x}^{(k-1)} + \vec{c} \\
 \vec{x} &= \mathbf{B} \vec{x} + \vec{c} \\
 \vec{x}^{(k)} - \vec{x} &= \mathbf{B} (\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}) = \mathbf{B}^2 (\vec{x}^{(k-2)} - \vec{x}) = \dots = \mathbf{B}^k (\vec{x}^{(0)} - \vec{x}) \\
 \vec{\varepsilon}^{(k)} &= \mathbf{B} \vec{\varepsilon}^{(k-1)} = \dots = \mathbf{B}^k \vec{\varepsilon}^{(0)} \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}^k &= \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{\varepsilon}^{(k)} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

Věta 5.10 *Nutná a postačující podmínka konvergence iterační metody tvaru $\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{B} \vec{x}^{(k)} + \vec{c}$ je $\varrho(\mathbf{B}) < 1$. Pak pro vzdálenost od limity $\vec{x}$ platí*

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_v \leq \frac{\varrho(\mathbf{B})}{1 - \varrho(\mathbf{B})} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|_v.$$

Věta 5.11 *Postačující podmínka konvergence iterační metody tvaru $\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{B} \vec{x}^{(k)} + \vec{c}$ je $\|\mathbf{B}\|_M < 1$ (pro nějakou maticovou normu). Odhad chyby je*

$$\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}\|_v \leq \frac{\|\mathbf{B}\|_M}{1 - \|\mathbf{B}\|_M} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|_v,$$

(normy matice a vektorů můžeme volit, ale musí být souhlasné).

(Počáteční odhad i vektorová norma mohou být libovolné.)

5.3.4 Jacobiova iterační metoda (JIM)

Vyjádříme matici $\mathbf{A}$ ve tvaru

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U},$$

kde $\mathbf{D}$ je diagonální, $\mathbf{L}$ ostře dolní trojúhelníková a $\mathbf{U}$ ostře horní trojúhelníková.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \vec{x} &= (\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}) \vec{x} = \mathbf{D} \vec{x} + (\mathbf{L} + \mathbf{U}) \vec{x} = \vec{b}, \\
 \mathbf{D} \vec{x} &= -(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \vec{x} + \vec{b}, \\
 \vec{x} &= \mathbf{D}^{-1} (-(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \vec{x} + \vec{b}),
 \end{aligned}$$

volíme

$$\vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})}_{\mathbf{B}_{\text{JIM}}} \vec{x}^{(k)} + \underbrace{\mathbf{D}^{-1} \vec{b}}_{\vec{c}_{\text{JIM}}}.$$

Předpokládáme, že hlavní diagonála matice $\mathbf{A}$ neobsahuje žádný nulový prvek (toho lze dosáhnout výměnou řádků nebo sloupců).

Chceme, aby na diagonále byly „velké“ prvky.

Po složkách:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\frac{1}{a_{1,1}} (a_{1,2} x_2 + a_{1,3} x_3 + \dots + a_{1,n} x_n) + \frac{b_1}{a_{1,1}} \\
 x_2 &= -\frac{1}{a_{2,2}} (a_{2,1} x_1 + a_{2,3} x_3 + \dots + a_{2,n} x_n) + \frac{b_2}{a_{2,2}} \\
 &\vdots \\
 x_n &= -\frac{1}{a_{n,n}} (a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}) + \frac{b_n}{a_{n,n}} \\
 x_i^{(k+1)} &= -\frac{1}{a_{i,i}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right) + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Podmínka ukončení: $\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\|_v < \varepsilon$.

5.3.5 Gaussova-Seidelova iterační metoda (GSM)

Každá už vypočtená složka vektoru $\vec{x}^{(k+1)}$ se ihned použije v dalším výpočtu.

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{i,i}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right) + \frac{b_i}{a_{i,i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pro realizaci výpočtu stačí pouze jeden vektor $\vec{x}$.

