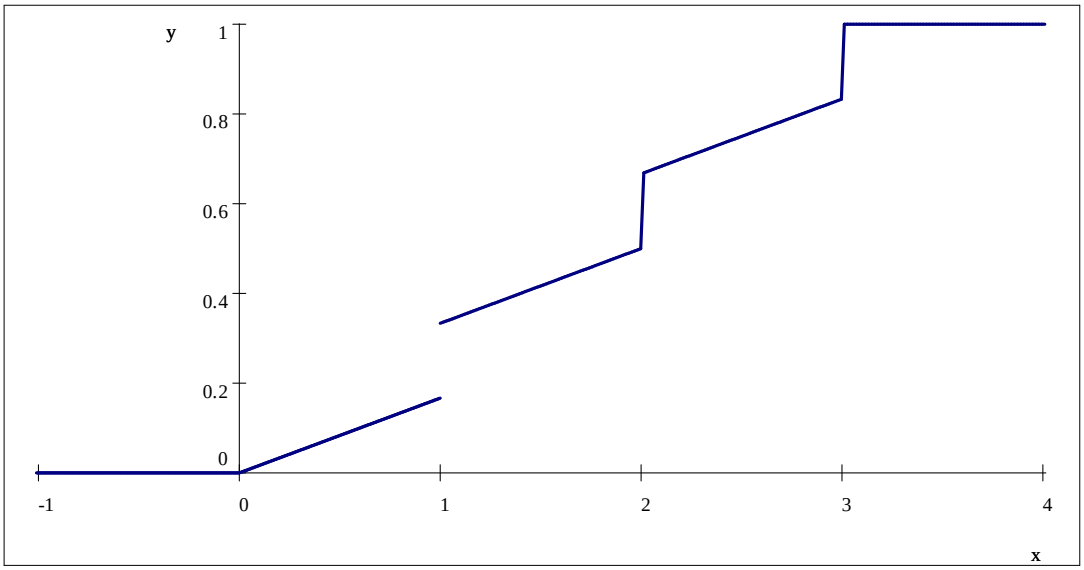
**Příjmení a jméno**: _____ **Podpis**: _____

| Úloha | 1 | 2 | 3 | *Celkem* |
|---|---|---|---|---|
| Maximum | 25 | 25 | 25 | 75 |
| *Počet bodů* | | | | |

1. (25 bodů) Náhodná veličina $X$ má diskrétní rovnoměrné rozdělení na množině $\{1, 2, 3\}$. Náhodná veličina $Y$ má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu $\langle 0, 3\rangle$. Popište a znázorněte rozdělení směsi $\mathrm{Mix}_{1/2}(X, Y)$.

**Řešení:**

$$F_{\mathrm{Mix}_{1/2}(X,Y)}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ \frac{t}{6} & \text{pro } 0 \le t < 1, \\ \frac{1}{6} + \frac{t}{6} & \text{pro } 1 \le t < 2, \\ \frac{1}{3} + \frac{t}{6} & \text{pro } 2 \le t < 3, \\ 1 & \text{pro } t \ge 1. \end{cases}$$




2. (25 bodů) Výrobce tvrdí, že spotřeba automobilu je 8 litrů na 100 km. Průměrná spotřeba 49 uživatelů však byla 8.4 litru na 100 km s výběrovým rozptylem 2.56. Testujte na hladině významnosti 5 %, zda má výrobce pravdu, a uveďte použité předpoklady.

**Řešení:**

Předpoklady: spotřeba má normální rozdělení se střední hodnotou $\mu$, měření odpovídají náhodnému výběru. Nulová hypotéza je $\mu = 8$, testujeme střední hodnotu norm. rozdělení při neznámém rozptylu. Hodnota testovací statistiky je

$$t = \frac{8.4 - 8}{\sqrt{2.56}}\sqrt{49} = 1.7\,.$$

Protože $t < q_{t(48)}(0.975) \doteq 2.011$, nulovou hypotézu nelze zamítnout. (Předpoklad normálního rozdělení není adekvátní, ale přibližně jej lze použít.)

3. (25 bodů) V krabici je jeden lístek s číslem 1 a jeden lístek s číslem 3. Vytáhneme lístek z krabice a vrátíme ho zpět. Pokus opakujeme $n$-krát. Jaká je pravděpodobnost, že součet všech tažených čísel je roven $2n$? (Uvažte samostatně případy sudého a lichého $n$.)

**Řešení:**

Pro liché $n$ je tato pravděpodobnost 0. Pro sudé $n$ si stačí uvědomit, že musíme vytáhnout stejný počet lístků s číslem 1 jako lístků s číslem 3. Všech možností, jak vytáhnout lístky z krabice, je $2^n$. Všech příznivých možností je $\binom{n}{n/2}$.
Výsledná pravděpodobnost je rovna

$$p = \frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}.$$