Cvičení 3. *„Někdy se daří, někdy ne.“ Předpokládáme, že rychlost řešení úloh X (měřená v úlohách za hodinu) má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0,1\rangle$. Jaká je střední hodnota času potřebného k vyřešení 5 úloh?*

Řešení.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0\,, & x \le 0\,, \\ x\,, & 0 < x \le 1\,, \\ 1\,, & x \ge 1\,, \end{cases}$$

Potřebný čas je náhodná veličina $T = 5/X$; její distribuční funkce F_T je nulová pro nekladné argumenty; pro $t > 0$ splňuje

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(X \ge \tfrac{5}{t}) = 1 - P(X < \tfrac{5}{t}) = 1 - P(X \le \tfrac{5}{t}) = 1 - F_X(\tfrac{5}{t}) = \begin{cases} 0\,, & t < 5\,, \\ 1 - \dfrac{5}{t}\,, & t \ge 5\,, \end{cases}$$

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 5\,, \\ \dfrac{5}{t^2}\,, & t \ge 5\,, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\, f_T(t)\,\mathrm{d}t = \int_5^{\infty} \frac{5}{t}\,\mathrm{d}t = [5\,\ln t]_{t=5}^{\infty} = \infty\,.$$

Jednodušeji pomocí kvantilové funkce $q_X(\alpha) = \alpha$:

$$\int_0^1 \frac{5}{q_X(\alpha)}\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^1 \frac{5}{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = [5\,\ln \alpha]_{\alpha=0}^{1} = \infty\,.$$

Závěr je, že střední hodnota neexistuje (vychází nekonečná), a to pro libovolný počet úloh, což lze volně interpretovat jako „matematické zdůvodnění prokrastinace.“