Maticový tvar:

$$\begin{aligned} (\mathbf{D} + \mathbf{L}) \vec{x} &= -\mathbf{U} \vec{x} + \vec{b}, \\ \vec{x} &= -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{U} \vec{x} - \vec{b}), \\ \vec{x}^{(k+1)} &= \underbrace{-(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U}}_{\mathbf{B}_{\text{GSM}}} \vec{x}^{(k)} + \underbrace{(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1} \vec{b}}_{\vec{c}_{\text{GSM}}}. \end{aligned}$$

Může se stát, že konverguje pouze jedna z těchto metod (nebo žádná).

Věta 5.12 [Num. Recipes] Pokud JIM i GSM konvergují, pak $0 \leq \rho(\mathbf{B}_{\text{GSM}}) = \rho(\mathbf{B}_{\text{JIM}})^2 \leq \rho(\mathbf{B}_{\text{JIM}}) < 1$, takže GSM konverguje rychleji.

(Můžeme očekávat, že bude stačit asi 2× méně kroků.)

Problém: určení vlastních čísel matice.

Definice 5.9 Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ se nazývá **ostře diagonálně dominantní**, jestliže

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, n.$$

Věta 5.13 Nechť matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je ostře diagonálně dominantní, pak JIM i GSM konverguje pro libovolnou počáteční iteraci.

Důkaz. Pro JIM: $\mathbf{B}_{\text{JIM}}$ má prvky

$$b_{i,j} = \begin{cases} -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} & i \neq j, \\ 0 & i = j, \end{cases}$$

$$\|\mathbf{B}\|_R = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |b_{i,j}| = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|} = \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| < 1.$$

□

Poznámka: Pro transponovanou matici dostaneme jinou podmínku, ale stejně užitečnou, neboť zajistí $\|\mathbf{B}\|_S < 1$.

Poznámka: Ostře diagonálně dominantní matice vychází např. u soustav lineárních rovnic, kterými se řeší osvětlení scény za předpokladu lambertovských povrchů. (Soustavy jsou extrémně velké, mnohdy se ani nevejdou do paměti.) Navíc při změně osvětlení se změní jen pravá strana.

Definice 5.10 Matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ se nazývá **pozitivně definitní**, jestliže pro každý nenulový vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\vec{x}^\top \mathbf{A} \vec{x} > 0.$$

Věta 5.14 Nechť matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická a pozitivně definitní, pak GSM konverguje.

Poznámka: Symetrická a pozitivně definitní je např. matice soustavy normálních rovnic u metody nejmenších čtverců.

Poznámka: Matice soustavy rovnic pro koeficienty kubického splinu je ostře diagonálně dominantní, navíc řídká, takže složitost jedné iterace je úměrná n . Při rovnoměrném rozdělení uzlových bodů je navíc symetrická, což dovoluje řešení s téměř lineární složitostí [Spielman, Teng].

5.3.6 Superrelaxační metoda (SOR – Successive OverRelaxation method)

Konvergenci urychlí jakákoliv modifikace, která vede ke zmenšení spektrálního poloměru matice $\mathbf{B}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} \vec{x} &= \mathbf{D} \vec{x} + \omega \overbrace{(-\mathbf{A} \vec{x} + \vec{b})}^{\vec{e}} = \\
 &= \mathbf{D} \vec{x} + \omega \left((-\mathbf{L} - \mathbf{D} - \mathbf{U}) \vec{x} + \vec{b} \right), \\
 \mathbf{D} \vec{x} + \omega \mathbf{L} \vec{x} &= (1 - \omega) \mathbf{D} \vec{x} - \omega \mathbf{U} \vec{x} + \omega \vec{b}, \quad (\text{GSM: } \omega := 1) \\
 (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L}) \vec{x} &= [(1 - \omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}] \vec{x} + \omega \vec{b}, \\
 \vec{x} &= (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \left([(1 - \omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}] \vec{x} + \omega \vec{b} \right) = \\
 &= (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}] \vec{x} + \omega (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \vec{b}, \\
 \vec{x}^{(k+1)} &= \underbrace{(\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}]}_{\mathbf{B}_\omega} \vec{x}^{(k)} + \underbrace{\omega (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \vec{b}}_{\vec{c}_\omega},
 \end{aligned}$$

kde ω je **relaxační faktor**. (Pro $\omega = 1$ dostáváme GSM.) Po složkách:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{i,i}} \left(- \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} + b_i \right) + (1 - \omega) x_i^{(k)}$$

Věta 5.15 Metoda SOR konverguje pro libovolnou počáteční iteraci právě tehdy, když $\rho(\mathbf{B}_\omega) < 1$.

