

Cvičení 1. Rozsáhlý výběr ukazuje, že nemocí jsou nakažena 4 % populace. Test nemoci vychází pozitivní u 5 % zdravých a negativní u 2 % nakažených. Podnik nechal otestovat všech svých 100 zaměstnanců. Pozitivní test měli právě 4 zaměstnanci.

- a) Jaká je pravděpodobnost právě takového výsledku testování (4 ze 100)?
- b) Jaká je (podmíněná) pravděpodobnost, že všichni pozitivně testovaní byli zdraví, tedy falešně pozitivní?
- c) Jaká je (podmíněná) pravděpodobnost, že všichni zaměstnanci jsou zdraví?

Vyjádřete se i k předpokladům výpočtu.

Návod: V první otázce nejprve určete, jaká je pravděpodobnost pozitivního testu. U dalších otázek, jaká je (podmíněná) pravděpodobnost, že jeden člověk s pozitivním či negativním testem je zdravý.

Řešení. ¹ Pro jednoduchost považujeme všechny testy za nezávislé se stejným rozdělením. ² Označme jevy:

N ... nakažený,

T ... pozitivně testovaný,

$$\begin{aligned} P(N) &= 0.04, & P(\bar{N}) &= 0.96, \\ P(T|\bar{N}) &= 0.05, & P(\bar{T}|\bar{N}) &= 0.95, \\ P(\bar{T}|N) &= 0.02, & P(T|N) &= 0.98. \end{aligned}$$

	T	\bar{T}	součet
N	$TP = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392$	$FN = 0.04 \cdot 0.02 = 0.0008$	0,04
\bar{N}	$FP = 0.96 \cdot 0.05 = 0.048$	$TN = 0.96 \cdot 0.95 = 0.912$	0,96
součet	0,0872	0,9128	1

TP = true positive, skutečně pozitivní

FP = false positive, falešně pozitivní

TN = true negative, skutečně negativní

FN = false negative, falešně negativní

$$P(T) = P(N) \cdot P(T|N) + P(\bar{N}) \cdot P(T|\bar{N}) = 0.04 \cdot 0.98 + 0.96 \cdot 0.05 = 0.0872,$$

$$P(\bar{T}) = 1 - P(T) = 0.9128,$$

$$P(\bar{N}|T) = \frac{P(\bar{N}) \cdot P(T|\bar{N})}{P(T)} = \frac{0.96 \cdot 0.05}{0.0872} \doteq 0.55,$$

$$P(N|\bar{T}) = \frac{P(N) \cdot P(\bar{T}|N)}{P(\bar{T})} = \frac{0.04 \cdot 0.02}{0.9128} \doteq 0.00088,$$

$$P(\bar{N}|\bar{T}) = 1 - P(N|\bar{T}) = \frac{P(\bar{N}) \cdot P(\bar{T}|\bar{N})}{P(\bar{T})} = \frac{0.96 \cdot 0.95}{0.9128} \doteq 0.99912.$$

a)

$$P_{\text{Bi}(100, P(T))}(4) = \binom{100}{4} \cdot 0.0872^4 \cdot 0.9128^{96} \doteq 0.0356.$$

b)

$$P(\bar{N}|T)^4 \doteq 0.0918.$$

c)

$$P(\bar{N}|T)^4 \cdot P(\bar{N}|\bar{T})^{96} \doteq 0.0844.$$

¹Některé číselné výsledky jsou uvedeny na větší než adekvátní počet platných cifer kvůli možnosti kontroly.

²Předpoklady nejsou zcela splněny, což způsobí větší rozptyl výsledků.