1. (18 bodů) Náhodná veličina X je počet rubů při 400 nezávislých hodech mincí.

   a) Pomocí Čebyševovy nerovnosti odhadněte pravděpodobnost

   $$P(|X - \mathrm{E}X| < 30).$$

   (9 bodů)

   b) Formulujte centrální limitní větu a pomocí ní vypočtěte číslo ε tak, aby

   $$P^* = P(|X - \mathrm{E}X| < \varepsilon).$$

   kde P^* je odhad z a) získaný pomocí Čebyševovy nerovnosti. *(9 bodů)*

Řešení:

a) Náhodná veličina X má binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(400, 0.5)$, pro které je $\mathrm{E}X = 400 \cdot 0.5 = 200$, $\mathrm{D}X = 400 \cdot 0.5^2 = 100$, $\sigma(X) = \sqrt{100} = 10$.

Po dosazení do Čebyševovy nerovnosti

$$P(|X - \mathrm{E}X| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{D}X}{\varepsilon^2}$$

dostaneme odhad P^*

$$P^* = P(|X - \mathrm{E}X| < 30) \geq 1 - \frac{100}{30^2} = 1 - \frac{100}{900} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{9}} \doteq \mathbf{0.8889}\,.$$

b) Pro posloupnost $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nezávislých náhodných veličin, které mají střední hodnotu μ_X a rozptyl σ_X^2, posloupnost distribučních funkcí normovaných náhodných veličin

$$\mathrm{norm} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

konverguje pro $n \to \infty$ k distribuční funkci Φ normovaného normálního rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$ (v každém bodě).

Protože je binomické rozdělení součtem alternativních rozdělení, splňuje předpoklady centrální limitní věty. Vzhledem k tomu, že $n = 400$, můžeme předpokládat, že má náhodná veličina X přibližně normální rozdělení $\mathrm{N}(200, 100)$. Její distribuční funkci můžeme vyjádřit pomocí distribuční funkce normovaného normálního rozdělení ve tvaru

$$F_X(u) = \Phi\left(\frac{u - 200}{10}\right), \qquad u \in \mathbb{R}\,.$$

Pro interval spolehlivosti pro hodnotu P^* dostaneme podmínku

$$\begin{aligned} P(|X - \mathrm{E}X| < a) &= P(\mathrm{E}X - a < X < \mathrm{E}X + a) = F_X(\mathrm{E}X + a) - F_X(\mathrm{E}X - a) = \\ &= \Phi\left(\frac{200 + a - 200}{10}\right) - \Phi\left(\frac{200 + a - 200}{10}\right) = \Phi\left(\frac{a}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-a}{10}\right) = \\ &= 2\,\Phi\left(\frac{a}{10}\right) - 1\,. \end{aligned}$$

Pro požadovanou pravděpodobnost P^* dostaneme

$$P^* = 2\,\Phi\left(\frac{a}{10}\right) - 1 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a}{10}\right) = \frac{1 + P^*}{2} \doteq \frac{1.889}{2} \doteq 0.944\,.$$

Tedy

$$a = 10 \cdot q_U(0.944) \doteq 10 \cdot 1.645 = \mathbf{16.45}\,.$$

2. (18 bodů) Při uvedení do provozu byl dávkovač seřízen tak, aby jeho směrodatná odchylka byla rovna přesně hodnotě 0.4. Předpokládejme, že veličina X představující velikost dané dávky má normální rozdělení. Po čase byla provedena kontrola pomocí změření $n = 10$ dávek, jejichž hodnoty byly:

$$(9.1,\ 9.5,\ 9.8,\ 10.3,\ 9.2,\ 10.2,\ 10.3,\ 10.7,\ 10.3,\ 10.6)\,.$$

a) Otestujte na hladině významnosti $\alpha = 5\ \%$ hypotézu, že směrodatná odchylka σ se nezměnila. *(6 bodů)*

b) Můžeme se spolehlivostí $1 - \alpha = 95\ \%$ tvrdit, že směrodatná odchylka σ se nezvýšila? *(5 bodů)*

c) Určete z výše uvedeného náhodného výběru symetrický oboustranný 95% interval spolehlivosti pro odhad rozptylu veličiny X. *(5 bodů)*

d) Je v našem příkladu předpoklad normálnosti rozdělení přiměřený (i když veličina má jen nezáporné hodnoty)? Zdůvodněte. *(2 body)*

Řešení:

Veličina X má rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Položme $\sigma_0 = 0.4$.

a) Test rozptylu normálního rozdělení; výběrový průměr, rozptyl a směrodatná odchylka:

$\bar{\boldsymbol{x}} = \dfrac{100}{10} = 10,\ s_{\boldsymbol{x}}^2 = \dfrac{2.9}{9} \doteq 0.322,\ s_{\boldsymbol{x}} \doteq 0.5276,\ n = 10,$

Hypotézy:

$H_0 : \sigma^2 = 0.16\ (= \sigma_0^2), \qquad H_1 : \sigma^2 \neq 0.16\ .$

Testovací statistika je $T = (n-1)\,\dfrac{S_X^2}{\sigma_0^2}$, její realizace je $t = (n-1)\,\dfrac{s_{\boldsymbol{x}}^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{2.9}{0.16} = 18.125.$

Zamítací kritérium je

$$t \notin \left\langle q_{\chi^2(n-1)}(\tfrac{\alpha}{2}),\ \ q_{\chi^2(n-1)}(1-\tfrac{\alpha}{2})\right\rangle = \left\langle q_{\chi^2(9)}(0.025),\ \ q_{\chi^2(9)}(0.975)\right\rangle \doteq$$

$$\doteq \langle 2.7,\ \ 19.02\rangle\ .$$

To neplatí, takže H_0 NEZAMÍTÁME.

b) Další test rozptylu normálního rozdělení:

Hypotézy:

$H_0' : \sigma^2 \leq 0.16\ (= \sigma_0^2), \qquad H_1' : \sigma^2 > 0.16\ .$

Testovací statistika a její realizace je stejná, $t = 18.125$.