Věta 5.16 (Ostrowského) Nechť $\mathbf{A}$ je symetrická matice s kladnými prvky na diagonále. Pak platí $\rho(\mathbf{B}_\omega) < 1$ právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je pozitivně definitní a $0 < \omega < 2$.

Poznámka: Často je lepší relaxační faktor nadhodnotit.

Dodatek: Přehled značení

Popis je zjednodušený a nemusí být přesný, podrobnosti jsou v textu. Značení použité jen lokálně zde není uvedeno.

Značení specifické pro tuto kapitulu

n ... počet rovnic i neznámých

$\mathbb{R}^n$... n -rozměrný aritmetický vektorový prostor

$\mathbb{R}^{n,n}$... prostor čtvercových matic řádu n

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$... nulový vektor

$\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{n,n}$... nulová matice

$\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{n,n}$... jednotková matice

$\mathbf{A}$... matice soustavy

$\vec{b}$... vektor pravých stran

$\vec{x}$... vektor řešení

$\vec{x}$... správné řešení

$\vec{x}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$... posloupnost přibližných řešení

$\vec{x}_c$... jakékoli přibližné řešení

$\vec{r}$... residuum přibližného řešení $\vec{x}_c$

$\mathbf{L}, \mathbf{U}$... matice z LU-rozkladu (dolní a horní trojúhelníková)

$\mathbf{D}, \mathbf{L}, \mathbf{U}$... matice v iteračních metodách (diagonální, ostře dolní a ostře horní trojúhelníková)

$\mathbf{B}, \mathbf{B}_{\text{JIM}}, \mathbf{B}_{\text{GSM}}, \mathbf{B}_\omega$... iterační matice (obecná, Jacobiova, Gaussova-Seidelova, superrelaxační)

λ_i , $i = 1, 2, \dots$... vlastní čísla iterační matice

$\varrho(\cdot)$... spektrální poloměr

$\vec{c}, \vec{c}_{\text{JIM}}, \vec{c}_{\text{GSM}}, \vec{c}_\omega$... konstantní vektor v iteračních metodách (obecná, Jacobiova, Gaussova-Seidelova, superrelaxační)

Vektorové normy:

$\|\cdot\|_v$... obecná

$\|\cdot\|_e$... euklidovská

$\|\cdot\|_r$... maximová, Čebyševova

$\|\cdot\|_s$... součtová, „manhattanská“

$\|\cdot\|_q$... společné zobecnění pro $q \geq 1$

Maticové normy:

$\|\cdot\|_M$... obecná

$\|\cdot\|_F$... euklidovská, Frobeniova

$\|\cdot\|_R$... řádková

$\|\cdot\|_S$... sloupcová

Značení používané podobně v celém předmětu

$\mathbb{R}$... množina všech reálných čísel

$\mathbb{C}$... množina všech komplexních čísel

Literatura

- [Navara, Němeček] Navara, M., Němeček, A.: *Numerické metody*. ČVUT, Praha, dotisk 2005.
- [Knuth] Knuth, D.E.: *Fundamental Algorithms*. Vol. 1 of *The Art of Computer Programming*, 3rd ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1997.
- [Num. Recipes] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P.: *Numerical Recipes (The Art of Scientific Computing)*. 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2007. <http://www.nrbook.com/a/bookcpdf.php>
- [Handbook Lin. Alg.] Hogben, L. (ed.): *Handbook of Linear Algebra*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton/London/New York, 2007.
- [Spielman, Teng] Spielman, D.A., Teng, S.H.: Nearly-Linear Time Algorithms for Preconditioning and Solving Symmetric, Diagonally Dominant Linear Systems. [arXiv:cs/0607105v5](https://arxiv.org/abs/cs/0607105), 2112. DOI 10.48550/arXiv.cs/0607105