Cvičení 2. *Test nemoci vychází falešně negativní u* 9 % *nakažených a falešně pozitivní u* 6 % *zdravých.*[1] *V době provedení studie vycházelo, že nakažena jsou* 3 % *populace.*

a) Jaká je (podmíněná) pravděpodobnost, že pozitivně testovaný člověk není nakažený, tedy je falešně pozitivní?

b) Jaká je (podmíněná) pravděpodobnost, že negativně testovaný člověk je nakažený, tedy je falešně negativní?

Jak se tyto výsledky změní, pokud počet nemocných v populaci vzrostl na 10 %*?*

Řešení. [2] Označme jevy:
N ... nakažený,
T ... pozitivně testovaný,

$$P(T|\bar{N}) = 0.06\,, \qquad P(\bar{T}|\bar{N}) = 0.94\,,$$
$$P(\bar{T}|N) = 0.09\,, \qquad P(T|N) = 0.91\,,$$
$$P(N) = 0.03\,, \qquad P(\bar{N}) = 0.97\,.$$

	N	$\bar{N}$	součet
T	$TP = 0.03 \cdot 0.91 = 0.0273$	$FP = 0.97 \cdot 0.06 = 0.0582$	0.0855
$\bar{T}$	$FN = 0.03 \cdot 0.09 = 0.0027$	$TN = 0.97 \cdot 0.94 = 0.9118$	0.9145
součet	0.03	0.97	1

TP = true positive, skutečně pozitivní
FP = false positive, falešně pozitivní
TN = true negative, skutečně negativní
FN = false negative, falešně negativní

$$P(T) = P(N) \cdot P(T|N) + P(\bar{N}) \cdot P(T|\bar{N}) = 0.03 \cdot 0.91 + 0.97 \cdot 0.06 = 0.0855\,,$$
$$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 0.9145\,.$$

a)
$$P(\bar{N}|T) = \frac{P(\bar{N}) \cdot P(T|\bar{N})}{P(T)} = \frac{0.97 \cdot 0.06}{0.0855} \doteq 0.68\,,$$

b)
$$P(N|\bar{T}) = \frac{P(N) \cdot P(\bar{T}|N)}{P(\bar{T})} = \frac{0.03 \cdot 0.09}{0.9145} \doteq 0.00295\,.$$

[1] F. Vlček, M. Petráš, M. Průša, T. Petsinis, Z. Dindová, P. Vlčková: Ověření parametrů spolehlivosti antigenních testů na průkaz viru SARS-CoV-2. Ověření parametrů spolehlivosti antigenních testů Wantai SARS-CoV-2 Rapid Antigen Test (FIA). 1. 12. 2020. `https://www.antigenni-testy-covid.cz/realizovana-studie`, staženo 8. 10. 2021.
Ve skutečnosti byl k ověření výsledků použit PCR test, takže přesná otázka, na kterou studie odpovídá, zní „Jak přesně antigenní test předpovídá výsledky PCR testu?“ Pro jednoduchost a názornost označujeme skupiny podle výsledku PCR testu jako „zdravé“, resp. „nemocné“.

[2] Některé číselné výsledky jsou uvedeny na větší než adekvátní počet platných cifer pro snazší kontrolu.

Pro prevalenci 10 %:

$$P(N) = 0.1\,, \qquad\qquad P(\bar{N}) = 0.9\,.$$

	N	$\bar{N}$	součet
T	$TP = 0.1 \cdot 0.91 = 0.091$	$FP = 0.9 \cdot 0.06 = 0.054$	0.145
$\bar{T}$	$FN = 0.1 \cdot 0.09 = 0.009$	$TN = 0.9 \cdot 0.94 = 0.846$	0.855
součet	0.1	0.9	1

$$P(T) = P(N) \cdot P(T|N) + P(\bar{N}) \cdot P(T|\bar{N}) = 0.1 \cdot 0.91 + 0.9 \cdot 0.06 = 0.145\,,$$
$$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 0.855\,.$$

a)

$$P(\bar{N}|T) = \frac{P(\bar{N}) \cdot P(T|\bar{N})}{P(T)} = \frac{0.9 \cdot 0.06}{0.145} \doteq 0.37\,,$$

b)

$$P(N|\bar{T}) = \frac{P(N) \cdot P(\bar{T}|N)}{P(\bar{T})} = \frac{0.1 \cdot 0.09}{0.855} \doteq 0.0105\,.$$