Střed hodin je ve výšce 2 m nad podlahou. Sekundová ručička je dlouhá (od středu) 15 cm a pohybuje se rovnoměrně. Náhodně vybereme čas T s rovnoměrným rozdělením na intervalu, který je celočíselným násobkem minuty. Náhodná veličina X je výška konce sekundové ručičky nad podlahou v čase T. Určete hustotu, distribuční funkci, střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku náhodné veličiny X a pravděpodobnost, že $2\ \text{m} \le X \le 2.1\ \text{m}$. (Poznámka: Hustota f_X je nepřímo úměrná vertikální rychlosti.)

Řešení:
Výška bodu je popsána v čase T [min] jako $X(T) = 200 + 15\cos(2\pi T)$ [cm]. Pro zjednodušení uvažme veličinu $Y(T) = \frac{X(T)-200}{15} = \cos(2\pi T)$.

Pak máme

- $F_X(x) = P(X \le x) = P(15Y + 200 \le x) = P(Y \le \frac{x-200}{15}) = F_Y(\frac{x-200}{15})$,
- $f_X(x) = F'_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_Y(\frac{x-200}{15}) = \frac{1}{15} \cdot f_Y(\frac{x-200}{15})$,
- $\mathrm{E}X = \mathrm{E}(15\,Y + 200) = 15\,\mathrm{E}Y + 200$,
  $\mathrm{D}X = \mathrm{D}(15\,Y + 200) = 15^2\,\mathrm{D}Y$,
  $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X} = \sqrt{15^2\,\mathrm{D}Y} = 15 \cdot \sigma_Y$,
- $P\,(200 \le X < 210) = P(0 \le Y \le \frac{2}{3})$.

Stačí tedy určit všechny potřebné údaje pro veličinu Y. Ze vztahu hustot f_X a f_Y je vidět, že obě jsou nepřímo úměrné vertikální rychlosti konce sekundové ručičky. Obor hodnot Y je interval $\langle -1, 1\rangle$.

Vertikální rychlost v čase T je dána jako $Y'(T) = -2\pi\sin(2\pi T)$. Na intervalu $\langle 0,\ 0.5\rangle$ [min] je funkce Y prostá, takže pro $y \in \langle -1, 1\rangle$ existuje právě jedno $T \in \langle 0,\ 0.5\rangle$ [min] takové, že $y = Y(T) = \cos(2\pi T)$, tedy $T = \frac{1}{2\pi}\arccos y$. Podle zadání je pro $y \in \langle -1, 1\rangle$ hodnota

$$f_Y(y) = \frac{c}{-2\pi\sin\left(\arccos y\right)} = \frac{c}{-2\pi\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos y\right)}} = \\ = \frac{c}{-2\pi\sqrt{1-y^2}}\,.$$

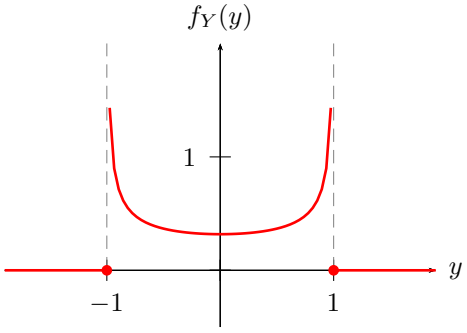
Pro výpočet konstanty c máme

$$1 = \int_{-1}^{1} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{-c}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{-c}{2\pi}\left[\arcsin y\right]_{y=-1}^{1} = -\frac{c}{2}\,.$$

Tedy $c = -2$ a

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}\,, & y \in (-1, 1)\,, \\ 0\,, & \text{jinak.} \end{cases}$$

To platí i pro jakýkoli celočíselný násobek použitého časového intervalu.



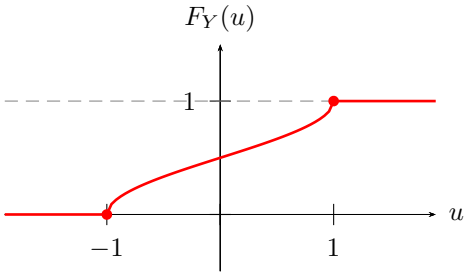
$$f_X(x) = \tfrac{1}{15} \cdot f_Y(\tfrac{x-200}{15}) = \begin{cases} \frac{1}{15\,\pi\,\sqrt{1-\left(\frac{x-200}{15}\right)^2}}\,, & x \in (200-15, 200+15)\,, \\ 0\,, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro $u \in \langle -1, 1\rangle$ je

$$F_Y(u) = \int_{-1}^{u} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{u} \frac{1}{\pi\,\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\,[\arcsin y]_{y=-1}^{u} = \frac{\arcsin u}{\pi} + \frac{1}{2}\,.$$

Takže

$$F_Y(u) = \begin{cases} 0\,, & u \le -1\,, \\ \frac{\arcsin u}{\pi} + \frac{1}{2}\,, & u \in (-1, 1)\,, \\ 1\,, & u \ge 1\,. \end{cases}$$



$$F_X(x) = F_Y(\tfrac{x-200}{15}) = \begin{cases} 0\,, & x \le 200-15\,, \\ \frac{\arcsin\left(\frac{x-200}{15}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}\,, & x \in (200-15, 200+15)\,, \\ 1\,, & x \ge 200+15\,. \end{cases}$$

Z důvodu symetrie hustoty i celé úlohy je zřejmě střední hodnotou $\mathrm{E}Y$ střed intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tedy $\mathrm{E}Y = 0$ [cm] a $\mathrm{E}X = \mathrm{E}(15\,Y + 200) = 200$.

Výpočet rozptylu $\mathrm{D}Y$:

$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_Y(y)\;\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\;\mathrm{d}y = \left\{ \begin{smallmatrix} y=\cos\alpha \\ \mathrm{d}y=-\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha \\ \alpha\in\langle 0,\pi\rangle \end{smallmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,(-\sin\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos^2\alpha\;\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Takže $\mathrm{D}Y = \mathrm{E}(Y^2) - \big(\mathrm{E}Y\big)^2 = \frac{1}{2}$, a tedy $\mathrm{D}X = \mathrm{D}(15\,Y + 200) = 15^2\,\mathrm{D}Y = \frac{15^2}{2} = 112.5$.

Směrodatná odchylka je $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{D}X} = \frac{15}{\sqrt{2}}$.

Konečně

$$P\,(200 \le X \le 210) = P(0 \le Y \le \tfrac{2}{3}) = F_Y(\tfrac{2}{3}) - F_Y(0) = \frac{\arcsin(2/3)}{\pi}\,.$$