Zamítací kritérium je

$$t > q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha) = q_{\chi^2(9)}(0.95) \doteq 16.92\ .$$

To platí, takže H_0' ZAMÍTÁME.

Alternativně přes intervaly spolehlivosti:

$$0.16 = \sigma_0^2 \notin \left\langle \frac{(n-1)s_{\boldsymbol{x}}^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\alpha)},\ \infty \right) = \left\langle \frac{2.9}{16.92},\ \infty \right) \doteq \langle 0.1714,\ \infty)$$

takže NEMŮŽEME tvrdit.

c) Intervalový odhad rozptylu σ^2 je daný jako

$$\frac{(n-1)s_{\boldsymbol{x}}^2}{q_{\chi^2(n-1)}(1-\frac{\alpha}{2})} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s_{\boldsymbol{x}}^2}{q_{\chi^2(n-1)}(\frac{\alpha}{2})}$$

$$0.152 \doteq \frac{2.9}{19.02} \leq \sigma^2 \leq \frac{2.9}{2.7} \doteq 1.074$$

d) Velikost dávky X je určována mnoha různými nezávislými vlivy, takže je na místě (díky CLV) předpokládat normálnost tvaru $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Přitom střední hodnotu μ odhadujeme výběrovým průměrem $\bar{\boldsymbol{x}} = 10$ a směrodatnou odchylku budeme předpokládat hodnotu ze zadání tj. $\sigma = 0.4$. Pak je $P(X \leq 0) = \Phi(\frac{0-10}{0.16}) = \Phi(-25)$. Přitom z tabulek kvantilu je $\Phi^{-1}(0.99999) \doteq 4.265$, takže hodnota pravděpodobnost $P(X \leq 0) = \Phi(-25)$ už je velmi malá.

3. (14 bodů) Markovův řetězec má matici přechodu

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a) Oklasifikujte všechny stavy. *(2 body)*

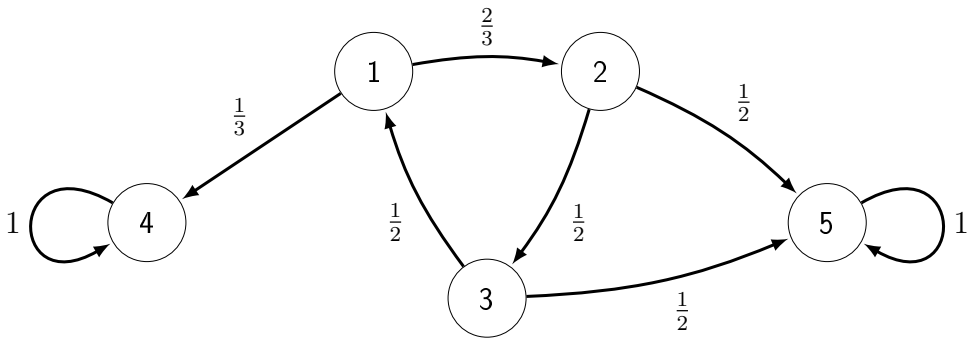
b) Stanovte všechny uzavřené množiny stavů. *(2 body)*

c) Stanovte rozdělení pravděpodobností stavů po třech krocích, jestliže začínáme ve stavu 1. *(3 body)*

d) Stanovte asymptotické rozdělení pravděpodobností stavů, jestliže začínáme ve stavu 1. *(7 bodů)*

Řešení:

a) Nakreslíme si příslušný orientovaný graf přiřazený matici:

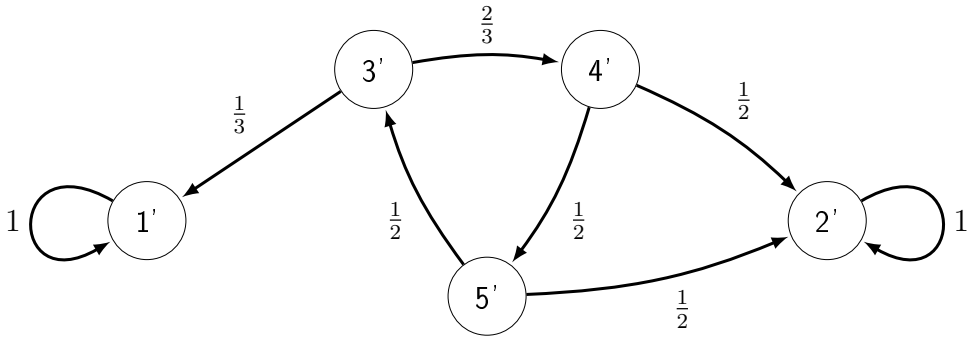


První tři stavy jsou přechodné, zbývající dva absorpční.

b) $\{\emptyset, \{4\}, \{5\}, \{4,5\}\}$.

c) $\left(\frac{1}{6}, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

d) Permutací stavů $(1', 2', 3', 4', 5') = (4, 5, 1, 2, 3)$ dostaneme



a matici přechodu ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice je

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0.3 & 1.2 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}.$$

Matice

$$\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

udává pravděpodobnosti dosažení absorpčních stavů z přechodných. Její první řádek odpovídá zadání, že začínáme ve stavu 1. Asymptotické pravděpodobnosti přechodných stavů jsou nulové, dohromady $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0\right)$ po změně pořadí stavů, $\left(0, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ při jejich původním pořadí.